Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

И.А. Кузнецова, О.А. Мыльцина, А.К. Смирнов, И.Я. Чернявский

# ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

*Учебное пособие для студентов заочного отделения механико-математического факультета*

В двух частях

Часть 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского

Саратов
2013

УДК 519.2(0.75.4)
ББК 22.17я73
К89

**Кузнецова И.А., Мыльцина О.А., Смирнов А.К., Чернявский И.Я.**
К89 Теория вероятностей и математическая статистика: В 2 ч. Ч. 2. Математическая статистика: Учеб. пособие для студентов заоч. отделения мех.-мат. фак. – Саратов.
Электронное пособие

В пособии излагаются основные идеи и методы математической статистики, рассматривается точечное и интервальное оценивание, методы нахождения оценок и построения доверительных интервалов, критерии проверки статистических гипотез. Материал разбит на модули, приведены контрольные вопросы и тестовые задания, что делает удобным его применение при использовании балло-рейтинговой системы.

Для студентов заочного отделения механико-математического факультета. Оно может быть полезно также студентам дневных и заочных отделений факультетов, на которых преподается «Теория вероятностей и математическая статистика».

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

# СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ ..... 4
МОДУЛЬ 1. Основные задачи математической статистики. Оценки параметров, их свойства ..... 6
ТЕМА 1. Основные понятия математической статистики. Генеральная совокупность, выборка, группировка данных, интервальный и вариационный ряды ..... 6
ТЕМА 2. Оценки параметров распределений. Несмещенные и состоятельные оценки. Эмпирическое среднее и эмпирическая дисперсия, их свойства ..... 10
ТЕМА 3. Неравенство Рао-Крамера. Эффективные оценки ..... 15
Контрольные вопросы. ..... 19
Тестовые задания ..... 20
Ответы ..... 21
МОДУЛЬ 2. Основные распределения математической статистики и их применения ..... 22
ТЕМА 4. Методы нахождения оценок параметров распределения ..... 22
ТЕМА 5. Расперделения хи – квадрат и Стьюдента ..... 25
ТЕМА 6. Распределение выборочных характеристик нормальной совокупности ..... 27
Контрольные вопросы ..... 30
Тестовые задания ..... 31
Ответы ..... 33
МОДУЛЬ 3. Интервальное оценивание. Проверка статистических гипотез ..... 34
ТЕМА 7. Доверительные интервалы и примеры их построения ..... 34
ТЕМА 8. Проверка статистических гипотез. Критерий знаков ..... 37
ТЕМА 9. Критерии Пирсона, Смирнова, Колмогорова ..... 45
Контрольные вопросы ..... 49
Тестовые задания ..... 50
Ответы ..... 52
Список рекомендуемой литературы ..... 53

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

## ВВЕДЕНИЕ

Данное пособие является второй частью курса «Теория вероятностей и математическая статистика» и посвящено изложению основных идей и методов математической статистики. Пособие состоит из трех модулей, каждый из которых содержит теоретический материал, контрольные вопросы, позволяющие проверить усвоение теории, и тестовые задания для подготовки к итоговому тестированию.

Первый модуль посвящен основным задачам и понятиям математической статистики и статистическому оцениванию параметров распределений.

В первой теме модуля введены понятия генеральной совокупности, выборки, группировки данных, рассмотрены методы построения интервального и вариационного ряда и их графические представления в виде гистограммы и полигона. Во второй теме дается определение оценок параметров, рассматриваются несмещенные и состоятельные оценки, определяются эмпирическое среднее и дисперсия и изучаются их свойства. Третья тема модуля посвящена формулировке и доказательству неравенства Рао-Крамера, определению и исследованию эффективных оценок.

Во втором модуле рассматриваются основные распределения математической статистики и их приложения.

В первой теме приведены два основных метода нахождения оценок параметров – метод моментов и метод наибольшего правдоподобия. Вторая тема посвящена определению и изучению распределений хи-квадрат и Стьюдента. В третьей теме формулируется и доказывается теорема о распределении выборочных характеристик нормальной совокупности, находящая широкое применение при построении доверительных интервалов и проверке статистических гипотез.

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

Третий модуль посвящен таким важнейшим разделам математической статистики, как интервальное оценивание и проверка статистических гипотез.

В первой теме модуля вводится понятие доверительного интервала и приведены примеры построения доверительных интервалов для параметров нормальной совокупности. Вторая тема посвящена основным идеям проверки статистических гипотез и их иллюстрации на примере критерия знаков. В третьей теме рассматриваются критерии Пирсона, Смирнова и Колмогорова.

Следует заметить, что в пособии намеренно не рассматриваются вопросы регрессионного и дисперсионного анализа, поскольку они подробно излагаются в курсе общей теории статистики, который обычно читается параллельно с данным курсом.

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

# МОДУЛЬ 1. Основные задачи математической статистики. Оценки параметров, их свойства

## *ТЕМА 1. Основные понятия математической статистики. Генеральная совокупность, выборка, группировка данных, интервальный и вариационный ряды*

Основная задача теории вероятностей – изучение вероятностных свойств случайных величин в предположении, что их распределение известно. Например, если задана случайная величина $\xi$, имеющая нормальное распределение с плотностью $f_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, то можно вычислить математическое ожидание $M\xi$, дисперсию $D\xi$, вероятность попадания значений случайной величины $\xi$ в некоторый интервал. Параметры $a$ и $\sigma$ считаются известными.

Задачи математической статистики в некотором смысле противоположны. Распределение случайной величины $\xi$ неизвестно, а известны только результаты независимых измерений ее значений. На основе этих опытных данных нужно сделать выводы о распределении случайной величины, ее параметрах и т.п. Например, в случае нормальной случайной величины $\xi$ можно решать задачу об оценке параметров $a$ и $\sigma$ по результатам наблюдений. Можно оценить вероятность того, что параметры находятся в некоторых интервалах. Наконец, можно поставить задачу проверки гипотезы, что $\xi$ имеет нормальное распределение или что $a < 0$.

Основой для всех процедур математической статистики является набор опытных данных или выборка.

<u>Определение</u>. Пусть имеется случайная величина $\xi$, называемая генеральной совокупностью. Выборкой объема $n$ называется вектор

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

$X=(x_1,...,x_i,...,x_n)$ полученный в результате $n$ независимых измерений случайной величины $\xi$.

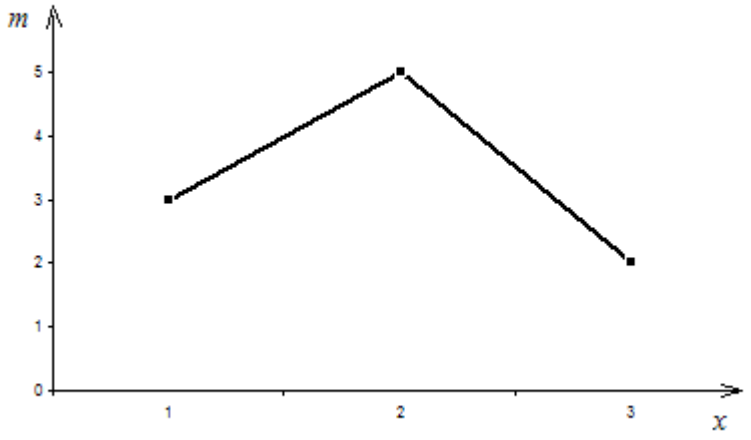
Замечание. Часто $x_1,...,x_i,...,x_n$ рассматривают как независимые случайные величины, имеющие то же распределение, что и генеральная совокупность $\xi$.

Определение. Если среди выборочных значений имеются повторяющиеся, то рассматривают вариационный ряд, то есть таблицу $\left|\begin{array}{c} x_1^* \\ \hline m_1 \end{array}\right| \begin{array}{c} \dots \\ \dots \end{array} \left|\begin{array}{c} x_k^* \\ \hline m_k \end{array}\right| \begin{array}{c} \dots \\ \dots \end{array} \left|\begin{array}{c} x_l^* \\ \hline m_l \end{array}\right|$, где $x_1^*,...,x_k^*,...,x_l^*$ - выборочные значения, а $m_1,...,m_k,...,m_l$ - их кратности, то есть количества повторений. Должно выполняться условие $\sum_{k=1}^{l} m_k = n$, где $n$ - объем выборки.

Пример. Пусть $X=(1,2,2,3,1,2,1,2,2,3)$ - выборка объема $n=10$. Тогда данной выборке соответствует следующий вариационный ряд: $\left|\begin{array}{c} x_k^* \\ \hline m_k \end{array}\right| \begin{array}{c} 1 \\ \hline 3 \end{array} \left|\begin{array}{c} 2 \\ \hline 5 \end{array}\right| \begin{array}{c} 3 \\ \hline 2 \end{array} \Big|$.

Графически вариационный ряд можно представить с помощью полигона. Если на координатной плоскости на оси абсцисс откладывать выборочные значения $x_k^*$, на оси ординат – кратности или частоты $m_k$, отметить точки с координатами $(x_k^*, m_k)$, $k=1,...,l$, и последовательно соединить их отрезками прямых линий, то полученная ломаная линия называется полигоном. Для нашего примера полигон выглядит следующим образом:

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского




(По разным осям масштаб может быть различным.)

Если объем выборки большой, то прибегают к группировке данных. Пусть $X=(x_1,...,x_i,...,x_n)$ - выборка объема $n$. Находят наименьшее выборочное значение $a=\min\limits_{1\le i\le n} x_i$ и наибольшее выборочное значение $b=\max\limits_{1\le i\le n} x_i$. Число $b-a$ называется размахом выборки. Интервал $[a,b]$, содержащий все выборочные значения, делят на $l$ интервалов равной длины. Количество интервалов можно вычислять по формуле $l=1+3{,}322\ln n$, называемой формулой Стэрджеса. Тогда длина каждого интервала $h$ определяется равенством $h=\dfrac{b-a}{l}$. Вычислим числа $x'_k$, $k=0,...,l$ по формуле $x'_k=a+k\cdot h$. Заметим, что при этом $x'_0=a$, $x'_l=b$. Обозначим через $m_k$ количество выборочных значений, попавших в интервал $[x'_{k-1},x'_k)$ (при $k=l$ рассматривается интервал $[x'_{l-1},x'_l]$). Получим следующую таблицу, называемую интервальным рядом.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $[x'_0,x'_1)$ | … | $[x'_{k-1},x'_k)$ | … | $[x'_{l-1},x'_l)$ |
| $m_1$ | … | $m_k$ | … | $m_l$ |

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

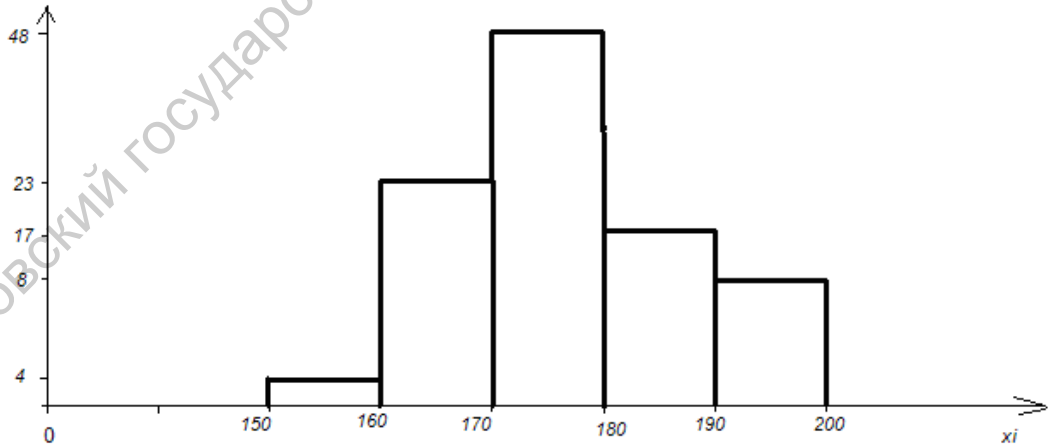
Должно выполняться условие $\sum_{k=1}^{n} m_k = n$. Из интервального ряда можно получить вариационный ряд, положив $x_k^* = \frac{x'_{k-1} + x'_k}{2}$, $k = 1,...,l$. Графически интервальный ряд представляется с помощью гистограммы. Для построения гистограммы на оси абсцисс откладывают границы интервалов $x'_k$, $k = 1,...,l$, на оси ординат – частоты $m_k$ или относительные частоты $\frac{m_k}{n}$, $k = 1,...,l$. Затем над каждым интервалом строят прямоугольник высота $m_k$ (или $\frac{m_k}{n}$) с данным основанием, $k = 1,...,l$. Полученная фигура называется гистограммой частот (или гистограммой относительных частот).

<u>Пример.</u> Пусть имеется интервальный ряд

| $[x'_{k-1}, x'_k)$ | [150,160) | [160,170) | [170,180) | [180,190) | [190,200] |
|---|---|---|---|---|---|
| $m_k$ | 4 | 23 | 48 | 17 | 8 |

Здесь $m$=4+23+48+17+8=100.

Гистограмма частот для данного интервального ряда выглядит следующим образом.




Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

***ТЕМА 2. Оценки параметров распределений. Несмещенные и состоятельные оценки. Эмпирическое среднее и эмпирическая дисперсия, их свойства***

Часто распределение случайной величины зависит от одного или нескольких параметров. Например, если ξ имеет распределение Пуассона с параметром λ>0, то при всех $m$=0,1… выполняется равенство $P\{\omega : \xi(\omega) = m\} = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^m}{m!}$. Меняя λ, мы будем получать различные распределения Пуассона. Если же случайная величина ξ имеет нормальное распределение с параметрами $a$ и $\sigma$, то ее плотность задается равенством $f_\xi(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$.

Часто бывает, что вид распределения известен, а неизвестны только параметры. Возникает задача оценки неизвестного параметра на основе опытных данных. Неизвестный параметр в математической статистике принято обозначать греческой буквой θ.

<u>Определение.</u> Пусть распределение случайной величины ξ зависит от неизвестного параметра $\theta$. Оценкой данного параметра называется измеримая функция от выборки $\tilde{\theta} = T(X)$.

<u>Замечание.</u> Если выборочные значения $x_1,...,x_i,...,x_n$ рассматривать как независимые случайные величины, имеющие то же распределение, что и генеральная совокупность ξ , то оценка $\tilde{\theta} = T(X)$ также является случайной величиной.

<u>Замечание.</u> Если требуется подчеркнуть зависимость оценки от объема выборки $n$, то применяют обозначение $\tilde{\theta}_n = T_n(X)$.

Для того чтобы оценка $\tilde{\theta}$ оценивала параметр $\theta$, она должна обладать определенными свойствами.

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

Определение. Оценка $\tilde{\theta}$ параметра $\theta$ называется несмещенной, если выполняется равенство $M\tilde{\theta} = \theta$. В противном случае оценка называется смещенной.

Определение. Оценка $\tilde{\theta}_n$ параметра $\theta$ называется асимптотически несмещенной, если выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{\theta}_n = \theta$.

Несмещенность оценки означает, что она в среднем совпадает с оцениваемым параметром.

Рассмотрим примеры наиболее часто применяемых оценок.

Определение. Эмпирическое (выборочное) среднее обозначается $x$ и определяется равенством $x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ .

Эмпирическое среднее является оценкой математического ожидания генеральной совокупности $\xi$.

Определение. Эмпирическая (выборочная) дисперсия обозначается $s^2$ и определяется равенством $s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ .

Эмпирическая дисперсия является оценкой дисперсии генеральной совокупности $\xi$.

Теорема. Эмпирическое среднее является несмещенной оценкой математического ожидания генеральной совокупности $\xi$. Эмпирическая дисперсия является смещенной, но асимптотически несмещенной оценкой дисперсии генеральной совокупности $\xi$.

Доказательство.

Для доказательства первого утверждения теоремы нужно проверить выполнение равенства $Mx = a$, где $a = M\xi$. Поскольку $x_1,...,x_i,...,x_n$ можно рассматривать как независимые одинаково распределенные случайные величины, имеющие то же распределение, что и генеральная совокупность $\xi$, то справедливы соотношения

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

$\forall i = 1..n \quad Mx_i = M\xi = a, \quad Dx_i = D\xi = \sigma^2$.

Имеем: $M\bar{x} = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Mx_i = \frac{1}{n}\cdot na = a$, и первое утверждение теоремы доказано.

Перейдем к доказательству второго утверждения теоремы. Сначала докажем равенство $s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\bar{x})^2$. Действительно, верна цепочка равенств

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\frac{1}{n}\bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{n}n\bar{x}^2) =$$

$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2$, которая доказывает наше утверждение.

Теперь подсчитаем $Ms^2$. Имеем:

$Ms^2 = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - M\bar{x}^2$. Но

$$M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Mx_i^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\sigma^2 + a^2\right)$$

(так как $\sigma^2 = Dx_i = Mx_i^2 - (Mx_i)^2 = Mx_i^2 - a^2$).

$$M(\bar{x}^2) = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = \frac{1}{n^2}M\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Mx_i^2 + \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}^{n} Mx_i x_j =$$

$= \frac{1}{n^2}n(\sigma^2 + a^2) + \frac{1}{n^2}n(n-1)a^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \frac{a^2}{n} + a^2 - \frac{a^2}{n} = a^2 + \frac{\sigma^2}{n}$. (Здесь, пользуясь независимостью случайных величин $x_1,...,x_i,...,x_n$, мы применим равенство $M(x_i x_j) = (Mx_i)(Mx_j) = a^2$). Таким образом, получаем:

$$Ms^2 = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - M\bar{x}^2 = \sigma^2 + a^2 - a^2 - \frac{\sigma^2}{n} = \frac{n-1}{n}\sigma^2.$$

Так как $Ms^2 \neq \sigma^2$ . то $s^2$ является смещенной оценкой $D\xi = \sigma^2$. Так как $\lim_{n\to\infty} Ms^2 = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\sigma^2\right) = \sigma^2$, то $s^2$ является асимптотически несмещенной оценкой $D\xi = \sigma^2$. Доказательство теоремы завершено.

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

Замечание. Из доказательства теоремы вытекает, что оценка $s*^2 = \frac{n}{n-1}s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ является несмещенной оценкой дисперсии генеральной совокупности $\xi$.

Определение. Оценка $s*^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ называется исправленной эмпирической дисперсией.

Определение. Оценка $\tilde{\theta}_n$ параметра $\theta$ называется состоятельной, если выполняется условие $\tilde{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta$, $n \to \infty$, что означает справедливость соотношения $\forall \varepsilon > 0 \quad \lim P\left\{\left|\tilde{\theta}_n - \theta\right| > \varepsilon\right\} = 0$.

Состоятельность оценки означает, что с увеличением числа опытов она сходится по вероятности к оцениваемому параметру.

Теорема. Эмпирическое среднее $\bar{x}$ является состоятельной оценкой математического ожидания генеральной совокупности $\xi$. Эмпирическая дисперсия $S^2$ является состоятельной оценкой дисперсии генеральной совокупности $\xi$.

Доказательство. Как уже отмечалось, выборочные значения $x_1,...,x_i,...,x_n$ можно рассматривать как независимые случайные величины, имеющие то же распределение, что и генеральная совокупность $\xi$. Тогда верны соотношения

$\forall i = 1..n \quad Mx_i = M\xi = a, \quad Dx_i = D\xi = \sigma^2$.

Но по закону больших чисел имеем

$$\bar{x} = \frac{x_1 + ... + x_i + ... + x_n}{n} \xrightarrow{P} Mx_i = a, \; n \to \infty,$$

и первое утверждение теоремы доказано.

Квадраты выборочных значений $x_1^2,...,x_i^2,...,x_n^2$ можно рассматривать как независимые случайные величины, имеющие то же распределение, что и квадрат генеральной совокупности $\xi$. Тогда справедливо условие

$\forall i = 1..n \quad Mx_i^2 = M\xi^2 = D\xi + (M\xi)^2 = \sigma^2 + a^2$.

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

Используя равенство $s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - \bar{x}^2$ и закон больших чисел, получаем:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \frac{x_1^2 + ... + x_i^2 + ... + x_n^2}{n} \xrightarrow{P} Mx_i^2 = \sigma^2 + a^2,\ n \to \infty,\ \bar{x}^2 \xrightarrow{P} a^2,\ n \to \infty$$

Следовательно,

$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2 \xrightarrow{P} \sigma^2 + a^2 - a^2 = \sigma^2,\quad n \to \infty,$ и $s^2$ является состоятельной оценкой дисперсии $D\xi = \sigma^2$. Доказательство теоремы завершено.

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

***ТЕМА 3. Неравенство Рао-Крамера. Эффективные оценки***

Для характеристики отклонения оценки от оцениваемого параметра вводится следующая величина.

Определение. Пусть $\tilde{\theta}$ - оценка параметра $\theta$. Вариация данной оценки обозначается $V(\tilde{\theta})$ и определяется равенством $V(\tilde{\theta}) = M(\tilde{\theta} - \theta)^2$.

Теорема. Вариация несмещенной оценки совпадает с ее дисперсией.

Доказательство.

Пусть $\tilde{\theta}$ - несмещенная оценка параметра $\theta$. Следовательно, выполняется равенство $M\tilde{\theta} = \theta$. Имеем: $V(\tilde{\theta}) = M(\tilde{\theta} - \theta)^2 = M(\tilde{\theta} - M\tilde{\theta})^2 = D\tilde{\theta}$, что и требовалось доказать.

Ясно, что чем меньше вариация оценки, тем лучше она оценивает данный параметр. Оказывается, существует нижний предел вариации оценки. Прежде чем доказать соответствующее утверждение, дадим необходимые определения.

Определение. Пусть распределение генеральной совокупности $\xi$ зависит от неизвестного параметра $\theta$, $X = (x_1, ..., x_i, ..., x_n)$ - выборка.

Тогда функция правдоподобия обозначается $L(X, \theta)$ и определяется равенством $L(X, \theta) = f(x_1, \theta) \cdot ... \cdot f(x_i, \theta) \cdot ... \cdot f(x_n, \theta)$, где $f(x, \theta) = P\{\omega : \xi(\omega) = x\}$, если генеральная совокупность $\xi$ имеет дискретное распределение, и $f(x, \theta) = f_\xi(x)$, если $\xi$ имеет абсолютно-непрерывное распределение с плотностью $f_\xi(x)$.

Теорема. Пусть $\tilde{\theta}$ - несмещенная оценка параметра $\theta$, и функция правдоподобия $L(X, \theta)$ дифференцируема по параметру $\theta$. Тогда справедливо неравенство $V(\tilde{\theta}) \geq \dfrac{1}{M\left(\dfrac{\partial \ln L(X, \theta)}{\partial \theta}\right)^2}$, называемое неравенством Рао-Крамера.

Доказательство.

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

Доказательство проведем для случая, когда генеральная совокупность $\xi$ имеет абсолютно-непрерывное распределение с плотностью $f_\xi(x)$. Тогда функция правдоподобия $L(X,\theta)$ является плотностью распределения случайного вектора $X=(x_1,...,x_i,...,x_n)$ и математическое ожидание оценки $\tilde{\theta}=T(X)$ вычисляется по формуле $M\tilde{\theta}=\int T(X)L(X,\theta)dX$. Поскольку $\tilde{\theta}$ является несмещенной оценкой параметра $\theta$, имеем: $\int T(X)L(X,\theta)dX=\theta$. Дифференцируя данное равенство по параметру $\theta$, получаем $\int T(X)\frac{\partial L(X,\theta)}{\partial\theta}dX=1$ (*). Так как $L(X,\theta)$ - плотность распределения случайного вектора $X=(x_1,...,x_i,...,x_n)$, то верно равенство $\int L(X,\theta)dX=1$. Дифференцируя данное равенство по параметру $\theta$, получаем $\int\frac{\partial L(X,\theta)}{\partial\theta}dX=0$. Умножим обе части получившегося равенства на $\theta$, имеем: $\int\theta\frac{\partial L(X,\theta)}{\partial\theta}dX=0$ (**). Вычитая из (*) (**), получаем $\int(T(X)-\theta)\frac{\partial L(X,\theta)}{\partial\theta}dX=1$. Данное равенство можно преобразовать следующим образом:

$$\int(T(X)-\theta)\cdot\frac{\partial L(X,\theta)}{\partial\theta}\cdot\frac{1}{L(X,\theta)}\cdot L(X,\theta)dX=1,$$

$$\int(T(X)-\theta)\cdot\frac{\partial\ln L(X,\theta)}{\partial\theta}\cdot L(X,\theta)dX=1.$$

$$M\left[(T(X)-\theta)\cdot\frac{\partial\ln L(X,\theta)}{\partial\theta}\right]=1 \text{ (***)}.$$

Для любых случайных величин $\xi$ и $\eta$ выполняется следующее неравенство $(M(\xi\cdot\eta))^2\le(M\xi)^2\cdot(M\eta)^2$, называемое неравенством Шварца, причем равенство в неравенстве Шварца достигается тогда и только тогда, когда $\eta=k\cdot\xi$ с вероятностью 1. Полагая в (***) $\xi=T(X)-\theta$, $\eta=\frac{\partial\ln L(X,\theta)}{\partial\theta}$, получаем:

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

$$1^2 \le M(T(X)-\theta)^2 \cdot M\left(\frac{\partial \ln L(X,\theta)}{\partial \theta}\right)^2 \quad (****).$$

Но $M(T(X)-\theta)^2 = V(\tilde{\theta})$. Следовательно, верно соотношение

$V(\tilde{\theta}) \ge \dfrac{1}{M\left(\dfrac{\partial \ln L(X,\theta)}{\partial \theta}\right)^2}$, и доказательство теоремы завершено.

<u>Определение.</u> Несмещенная оценка $\tilde{\theta}$ параметра $\theta$ называется эффективной, если для нее достигается равенство в неравенстве Рао-Крамера, то есть ее вариация минимальна.

<u>Следствие</u> (Критерий эффективности оценки).

Для того, чтобы несмещенная оценка $\tilde{\theta} = T(X)$ параметра $\theta$ была эффективной, необходимо и достаточно выполнение равенства

$$\frac{\partial \ln L(X,\theta)}{\partial \theta} = K(\theta)(T(X)-\theta).$$

<u>Доказательство.</u>

Несмещенная оценка $\tilde{\theta} = T(X)$ параметра $\theta$ является эффективной тогда и только тогда, когда для нее достигается равенство в неравенстве Рао-Крамера, равносильном неравенству (****). Но равенство в неравенстве Шварца достигается тогда и только тогда, когда $\eta = k \cdot \xi$ с вероятностью 1. Положив $\xi = T(X)-\theta$, $\eta = \dfrac{\partial \ln L(X,\theta)}{\partial \theta}$ получаем: $\dfrac{\partial \ln L(X,\theta)}{\partial \theta} = K(\theta)(T(X)-\theta)$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим примеры применения полученного критерия.

<u>Пример 1</u>. Пусть генеральная совокупность $\xi$ имеет нормальное распределение с неизвестным математическим ожиданием $M\xi = \theta$ и известной дисперсией $D\xi = \sigma^2$, то есть выполняется равенство $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}}$. Тогда для функции правдоподобия $L(X,\theta)$ справедлива цепочка равенств:

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

$$L(X,\theta)=f(x_1,\theta)\cdot\ldots\cdot f(x_i,\theta)\cdot\ldots\cdot f(x_n,\theta)=$$

$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x_1-\theta)^2}{2\sigma^2}}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x_i-\theta)^2}{2\sigma^2}}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x_n-\theta)^2}{2\sigma^2}}=$$

$$=\frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^n}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2}{2\sigma^2}}.$$

Логарифмируя данную функцию, получаем:

$$\ln L(X,\theta)=-n\ln(\sigma\sqrt{2\pi})-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2}{2\sigma^2}.$$

Вычисляя $\frac{\partial\ln L(X,\theta)}{\partial\theta}$, имеем:

$$\frac{\partial\ln L(X,\theta)}{\partial\theta}=\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}2(x_i-\theta)=\frac{1}{\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-n\theta\right)=$$

$$=\frac{n}{\sigma^2}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i-\theta\right)=\frac{n}{\sigma^2}(\bar{x}-\theta).$$

Таким образом, для оценки $T(X)=\bar{x}$ выполнен критерий эффективности, и в данном случае эмпирическое среднее $\bar{x}$ является эффективной оценкой математического ожидания генеральной совокупности.

<u>Пример 2.</u> Пусть генеральная совокупность $\xi$ имеет распределение Коши с неизвестным параметром $\theta$, то есть верно равенство $f_\xi(x)=\frac{1}{\pi\left(1+(x-\theta)^2\right)}$. Тогда имеем:

$$L(X,\theta)=\frac{1}{\pi\left(1+(x_1-\theta)^2\right)}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{\pi\left(1+(x_i-\theta)^2\right)}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{\pi\left(1+(x_n-\theta)^2\right)}=$$

$$=\frac{1}{\pi^n\prod_{i=1}^{n}(1+(x_i-\theta)^2)},$$

$$\ln L(X,\theta)=-n\ln\pi-\sum_{i=1}^{n}\ln(1+(x_i-\theta)^2),$$

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

$$\frac{\partial \ln L(X,\theta)}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^{n} \frac{2(x_i - \theta)}{1 + (x_i - \theta)^2}.$$

Видно, что в данном случае $\frac{\partial \ln L(X,\theta)}{\partial \theta}$ нельзя представить в виде $K(\theta)(T(X) - \theta)$, и эффективной оценки параметра $\theta$ не существует.

***Контрольные вопросы.***

1) Чем отличается вариационный ряд от выборки?
2) Чем отличается гистограмма от полигона?
3) Как вычисляется длина интервала при группировке данных?
4) Что представляют собой числа $m_k$, $k = 1,...,l$ в интервальном ряду?
5) Как из интервального ряда можно получить вариационный ряд?
6) Как определяется оценка параметра $\theta$?
7) Какая оценка называется несмещенной?
8) Какая оценка называется асимптотически несмещенной?
9) Как определяется эмпирическое среднее?
10) Как определяется эмпирическая дисперсия?
11) Какими свойствами обладает эмпирическое среднее?
12) Какими свойствами обладает эмпирическая дисперсия?
13) Как определяется исправленная эмпирическая дисперсия?
14) Какая оценка называется состоятельной?
15) Как определяется вариация оценки?
16) Каким свойством обладает вариация несмещенной оценки?
17) Как определяется функция правдоподобия для дискретного распределения?
18) Как определяется функция правдоподобия для абсолютно-непрерывного распределения?
19) Как формулируется неравенство Рао-Крамера?

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

20) Какая оценка называется эффективной?

21) Как формулируется критерий эффективности оценки?

***Тестовые задания***

1) Пусть $X=(x_1,...,x_i,...,x_n)$ - выборка объема $n$, $a=\min\limits_{1\le i\le n} x_i$, $b=\max\limits_{1\le i\le n} x_i$, $h$ – длина интервала, получаемого при группировке данных. Тогда размахом выборки называется число

а) $b+a$; б) $b-a$; в) $\frac{b-a}{n}$; г) $\frac{b-a}{h}$.

2) Пусть вариационный ряд задан таблицей

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x_k^*$ | -1 | 0 | 1 |
| $m_k$ | 3 | 4 | 3 |

Тогда верно равенство

а) $s^2=0{,}6$; б) $s^2=0{,}7$; в) $s^2=0{,}8$; г) $s^2=0{,}9$.

3) Оценка $\tilde{\theta}_n$ параметра $\theta$, называется эффективной, если выполняется условие

а) $M\tilde{\theta}_n=\theta$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} M\tilde{\theta}_n=\theta$; в) $\tilde{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta$, $n\to\infty$; г) другое.

4) Эмпирическое среднее $\bar{x}$ определяется равенством

а) $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$; б) $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$; в) $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})$; г) $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$.

5) Равенство $M\bar{x}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} Mx_i$ используется в доказательстве утверждения

а) $\bar{x}$ - состоятельная оценка $M\xi=a$;

б) $\bar{x}$ - эффективная оценка $M\xi=a$;

в) $\bar{x}$ - несмещенная оценка $M\xi=a$;

г) $\bar{x}$ - асимптотически несмещенная оценка $M\xi=a$.

6) Исправленная эмпирическая дисперсия $s^{*2}$ определяется равенством

а) $s^{*2}=\frac{n}{n-1}\sum(x_i-\bar{x})^2$; б) $s^{*2}=\frac{n-1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$; в) $s^{*2}=\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$;

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

г) $s^{*2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$.

7) Вариация оценки $\tilde{\theta}$ параметра $\theta$ определяется равенством

а) $V(\tilde{\theta}) = M\tilde{\theta}^2$; б) $V(\tilde{\theta}) = M\tilde{\theta}$; в) $V(\tilde{\theta}) = M(\tilde{\theta} - \theta)$; г) $V(\tilde{\theta}) = M(\tilde{\theta} - \theta)^2$.

8) Для выполнения неравенства Рао-Крамера требуется, чтобы оценка $\tilde{\theta}$ параметра $\theta$ была

а) эффективной; б) состоятельной; в) асимптотически несмещенной; г) несмещенной.

9) Неравенство Рао-Крамера формулируется так:

а) $V(\tilde{\theta}) \geq \frac{1}{M\left(\frac{\partial L(X,\theta)}{\partial\theta}\right)^2}$; б) $V(\tilde{\theta}) \geq \frac{1}{M\left(\frac{\partial L(X,\theta)}{\partial\theta}\right)}$; в) $V(\tilde{\theta}) \geq \frac{1}{M\left(\frac{\partial \ln L(X,\theta)}{\partial\theta}\right)}$;

г) $V(\tilde{\theta}) \geq \frac{1}{M\left(\frac{\partial \ln L(X,\theta)}{\partial\theta}\right)^2}$.

10) Если $f(x,\theta) = \theta^x \frac{e^{-\theta}}{x!}$, $X = (x_1,..., x_i,..., x_n)$, $\forall i = 1..n \quad x_i \in N$, то верно равенство

а) $L(X,\theta) = \frac{\theta^{\prod_{i=1}^{n} x_i} e^{-\theta^n}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}$; б) $L(X,\theta) = \frac{\theta^{\prod_{i=1}^{n} x_i} e^{-n\theta}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}$; в) $L(X,\theta) = \frac{\theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i} e^{-n\theta}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}$; г) $L(X,\theta) = \frac{\theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i} e^{-\theta^n}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}$.

***Ответы***

| 1) | 2) | 3) | 4) | 5) | 6) | 7) | 8) | 9) | 10) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| б | а | г | г | в | в | г | г | г | в |

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

# МОДУЛЬ 2. Основные распределения математической статистики и их применения

## *ТЕМА 4. Методы нахождения оценок параметров распределения*

Мы рассмотрим два основных метода нахождения оценок параметров – метод моментов и метод наибольшего правдоподобия. Перед рассмотрением метода моментов необходимо дать определения моментов и эмпирических моментов.

Определение. Пусть $\xi$ - случайная величина, $k = 1,2,...$. Момент $k$- го порядка случайной величины $\xi$ обозначается $\mu_k$ и определяется равенством $\mu_k = M\xi^k$. Центральный момент $k$- го порядка случайной величины $\xi$ обозначается $\nu_k$ и определяется равенством $\nu_k = M(\xi - M\xi)^k$. Абсолютный момент $k$- го порядка обозначается $\lambda_k$ и определяется равенством $\lambda_k = M|\xi|^k$.

Замечание. Математическое ожидание случайной величины является ее моментом первого порядка, а дисперсия – центральным моментом второго порядка.

Замечание. Если распределение случайной величины $\xi$ зависит от параметров $\theta_1,...,\theta_k,...,\theta_l$, то ее моменты являются функциями от этих параметров. Например, пусть случайная величина $\xi$ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda$, то есть при любом $m \in N$ верно соотношение $P\{\omega : \xi(\omega) = m\} = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^m}{m!}$. Тогда выполняются равенства $M\xi = \lambda$, $D\xi = \lambda$. Если же случайная величина $\xi$ имеет нормальное распределение с параметрами $a$, $\sigma$, то есть ее плотность распределения задается равенством $f_\xi(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{\sigma^2}}$, то верны равенства $M\xi = a$, $D\xi = \sigma^2$.

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

Определение. Пусть дана выборка $X=(x_1,...,x_i,...,x_n)$, $k=1,2,...$. Эмпирический момент $k$- го порядка обозначается $\mu_k^э$ и определяется равенством $\mu_k^э=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^k$. Центральный эмпирический момент $k$- го порядка обозначается $\nu_k^э$ и определяется равенством $\nu_k^э=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^k$. Абсолютный эмпирический момент $k$- го порядка обозначается $\lambda_k^э$ и определяется равенством $\lambda_k^э=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i|^k$.

Замечание. Эмпирическое среднее $\bar{x}$ является эмпирическим моментом первого порядка, а эмпирическая дисперсия $s^2$ - центральным эмпирическим моментом второго порядка.

Замечание. Эмпирические моменты являются функциями от выборки.

Метод моментов, нахождения оценок параметров распределения, состоит в следующем. Пусть распределение генеральной совокупности $\xi$ зависит от $l$ независимых параметров $\theta_1,...,\theta_k,...,\theta_l$. Вычисляются $l$ моментов, являющихся функциями данных параметров (например $\mu_1,...,\mu_k,...,\mu_l$) и $l$ одноименных эмпирических моментов, являющихся функциями выборки (например $\mu_1^э,...,\mu_k^э,...,\mu_l^э$). Затем составляется и решается следующая система из $l$ уравнений и $l$ неизвестными: $\mu_k(\theta_1,...,\theta_k,...,\theta_l)=\mu_k^э(x_1,...,x_i,...,x_n)$, $k=1,2,...,l$.

Решения данной системы $\tilde{\theta}_k=T_k(x_1,...,x_i,...,x_n)$, $k=1,2,...,l$ и являются оценками параметров $\theta_1,...,\theta_k,...,\theta_l$, найденными с помощью метода моментов.

Пример 1. Пусть генеральная совокупность $\xi$ имеет распределение Бернулли с известным числом опытов $N$ и неизвестной вероятностью успеха в одном опыте $\theta$. Для оценки неизвестного параметра $\theta$ воспользуемся методом моментов. Поскольку неизвестный параметр один, то нужно решить уравнение $\mu_1=\mu_1^э$, то есть $M\xi=\bar{x}$. Но $M\xi=N\theta$. Таким образом, получаем: $N\theta=\bar{x}$, откуда $\tilde{\theta}=\frac{\bar{x}}{N}=\frac{1}{Nn}\sum_{i=1}^{n}x_i$.

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

При использовании метода наибольшего правдоподобия оценка $\tilde{\theta}$ неизвестного параметра $\theta$ находится из условия $\forall x \quad L(X,\tilde{\theta}(X)) = \max_{\theta} L(X,\theta)$, где $L(X,\theta)$ - функция правдоподобия.

Поскольку функции $L(X,\theta)$ и $\ln L(X,\theta)$ достигают максимума в одной точке, то из технических соображений удобнее максимизировать по $\theta$ не $L(X,\theta)$, а $\ln L(X,\theta)$. Если функция $L(X,\theta)$ дифференцируема по параметру $\theta$, то оценку наибольшего правдоподобия можно находить из уравнения $\frac{\partial \ln L(X,\theta)}{\partial \theta} = 0$, называемого уравнением правдоподобия. При этом нужно убедиться в том, что найдена точка максимума, а не минимума, данной функции, проверив, например, выполнения условия $\frac{\partial^2 \ln L(X,\theta)}{\partial \theta^2} < 0$.

<u>Пример 2.</u> Пусть генеральная совокупность $\xi$ имеет распределение Пуассона с неизвестным параметром $\theta$, то есть при всех $x \in N$ верно равенство $f_{\xi}(x,\theta) = P\{\omega : \xi(\omega) = x\} = e^{-\theta}\frac{\theta^x}{x!}$. Тогда имеем:

$$L(X,\theta) = f(x_1,\theta)\cdot\ldots\cdot f(x_i,\theta)\cdot\ldots\cdot f(x_n,\theta) =$$

$$= e^{-\theta}\frac{\theta^{x_1}}{x_1!}\cdot\ldots\cdot e^{-\theta}\frac{\theta^{x_i}}{x_i!}\cdot\ldots\cdot e^{-\theta}\frac{\theta^{x_n}}{x_n!} = e^{-n\theta}\frac{\theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!},$$

$$\ln L(X,\theta) = -n\theta + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\cdot \ln\theta - \sum_{i=1}^{n}\ln(x_i!),$$

$$\frac{\partial \ln L(X,\theta)}{\partial \theta} = -n + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta}.$$

Составляя уравнение правдоподобия, получаем:

$-n + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta} = 0$, откуда получаем $\tilde{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$.

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

Поскольку $\frac{\partial^2 \ln L(X,\theta)}{\partial\theta^2} = -\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta} < 0$, то найденная оценка максимизирует функцию правдоподобия.

<u>Пример 3.</u> Пусть генеральная совокупность $\xi$ имеет показательное распределение с параметром $\theta$, то есть $f(x,\theta) = \theta e^{-\theta x}$ при $x \geq 0$. Получаем

$$L(X,\theta) = f(x_1,\theta)\cdot\ldots\cdot f(x_i,\theta)\cdot\ldots\cdot f(x_n,\theta) =$$

$$= \theta e^{-\theta x_1}\cdot\ldots\cdot\theta e^{-\theta x_i}\cdot\ldots\cdot\theta e^{-\theta x_n} = \theta^n e^{-\theta\sum_{i=1}^{n} x_i},$$

$$\ln L(X,\theta) = n\ln\theta - \theta\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right),\ \frac{\partial \ln L(X,\theta)}{\partial\theta} = \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} x_i\ .$$

Из уравнения правдоподобия имеем $-\frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$, откуда получаем $\tilde{\theta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} = \frac{1}{\bar{x}}$.

Поскольку $\frac{\partial^2 \ln L(X,\theta)}{\partial\theta^2} = -\frac{n}{\theta^2} < 0$, то найденная оценка максимизирует функцию правдоподобия.

## *ТЕМА 5. Распределения хи – квадрат и Стьюдента*

В данной теме будет рассмотрены распределения, которые не рассматривались ранее, но играют большую роль в математической статистике, в частности, при построении доверительных интервалов и проверке статистических гипотез.

<u>Определение.</u> Пусть случайные величины $\xi_1,\ldots,\xi_i,\ldots,\xi_n$ независимы и каждая из них имеет нормальное распределение с параметрами 0, 1 (обозначается $N(0,1)$), то есть при всех $i = 1,\ldots,n$ выполняется равенство $f_{\xi_i}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. Тогда говорят,

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

что случайная величина $\zeta$, определенная равенством $\zeta = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$, имеет распределение $\chi$-квадрат с $n$ степенями свободы (обозначается $\chi_n^2$).

<u>Теорема.</u> Если случайная величина $\zeta$ имеет распределение $\chi_n^2$, то для ее характеристической функции выполняется равенство $\varphi_\zeta(t) = \dfrac{1}{(1-2it)^{\frac{n}{2}}}$.

Эту теорему примем без доказательства.

<u>Теорема (теорема сложения для распределения $\chi_n^2$).</u>

Пусть случайная величина $\zeta_1$ имеет распределение $\chi$-квадрат с $n_1$ степенями свободы ($\chi_{n_1}^2$),случайная величина $\zeta_2$ имеет распределение $\chi$-квадрат с $n_2$ степенями свободы ($\chi_{n_2}^2$), $\zeta_1$ и $\zeta_2$ независимы. Тогда сумма данных случайных величин $\zeta_1 + \zeta_2$ имеет распределение $\chi$-квадрат с числом степеней свободы $n_1 + n_2$ ($\chi_{n_1+n_2}^2$).

<u>Доказательство.</u>

Поскольку случайная величина $\zeta_1$ имеет распределение $\chi_{n_1}^2$, то справедливо соотношение $\varphi_\zeta(t) = \dfrac{1}{(1-2it)^{\frac{n_1}{2}}}$. Так как случайная величина $\zeta_2$ имеет распределение $\chi_{n_2}^2$, то справедливо соотношение $\varphi_\zeta(t) = \dfrac{1}{(1-2it)^{\frac{n_2}{2}}}$. Из независимости случайных величин $\zeta_1$ и $\zeta_2$ вытекает равенство $\varphi_{\zeta_1+\zeta_2}(t) = \varphi_{\zeta_1}(t) \cdot \varphi_{\zeta_2}(t)$. Таким образом, получаем:

$$\varphi_{\zeta_1+\zeta_2}(t) = \varphi_{\zeta_1}(t) \cdot \varphi_{\zeta_2}(t) = \frac{1}{(1-2it)^{\frac{n_1}{2}}} \cdot \frac{1}{(1-2it)^{\frac{n_2}{2}}} = \frac{1}{(1-2it)^{\frac{n_1+n_2}{2}}}.$$

Получили характеристическую функцию распределения $\chi_{n_1+n_2}^2$. Так как характеристическая функция полностью определяет распределение, то из полученного равенства вытекает, что случайная величина $\zeta_1 + \zeta_2$ имеет

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

распределение $\chi$-квадрат с числом степеней свободы $n_1 + n_2$, что и требовалось доказать.

Определение. Пусть случайные величины $\eta, \xi_1, ..., \xi_i, ..., \xi_n$ независимы, и каждая из них имеет нормальное распределение с параметрами 0, 1. Тогда говорят, что случайная величина $\zeta = \dfrac{\eta}{\sqrt{\dfrac{\xi_1^2 + ... + \xi_i^2 + ... + \xi_n^2}{n}}}$ имеет распределение Стьюдента с $n$ степенями свободы ($St_n$).

Замечание. Исходя из определения распределения $\chi^2$, распределение Стьюдента можно было определить следующим образом.

Определение 2. Пусть случайные величины $\xi$ и $\eta$ независимы, $\eta$ имеет нормальное распределение с параметрами 0,1, $\xi$ имеет распределение $\chi$-квадрат с $n$ степенями свободы. Тогда говорят, что случайная величина $\zeta = \dfrac{\eta}{\sqrt{\dfrac{\xi}{n}}}$ имеет распределение Стьюдента с $n$ степенями свободы.

Замечание. И распределение $\chi$-квадрат , и распределение Стьюдента табулированы, поэтому в практических расчетах пользуются не формулами для их характеристических функций, плотностей и функций распределения, а таблицами.

## *ТЕМА 6. Распределение выборочных характеристик нормальной совокупности*

В данной теме будет рассмотрена нормальная генеральная совокупность и найдено распределение ее важнейших характеристик. Полученные результаты будут широко применяться при построении доверительных интервалов и проверке статистических гипотез. Поскольку доказательство некоторых фактов требует глубокого знания линейной алгебры, в частности, теории квадратичных форм, часть утверждений следующей теоремы будет приведена без доказательства.

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

Теорема (о распределении выборочных характеристик нормальной совокупности).

Пусть генеральная совокупность $\xi$ имеет нормальное распределение с параметрами $a,\ \sigma$ ($N(a,\sigma)$), $X=(x_1,...,x_i,...,x_n)$ - выборка объема n из данной генеральной совокупности, $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ - эмпирическое среднее, $s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$ - эмпирическая дисперсия, $s=\sqrt{s^2}$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) $\bar{x}$ и $s^2$ независимы,

2) $\bar{x}$ имеет нормальное распределение с параметрами $a,\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ($N\left(a,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$),

3) $\frac{ns^2}{\sigma^2}$ имеет распределение $\chi$-квадрат с *n-1* степенью свободы ($\chi^2_{n-1}$),

4) $\frac{\bar{x}-a}{s}\sqrt{n-1}$ имеет распределение Стьюдента с *n-1* степенью свободы ($St_{n-1}$).

Доказательство.

1) Данное утверждение примем без доказательства.

2) Поскольку $x_1,...,x_i,...,x_n$ можно рассматривать как независимые случайные величины, имеющие то же распределение, что и генеральная совокупность $\xi$, то выполняются соотношения $\forall i=1..n\ \ Mx_i=M\xi=a,\ \ Dx_i=D\xi=\sigma^2$. Поскольку каждая $x_i$, $i=1..n$ имеет нормальное распределение, то их линейная комбинация $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ также имеет нормальное распределение. Найдем параметры этого распределения. Имеем:

$$M\bar{x}=M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Mx_i=\frac{1}{n}\cdot n\cdot a=a,$$

$$D\bar{x}=D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}Dx_i=\frac{1}{n^2}\cdot n\cdot\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n}.$$

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

Следовательно, $\bar{x}$ имеет нормальное распределение с параметрами $a$, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ и второе утверждение теоремы доказано.

3) Данное утверждение примем без доказательства.

4) Так как из второго утверждения теоремы $\bar{x}$ имеет нормальное распределение с параметрами $a$, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, то случайная величина $\frac{\bar{x}-a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ имеет нормальное распределение с параметрами 0,1. Действительно, нормальность данной случайной величины вытекает из нормальности $\bar{x}$. Далее имеем:

$$M\left(\frac{\bar{x}-a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)=\frac{M(\bar{x}-a)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}=\frac{M\bar{x}-a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}=0,\ D\left(\frac{\bar{x}-a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)=M\left(\frac{\bar{x}-a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)^2=\frac{M(\bar{x}-a)^2}{\frac{\sigma^2}{n}}=\frac{D\bar{x}}{\frac{\sigma^2}{n}}=1.$$

Из третьего утверждения теоремы случайная величина $\frac{ns^2}{\sigma^2}$ имеет распределение $\chi^2_{n-1}$.

Тогда по определению 2 распределение Стьюдента случайная величина $\frac{\frac{\bar{x}-a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}{\sqrt{\frac{\frac{ns^2}{\sigma^2}}{n-1}}}$ имеет распределение $St_{n-1}$. Преобразуем данную случайную величину. Имеем:

$$\frac{\frac{\bar{x}-a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}{\sqrt{\frac{\frac{ns^2}{\sigma^2}}{n-1}}}=\frac{\frac{(\bar{x}-a)\sqrt{n}}{\sigma}}{\sqrt{\frac{ns^2}{\sigma^2(n-1)}}}=\frac{(\bar{x}-a)\sqrt{n}}{\sigma}\cdot\frac{\sigma\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}s}=\frac{\bar{x}-a}{s}\sqrt{n-1}.$$

Таким образом, действительно случайная величина $\frac{\bar{x}-a}{s}\sqrt{n-1}$ имеет распределение Стьюдента с *n-1* степенью свободы.

Доказательство теоремы завершено.

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

***Контрольные вопросы***

1) Как определяются моменты случайной величины и от чего они зависят?

2) Как определяются эмпирические моменты и от чего они зависят?

3) В чем состоит основная идея метода моментов?

4) Чему равна оценка параметра распределения Пуассона, найденная по методу моментов? Совпадает ли она с оценкой этого же параметра, найденной по методу наибольшего правдоподобия?

5) Чему равна оценка параметра показательного распределения, найденная по методу моментов? Совпадает ли она с оценкой этого же параметра, найденной по методу наибольшего правдоподобия?

6) Каким свойством логарифма руководствуемся, переходя от функции правдоподобия к ее логарифму?

7) Всегда ли оценку наибольшего правдоподобия можно находить с помощью уравнения правдоподобия?

8) Всегда ли решение уравнения правдоподобия дает оценку наибольшего правдоподобия?

9) Каким условиям должны удовлетворять случайные величины $\xi_1,...,\xi_i,...,\xi_n$ для того, чтобы случайная величина $\zeta = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$ имела распределение $\chi_n^2$?

10) Каким условиям должны удовлетворять случайные величины $\eta, \xi_1,...,\xi_i,...,\xi_n$ для того, чтобы случайная величина $\zeta = \dfrac{\eta}{\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2}{n}}}$ имела распределение $St_n$?

11) Каким условиям должны удовлетворять случайные величины $\xi$ и $\eta$ для того, чтобы случайная величина $\zeta = \dfrac{\eta}{\sqrt{\dfrac{\xi}{n}}}$ имеет распределение $St_n$?

12) Как формулируется теорема сложения для распределения $\chi_n^2$?

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

13) Если $\xi$ имеет распределение $N(a,\sigma)$, то какое распределение имеет эмпирическое среднее $\bar{x}$?

14) Если $\xi$ имеет распределение $N(a,\sigma)$, то какая функция от $D\xi = \sigma^2$ имеет распределение $\chi_n^2$

15) Если $\xi$ имеет распределение $N(a,\sigma)$, то какая функция от $M\xi = a$ имеет распределение $St_{n-1}$?

***Тестовые задания***

1) Пусть $\mu_k$ - момент *k*-го порядка, $\nu_k$ - центральный момент *k*-го порядка. Тогда верны оба равенства

а) $M\xi = \mu_1, D\xi = \nu_1$; б) $M\xi = \mu_1, D\xi = \nu_2$;

в) $M\xi = \mu_2, D\xi = \nu_1$; г) $M\xi = \mu_2, D\xi = \nu_2$.

2) Пусть $\nu_k$ - центральный момент *k*-го порядка, $\nu_k^Э$ - центральный эмпирический момент *k*-го порядка, распределение генеральной совокупности $\xi$ зависит от неизвестных параметров $\theta_1,...,\theta_k,...,\theta_l$, $X = (x_1,...,x_i,...,x_n)$ - выборка. Тогда верны оба равенства

а) $\nu_k = \nu_k(x_1,...,x_i,...,x_n), \nu_k^Э = \nu_k^Э(\theta_1,...,\theta_k,...,\theta_l)$;

б) $\nu_k = \nu_k(\theta_1,...,\theta_k,...,\theta_l), \nu_k^Э = \nu_k^Э(x_1,...,x_i,...,x_n)$;

в) $\nu_k = \nu_k(\theta_1,...,\theta_k,...,\theta_l), \nu_k^Э = \nu_k^Э(\theta_1,...,\theta_k,...,\theta_l)$;

г) $\nu_k = \nu_k(x_1,...,x_i,...,x_n), \nu_k^Э = \nu_k^Э(x_1,...,x_i,...,x_n)$.

3) Если генеральная совокупность $\xi$ имеет распределение Пуассона с неизвестным параметром $\theta$, то оценка $\tilde{\theta}$, найденная с помощью метода моментов, определяется равенством

а) $\tilde{\theta} = \frac{1}{s^2}$; б) $\tilde{\theta} = s^2$; в) $\tilde{\theta} = \frac{1}{x}$; г) $\tilde{\theta} = x$.

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

4) Если $L(X,\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)$, то уравнение правдоподобия выглядит так

а) $\prod_{i=1}^{n}\frac{\partial f(x_i,\theta)}{\partial\theta}=0$; б) $\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(x_i,\theta)}{\partial\theta}=0$; в) $\prod_{i=1}^{n}\frac{\partial \ln f(x_i,\theta)}{\partial\theta}=0$; г) $\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \ln f(x_i,\theta)}{\partial\theta}=0$.

5) Если $\xi_1,...,\xi_i,...,\xi_n$ независимы, при всех $i=1,...,n$ $\xi_i$ имеет распределение $N(0,1)$, то распределение $\chi_n^2$ имеет случайная величина

а) $\zeta=\sum_{i=1}^{n}\xi_i$; б) $\zeta=\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2$; в) $\zeta=\sum_{i=1}^{n}\xi_i^3$; г) $\zeta=\prod_{i=1}^{n}\xi_i$.

6) Какое свойство дисперсии используется в равенстве

$D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)=\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)$?

а) $D(C\xi)=C^2D\xi$; б) $DC=0$; в) $D\xi=M\xi^2-(M\xi)^2$; г) $D(\xi+\eta)=D\xi+D\eta$ (для независимых $\xi$ и $\eta$).

7) Какое свойство математического ожидания используется в равенстве

$\frac{1}{n}M\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Mx_i$ ?

а) $M(\xi-\eta)=M\xi-M\eta$; б) $M(\xi+\eta)=M\xi+M\eta$; в) $M(C\xi)=CM\xi$; г) $MC=C$.

8) Если $\xi$ имеет распределение $N(a,\sigma)$, то $x$ имеет распределение

а) $N\left(a,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$; б) $N\left(\frac{a}{\sqrt{n}},\sigma\right)$; в) $N\left(\frac{a}{\sqrt{n}},\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$; г) $N(a,\sigma)$.

9) Если $\xi$ имеет распределение $N(a,\sigma)$, то $\frac{ns^2}{\sigma^2}$ имеет распределение

а) $\chi_{n-1}^2$; б) $\chi_n^2$; в) $St_{n-1}$; г) $St_n$.

10) Если $\xi$ имеет распределение $N(a,\sigma)$, то распределение $N(0,1)$ имеет случайная величина

а) $\frac{\xi}{\sigma}$; б) $\frac{\xi-a}{\sigma}$; в) $\frac{\xi}{\sigma^2}$; г) $\frac{\xi-a}{\sigma^2}$.

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

***Ответы***

| 1) | 2) | 3) | 4) | 5) | 6) | 7) | 8) | 9) | 10) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| б | б | г | г | б | а | б | а | а | б |

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

# МОДУЛЬ 3. Интервальное оценивание. Проверка статистических гипотез

## *ТЕМА 7. Доверительные интервалы и примеры их построения*

Когда мы строим «точечную» оценку $\tilde{\theta} = T(X)$ неизвестного параметра $\theta$ генеральной совокупности $\xi$, то, даже если она обладает всеми хорошими свойствами (несмещенность, состоятельность, эффективность), то все равно практически никогда не будет выполняться равенство $\tilde{\theta} = \theta$. Поэтому возникла идея не оценивать неизвестный параметр $\theta$ одним числом $\tilde{\theta}$, а строить интервал со случайными границами, содержащий неизвестный параметр с заранее заданной вероятностью $\gamma$, близкой к 1. Такие интервалы называются доверительными интервалами. Дадим точное определение доверительного интервала.

<u>Определение.</u> Пусть распределение генеральной совокупности $\xi$ зависит от неизвестного параметра $\theta$, $\tilde{\theta}_1 = T_1(X)$ и $\tilde{\theta}_2 = T_2(X)$ - две измеримые функции выборки, удовлетворяющее условию $P\{\tilde{\theta}_1 < \tilde{\theta}_2\} = 1$, $\gamma \in (0,1)$. Тогда интервал со случайными границами $(\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)$ называется доверительным интервалом для параметра $\theta$ с уровнем доверия $\gamma$, если выполняется условие $P\{\tilde{\theta}_1 < \theta < \tilde{\theta}_2\} \geq \gamma$.

<u>Замечание.</u> Значение уровня доверия $\gamma$ берется близким к 1, например, $\gamma = 0{,}9$; $\gamma = 0{,}95$; $\gamma = 0{,}99$; $\gamma = 0{,}999$.

Рассмотрим примеры построения доверительных интервалов.

<u>Пример 1.</u> Пусть генеральная совокупность $\xi$ имеет нормальное распределение с неизвестным математическим ожиданием $M\xi = \theta_1$ и известной дисперсией $D\xi = \sigma^2$ (то есть распределение $N(\theta_1, \sigma)$). Построим доверительный интервал для неизвестного параметра $\theta_1$. По теореме о распределении выборочных характеристик из нормальной совокупности случайная величина $x$

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

имеет распределение $N\left(\theta_1, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$. Следовательно, случайная величина $\frac{x-\theta_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ имеет распределение $N(0,1)$. Отсюда для любого $\varepsilon > 0$ получаем равенство

$P\left\{\left|\frac{x-\theta_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right| < \varepsilon\right\} = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 2\int_{0}^{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 2\Phi(\varepsilon)$, где $\Phi(x)$ - функция Лапласа, определяемая равенством $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$. Следовательно, если задать $\gamma \in (0,1)$, то по таблицам функции Лапласа можно найти число $\varepsilon_\gamma$, для которого выполняется равенство $\Phi(\varepsilon_\gamma) = \frac{\gamma}{2}$ или $2\Phi(\varepsilon_\gamma) = \gamma$. Проведя элементарные преобразования, получаем:

$$\left|\frac{x-\theta_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right| < \varepsilon_\gamma \Leftrightarrow \left|\frac{\theta_1 - x}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right| < \varepsilon_\gamma \Leftrightarrow -\varepsilon_\gamma < \frac{\theta_1 - x}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \varepsilon_\gamma \Leftrightarrow -\varepsilon_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \theta_1 - x < \varepsilon_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - \varepsilon_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \theta_1 < x + \varepsilon_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Таким образом, для любого уровня доверия $\gamma$ по таблицам функции Лапласа можно найти такое число $\varepsilon_\gamma$, для которого выполняется равенство

$$P\left\{x - \varepsilon_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \theta_1 < x + \varepsilon_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = \gamma.$$

Это равенство означает, что интервал со случайными границами $\left(x - \varepsilon_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, x + \varepsilon_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ является доверительным интервалом для параметра $\theta_1$ с уровнем доверия $\gamma$.

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

Замечание. Длина данного доверительного интервала равна $2\varepsilon_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Она возрастает с увеличением уровня доверия $\gamma$ и среднего квадратического отклонения $\sigma$ и убывает с увеличением числа опытов $n$.

Пример 2. Пусть генеральная совокупность $\xi$ имеет нормальное распределение с известным математическим ожиданием $M\xi = a$ и неизвестной дисперсией $D\xi = \theta_2^2$. По теореме о распределении выборочных характеристик из нормальной совокупности случайная величина $\frac{ns^2}{\theta_2^2}$ имеет распределение хи-квадрат с числом степеней свободы $n-1$ (распределение $\chi^2_{n-1}$). Зададим уровень доверия $\gamma \in (0,1)$, определим число $\alpha$ равенством $\alpha = \frac{1-\gamma}{2}$ и по таблицам распределения Стьюдента найдем такие числа $\varepsilon_1^\gamma$ и $\varepsilon_2^\gamma$, для которых выполняются равенства $P\left\{\frac{ns^2}{\theta_2^2} \le \varepsilon_1^\gamma\right\} = \alpha$; $P\left\{\frac{ns^2}{\theta_2^2} \ge \varepsilon_2^\gamma\right\} = \alpha$. Откуда вытекает неравенство $P\left\{\varepsilon_1^\gamma < \frac{ns^2}{\theta_2^2} < \varepsilon_2^\gamma\right\} = \gamma$. Преобразовав данное неравенство, получим: $\varepsilon_1^\gamma < \frac{ns^2}{\theta_2^2} < \varepsilon_2^\gamma \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon_2^\gamma} < \frac{\theta_2^2}{nS^2} < \frac{1}{\varepsilon_1^\gamma} \Leftrightarrow \frac{ns^2}{\varepsilon_2^\gamma} < \theta_2^2 < \frac{ns^2}{\varepsilon_1^\gamma}$. Таким образом, имеем: $P\left\{\frac{ns^2}{\varepsilon_2^\gamma} < \theta_2^2 < \frac{ns^2}{\varepsilon_1^\gamma}\right\} = \gamma$. Данное неравенство означает, что интервал со случайными границами $\left(\frac{ns^2}{\varepsilon_2^\gamma}, \frac{ns^2}{\varepsilon_1^\gamma}\right)$ является доверительным интервалом для параметра $\theta_2^2$ с уровнем доверия $\gamma$.

Пример 3. Пусть генеральная совокупность $\xi$ имеет нормальное распределение с неизвестным математическим ожиданием $M\xi = \theta_1$ и неизвестной дисперсией $D\xi = \theta_2^2$ (то есть распределение $N(\theta_1, \theta_2)$). Построим доверительные интервалы для неизвестных параметров $\theta_1$ и $\theta_2^2$.

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

Поскольку доверительный интервал для параметра $\theta_2^2$ $\left(\frac{ns^2}{\varepsilon_2^\gamma}, \frac{ns^2}{\varepsilon_1^\gamma}\right)$, построенный в примере 2, не содержит неизвестного параметра $\theta_1$, то его можно использовать и в данном случае.

Доверительный интервал для параметра $\theta_1$ $\left(x - \varepsilon_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, x + \varepsilon_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ содержит неизвестное в данном случае среднее квадратическое отклонение $\sigma = \sqrt{D\xi}$, поэтому сейчас мы его использовать не можем. Для построения доверительного интервала для параметра $\theta_1$ воспользуемся теоремой о распределении выборочных характеристик нормальной совокупности. По этой теореме случайная величина $\frac{x - \theta_1}{S}\sqrt{n-1}$ имеет распределение Стьюдента с числом степеней свободы $n-1$ (распределение $St_{n-1}$). Следовательно, по заданному уровню доверия $\gamma$ по таблицам распределения Стьюдента можно найти такое число $t_\gamma$, для которого выполняется равенство $P\left\{\left|\frac{\bar{x} - \theta_1}{s}\sqrt{n-1}\right| < t_\gamma\right\} = \gamma$. Проведя преобразования, аналогичные преобразованиям примера 1, получим равенство

$$P\left\{\bar{x} - \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n-1}} < \theta_1 < \bar{x} + \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n-1}}\right\} = \gamma.$$

Данное равенство означает, что интервал со случайными границами $\left(\bar{x} - \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n-1}}, \bar{x} + \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n-1}}\right)$ является доверительным интервалом для параметра $\theta_1$ с уровнем доверия $\gamma$.

### *ТЕМА 8. Проверка статистических гипотез. Критерий знаков*

Пусть у нас имеется гипотеза $H_0$ о природе некоторого явления, которую мы по каким-то причинам выделяем и называем основной, противопоставляя ее

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

множеству $\{H_\lambda\}$ альтернативных гипотез ($\lambda$ может принимать значения 1, 2, … или вещественные значения, а в принципе пробегать любое множество).

Далее, имеется опыт, результат которого $x$ есть элемент некоторого множества $X$, называемого выборочным пространством. Например, если опыт состоит в пересчете каких-то предметов, то $x$ - неотрицательное целое число, а $X = \{0,\ 1,\ 2, \ldots\}$. Если же опыт состоит в проведении какого-то измерения, то часто естественно считать, что его результат $x$ может быть любым вещественным числом, а $X$ - множество всех вещественных чисел. В случае нескольких измерений $x$ - вектор, а $X$ - многомерное пространство.

Связь между гипотезами $H_\lambda$ и результатом опыта $x$ состоит в следующем. Предполагается, что в $X$ выделен достаточно широкий класс подмножеств $A \subseteq X$ таких, что при любой верной гипотезе $H_\lambda$ определены вероятности $P\{x \in A / H_\lambda\}$, т.е. вероятности того, что результат опыта $x$ попадет в $A$, если на самом деле верна гипотеза $H_\lambda$.

Формально процесс проверки гипотезы $H_0$ состоит в том, что выбирается некоторое множество $S$ (называемое критическим для гипотезы $H_0$) и делается опыт. Если результат опыта $x \in S$, то гипотеза $H_0$ отвергается. Посмотрим, каким условиям должно удовлетворять $S$.

Хорошо было бы, если бы $P\{x \in S / H_0\} = 0$ (тогда бы мы никогда не отвергали верную гипотезу), а $P\{x \in S / H_\lambda\} = 1$ при $\lambda \neq 0$ (тогда мы всегда бы отвергали $H_0$, если на самом деле верна любая из гипотез $H_\lambda$, $\lambda \neq 0$). Однако в практически интересных случаях, для того чтобы $P\{x \in S / H_0\} = 0$, множество $S$ должно быть пустым. Но тогда и $P\{x \in S / H_\lambda\} = 0$ для любого $\lambda$ и вся процедура бесполезна.

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

Поэтому исследователю приходится допускать ненулевые значения $P\{x \in S / H_0\}$. Единственное, что он может сделать, - выбрать заранее «уровень значимости», т.е. некоторое число $\alpha > 0$, и потребовать, чтобы

$$P\{x \in S / H_0\} < \alpha . \qquad (*)$$

Если мы дорожим гипотезой $H_0$ и не хотим ее отвергнуть понапрасну, то $\alpha$ должно быть малым. Каким конкретно – довольно безразлично, поэтому можно уговориться выбирать одно из значений 0,05; 0,01 или 0,001, как обычно и делается.

Итак, сначала назначается $\alpha$, затем выбирается $S$, удовлетворяющее (*), и, наконец делается опыт. Очевидно, что $P\{x \in S / H_0\}$ (обозначаемая через $P\{S / H_0\}$) есть вероятность напрасно отвергнуть $H_0$ (когда она верна). Такая ошибка называется ошибкой первого рода. Из (*) следует, что вероятность ошибки первого рода не превосходит уровня значимости $\alpha$. Если $x \in S$, где $S$ удовлетворяет (*), то говорят: «гипотеза $H_0$ отвергается на уровне значимости $\alpha$».

Если $x \in S$, то, казалось бы, следует сказать «гипотеза $H_0$ принимается». Но каждый статистик знает, что если гипотеза не отвергается одним способом, то, возможно, она будет отвергнута другим, и можно только сказать, что «гипотеза $H_0$ на уровне значимости $\alpha$ не отвергается».

Кроме ошибки первого рода возможна еще ошибка второго рода, которая состоит в том, что гипотеза $H_0$ не отвергается, когда на самом деле она не верна, а верна одна из гипотез $H_\lambda$. Вероятность этой ошибки $\beta(\lambda)$ есть, очевидно,

$$\beta(\lambda) = P\{x \notin S / H_\lambda\} = 1 - P\{x \in S / H_\lambda\} = P\{\bar{S} / H_\lambda\}.$$

Функция $1 - \beta(\lambda) = P\{x \in S / H_\lambda\}$, равная вероятности отвергнуть гипотезу $H_0$, если на самом деле верна гипотеза $H_\lambda$, называется функцией мощности статистического критерия $S$.

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

Пример. Пусть нам известно, что при выпечке сладких булочек по государственному стандарту полагается на 1000 булочек 10000 изюмин. Мы, однако, подозреваем, что изюм мог (по крайней мере, частично) разойтись по непредусмотренным законом каналам, и желаем это проверить. С этой целью мы покупаем одну булочку и пересчитываем в ней изюм. Если изюмин слишком мало, мы укрепляемся в своих подозрениях.

Попробуем формализовать эту процедуру с помощью только что введенных понятий.

Начнем с гипотез $H_0$ и $H_\lambda$. Выберем параметр $\lambda$ следующим образом: $\lambda$ принимает значения на отрезке $[0,1]$ и обозначает долю украденного изюма. Гипотеза $H_0$ отвечает $\lambda = 0$ и означает, что ничего не украдено.

Опыт состоит в том, что мы пересчитываем изюмины в купленной булочке. Выборочное пространство $X$ (множество всех возможных исходов опыта) состоит из чисел $x$=0, 1, 2, …,10000, но нам удобнее считать его состоящим из всех чисел 0, 1, 2, … (считая, что значения $x > 10000$ встречается с нулевой вероятностью).

Вероятности $P\{x = k / H_\lambda\}$ можно вычислить, применяя распределение Пуассона с параметром, равным среднему числу изюмин, приходящихся на одну булочку, т.е. при верной гипотезе $H_\lambda$, пуассоновский параметр есть $\frac{10000(1-\lambda)}{1000} = 10(1-\lambda)$.

Таким образом, $P\{x = k / H_\lambda\} = \frac{[10(1-\lambda)]^k}{k!} e^{-10(1-\lambda)}$.

Перейдем к вопросу о выборе $\alpha$. Вспомним, что $\alpha$ ограничивает сверху вероятность ошибочно отвергнуть нулевую гипотезу, т.е., в нашем случае, ошибочно обвинить невинного человека. Поэтому приемлемо лишь значение $\alpha = 0$, но в этом случае вся функция мощности будет равна 0, т.е. мы не сможем обвинить и виноватого. Эти соображения показывают, что статистические методы

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

вряд ли пригодны для решения вопроса о возбуждении обвинения (тем более, для решения вопроса о виновности). Посмотрим, что же все-таки они могут дать. С этой целью испробуем два значения $\alpha$: $\alpha = 0{,}01$ и $\alpha = 0{,}001$.

Главный вопрос – как выбирать критическое множество $S$. Ясно, что хищение изюма проявится в том, что изюма в булочке будет слишком мало. Иными словами, критическое множество $S$ должно иметь вид $S = \{x : x \le k\}$, где $k$ следует выбирать из условия $P\{S / H_0\} = P\{x \le k / H_0\} \le \alpha$.

Задача о выборе k по заданному $\alpha$ очень легко решается с помощью таблиц распределения Пуассона. При $\alpha = 0{,}01$ имеем $S = \{x : x \le 3\}$, а при $\alpha = 0{,}001$ имеем $S = \{x : x \le 1\}$. Функция мощности дается следующей таблицей:

| Параметр λ (доля украденного изюма) | Функция мощности $P\{x = k / H_\lambda\}$ (вероятность возбуждения обвинения) | | |
|---|---|---|---|
| | $\alpha = 0{,}01$ $S = \{x : x \le 3\}$ | $\alpha = 0{,}001$ $S = \{x : x \le 1\}$ | $\alpha = 0{,}15$ $S = \{x : x \le 6\}$ |
| 0,0 | 0,010 | 0,00050 | 0,13 |
| 0,1 | 0,021 | 0,0013 | |
| 0,2 | 0,042 | 0,0031 | |
| 0,3 | 0,082 | 0,0073 | |
| 0,4 | 0,15 | 0,017 | |
| 0,5 | 0,27 | 0,041 | 0,76 |
| 0,6 | 0,43 | 0,092 | |
| 0,7 | 0,65 | 0,2 | |
| 0,8 | 0,86 | 0,41 | |
| 0,9 | 0,98 | 0,74 | |
| 1,0 | 1 | 1 | 1 |

Из таблицы видно, в частности, что если вероятность ложного обвинения ограничить сверху числом 0,001, то она на самом деле буде равна 0,00050. При этом того, кто украл половину изюма ($\lambda = 0{,}5$), мы обвиним с вероятностью 0,041.

Нельзя ли все же извлечь из статистики некоторую пользу? Договоримся решать вопрос об обвинении не при помощи статистики, а при помощи прямого наблюдения. Но в таком случае, если допустить, что 80% всех работников честны и лишь 20% нечестны, то 80% рабочего времени «наблюдателя» будет потеряно

Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского

впустую. Будем теперь проверять нашу гипотезу $H_0$ на совершенно ином уровне значимости $\alpha = 0{,}15$, договорившись, что отбрасывание гипотезы не означает возбуждение обвинения, а лишь установление в соответствующем месте наблюдения. Как видно из таблицы, вероятность ошибки первого рода, т.е. напрасной посылки «наблюдателя» есть 0,13 и, таким образом, лишь 0,13·0,80=10,4% рабочего времени «наблюдателя» будет потеряно впустую. С другой стороны, если $\lambda = 0{,}5$, то вероятность посылки наблюдателя и тем самым обнаружения хищения (при его обнаружении в следующий раз) равна 0,76, что вполне удовлетворительно.

Рассмотренное положение вообще характерно для применения статистических методов: не решая до конца научной или технической задачи, они позволяют ценой сравнительно небольших расходов наметить объект или план углубленного научного исследования. Таким образом, мы убедились в справедливости афоризма «статистике часто принадлежит первое слово, но никогда последнее».

Для проверки гипотез существуют различные критерии. Рассмотрим наиболее употребительные из них.

<u>Критерий знаков.</u> Рассмотрим следующую ситуацию. Пусть на предприятии измерили значения некоторых экономических критериев и получили следующую выборку: X=(9, 11, 10, 8, 15, 13, 10, 12, 14, 9) (числа совершенно условные). Затем внедрили некоторое новшество и через какое-то время, опять измерили те же показатели, получив выборку Y=(11, 12, 11, 10, 17, 15, 11, 15, 17, 11). Возникает вопрос: подействовало новшество или нет. С точки зрения математической статистики необходимо выяснить, являются ли генеральные совокупности $\xi$ и $\eta$, из которых получены данные выборки X и Y однородными, то есть, выполняется ли равенство $F_\xi = F_\eta$? В нашем случае, скорее всего, $\xi$ и $\eta$ не однородны, то есть новшество подействовало. Действительно, если обозначить $X = (x_1, ..., x_i, ..., x_n)$,

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

$Y=(y_1,...,y_i,...,y_n)$, то видно, что в нашем примере выполняется условие $\forall i=1,...10 \quad y_i > x_i$. Конечно, это может быть случайностью. Но при верной гипотезе $H_0$ ($F_\xi = F_\eta$) справедливо равенство $P(x_i < y_i) = P(x_i > y_i) = \frac{1}{2}$ (считаем, что равенство $y_i = x_i$ невозможно). Поэтому вероятность того, что все 10 разностей $y_i - x_i$ положительны (при однородности выборок) в нашем примере равна $\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}$. Таким образом, если мы отвергаем гипотезу $H_0$ и посчитаем что выборки неоднородны, то есть новшество подействовало, то вероятность ошибки первого рода будет равна $\frac{1}{1024} < 0{,}001$, что вполне допустимо.

Теперь рассмотрим критерий знаков подробнее. Пусть $\xi$ и $\eta$ - две генеральные совокупности. Основная гипотеза $H_0$ состоит в том, что $F_\xi = F_\eta$ (совокупности однородны). Альтернативная гипотеза $H_1$ состоит в том, что $F_\xi \neq F_\eta$ (совокупности неоднородны). Для проверки данной гипотезы проводят эксперимент, в результате которого получают выборку $X=(x_1,...,x_i,...,x_n)$ объема $n$ из первой генеральной совокупности и выборку того же объема $Y=(y_1,...,y_i,...,y_n)$ из второй генеральной совокупности. На их основе строится выборка $Z=(z_1,...,z_i,...,z_n)$, где при всех $\forall i=1,...n \quad z_i = y_i - x_i$. Считаем, что равенство $y_i = x_i$ невозможно (этого можно добиться увеличением точности измерений или исключением нулевых разностей). Тогда при верной гипотезе $H_0$ справедливо равенство $P\{z_i > 0\} = P\{z_i < 0\} = \frac{1}{2}$. Пусть $T(X,Y)$ - количество положительных разностей. При верной гипотезе $H_0$ $T(X,Y)$ имеет распределение Бернулли с параметрами $n, \frac{1}{2}$. Следовательно, при всех $m=0,...,n$ выполняется

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

равенство $P\{T(X,Y)=m\}=C_n^m\left(\frac{1}{2}\right)^m\left(\frac{1}{2}\right)^{n-m}=C_n^m\left(\frac{1}{2}\right)^n$, и при $0\le m_1\le m_2\le n$ справедливы соотношения $P\{T(X,Y)<m_1|H_0\}=\sum_{m=0}^{m_1-1}P\{T(X,Y)=m\}=\left(\sum_{m=0}^{m_1-1}C_n^m\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n$,

$P\{T(X,Y)>m_2|H_0\}=\sum_{m=m_2+1}^{n}P\{T(X,Y)=m\}=\left(\sum_{m=m_2+1}^{n}C_n^m\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Следовательно, для любого уровня значимости $\alpha$ и объема выборки $n$ можно найти (по таблицам распределения Бернулли) такие числа $m_1^\alpha$ и $m_2^\alpha$, для которых выполняются неравенства $P\{T(X,Y)<m_1^\alpha|H_0\}\le\frac{\alpha}{2}$, $P\{T(X,Y)>m_2^\alpha|H_0\}\le\frac{\alpha}{2}$. (**)

Тогда будет справедливо соотношение $P\{m_1^\alpha\le T(X,Y)\le m_2^\alpha|H_0\}\ge 1-\alpha$.

Таким образом, проверка гипотезы об однородности двух генеральных совокупностей с помощью критерия знаков производится следующим образом. Назначается уровень значимости $\alpha$, и находятся числа $m_1^\alpha$ и $m_2^\alpha$, удовлетворяющие условиям (**). В результате эксперимента получают выборки *X*, *Y* и вычисляют $T(X,Y)$. Если выполняется одно из неравенств $T(X,Y)<m_1^\alpha$ или $T(X,Y)>m_2^\alpha$, то гипотеза $H_0$ отвергается на уровне значимости $\alpha$. Если же справедливо неравенство $m_1^\alpha\le T(X,Y)\le m_2^\alpha$, то гипотеза $H_0$ не отвергается на уровне значимости $\alpha$ (но может быть отвергнута на некотором другом уровне значимости).

<u>Замечание.</u> Таким образом, гипотеза об однородности отвергается, если положительных разностей или слишком много, или слишком мало. Например, при $n=50$ верны равенства $m_1^\alpha=18$ $m_2^\alpha=32$.

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

***ТЕМА 9. Критерии Пирсона, Смирнова, Колмогорова***

В прошлой теме были введены основные понятия теории проверки гипотез и рассмотрен критерий знаков проверки однородности генеральных совокупностей. Сейчас мы рассмотрим еще несколько критериев, а именно критерии Пирсона, Смирнова и Колмогорова.

Критерий Пирсона (критерий хи-квадрат). Пусть имеется генеральная совокупность $\xi$, распределение которой неизвестно. Относительно распределения данной генеральной совокупности выдвигаются две гипотезы: основная $H_0$ и альтернативная $H_1$. Основная гипотеза $H_0$ состоит в том, что распределение $\xi$ задается данной функцией распределения $F$, то есть $F_\xi = F$. Альтернативная гипотеза $H_1$ состоит в том, что $F_\xi \neq F$. Для проверки данной гипотезы множество $R$ разбивают на $l$ непересекающихся отрезков $(-\infty, z_1), [z_1, z_2), ..., [z_{k-1}, z_k), ..., [z_{l-1}, \infty)$. Для единообразия обозначим $z_0 = -\infty$, $z_l = +\infty$. Подсчитаем вероятности попаданий значений случайной величины $\xi$ в отрезок $[z_{k-1}, z_k)$, $k = 1,...,l$ при верной гипотезе $H_0$. Имеем, $p_k = P\{\xi \in [z_{k-1}, z_k) | H_0\} = F_\xi(z_k) - F_\xi(z_{k-1})$, $k = 1,...,l$. Затем проведем эксперимент, получим в результате данного эксперимента выборку $X = (x_1,...,x_i,...,x_n)$ и подсчитаем частоты $\nu_k$ попаданий выборочных значений в интервал $[z_{k-1}, z_k)$, $k = 1,...,l$. Эти частоты вычисляются по формуле $\nu_k = \dfrac{m_k}{n}$, где $m_k$ - количество попаданий выборочных значений в интервал $[z_{k-1}, z_k)$, $k = 1,...,l$. При верной гипотезе $H_0$ частоты $\nu_k$ должны быть «близки» к вероятностям $p_k$. Для оценки меры этой близости построим величину $T(X) = \sum_{k=1}^{l} c_k (\nu_k - p_k)^2 = \sum_{k=1}^{l} c_k \left( \dfrac{m_k}{n} - p_k \right)^2$. Если положить $c_k = \dfrac{n}{p_k}$, $k = 1,...l$, то получим: $T(X) = \sum_{k=1}^{l} \dfrac{n}{p_k} (\dfrac{m_k}{n} - p_k)^2 = \sum_{k=1}^{l} \dfrac{(m_k - np_k)^2}{np_k}$. Выбор именно таких значений

Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского

$c_k$, $k=1,...l$, объясняется следующей теоремой, которую мы примем без доказательства.

Теорема Пирсона. Если верна гипотеза $H_0$ и объем выборки стремится к $\infty$, то распределение $T(X)=\sum_{k=1}^{l}\frac{(m_k-np_k)^2}{np_k}$ сходится к хи-квадрат с числом степеней свободы $l-1$ ($\chi^2_{l-1}$).

Проверка гипотезы по критерию Пирсона производится следующим образом. Строятся интервалы $[z_{k-1},z_k)$, $k=1,...,l$ и вычисляются теоретические вероятности $p_k$ попадания значений случайной величины $\xi$ в данные интервалы. Задается уровень значимости $\alpha$ и по таблицам распределения $\chi^2$ находится такое число $m_\alpha$, для которого выполняется неравенство $P\{T(X)>m_\alpha|H_0\}\le\alpha$. Затем проводится опыт, получают выборку $X=(x_1,...,x_i,...,x_n)$ и вычисляют $m_k$, $k=1,...,l$ и $T(X)=\sum_{k=1}^{l}\frac{(m_k-np_k)^2}{np_k}$. Если выполняется неравенство $T(X)>m_\alpha$, то гипотеза $H_0$ отвергается на уровне значимости $\alpha$ (так как произошло событие, вероятность которого при верной гипотезе $H_0$ очень мала). Если же справедливо соотношение $T(X)\le m_\alpha$, то гипотеза $H_0$ не отвергается на уровне значимости $\alpha$ (но может быть отвергнута на некотором другом уровне значимости).

Критерий Колмогорова. Перед рассмотрением данного критерия нам понадобится ввести следующее определение.

Определение. Пусть $X=(x_1,...,x_i,...,x_n)$ - выборка объема $n$ из генеральной совокупности $\xi$. Эмпирическая функция распределения обозначается $F_n^*(x)$ и равна отношению $m_x$ - количества выборочных значений, меньших $x$, к объему выборки, то есть $F_n^*(x)=\frac{m_x}{n}$.

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

Замечание. Эмпирическая функция распределения совпадает с функцией распределения случайной величины $\eta$, распределение которой задается таблицей

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} \eta & x_1 & \dots & x_i & \dots & x_n \\ \hline p & p_1 & \dots & p_i & \dots & p_n \end{array}.$$

Эмпирическая функция распределения стремится с увеличением числа опытов к функции распределения генеральной совокупности $\xi$.

Теперь перейдем непосредственно к рассмотрению критерия Колмогорова. Основной гипотезой $H_0$ здесь, как и в критерии Пирсона, является предположение, что функцией распределения генеральной совокупности является заданная функция распределения $F$, только здесь на $F$ накладывается требование непрерывности. Альтернативная гипотеза $H_1$ состоит в том, что $F_1 \neq F$. Для проверки данной гипотезы проводится эксперимент, результатом которого является выборка $X = (x_1,...,x_i,...,x_n)$ объема $n$ и вычисляется $T(X) = \sqrt{n}\sup_x \left|F(x) - F_n^*(x)\right|$. Критерий Колмогорова опирается на следующую теорему, которую мы сформулируем без доказательства.

Теорема Колмогорова. Если верно равенство $F_\xi = F$ и $F$ - непрерывна, то для любого $x \geq 0$ справедливо соотношение $\lim_{n\to\infty} P\left\{\sqrt{n}\sup_x \left|F(x) - F_n^*(x)\right| < x\right\} = K(x)$, где $K(x)$ - функция Колмогорова, определяемая равенством $K(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m e^{-2m^2x^2}$.

Проверка гипотезы по критерию Колмогорова производится следующим образом. Задается уровень значимости $\alpha$ и по таблицам критерия Колмогорова находится число $m_\alpha$, удовлетворяющее условию $P\left\{T(X) > m_\alpha \middle| H_0\right\} \leq \alpha$. Затем проводят опыт, получают выборку $X = (x_1,...,x_i,...,x_n)$ и вычисляют $F_n^*(x)$ и $T(X) = \sqrt{n}\sup_x \left|F(x) - F_n^*(x)\right|$. Если выполняется неравенство $T(X) > m_\alpha$, то гипотеза $H_0$ отвергается на уровне значимости $\alpha$ (так как произошло событие,

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

маловероятное при верной гипотезе $H_0$). Если же справедливо соотношение $T(X) \le m_\alpha$, то гипотеза $H_0$ не отвергается на уровне значимости $\alpha$.

Замечание. Если верна гипотеза $H_1$ и $F_\xi = F_1 \ne F$, то верно равенство $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_x \left|F_1(x) - F_n^*(x)\right| = 0$ с вероятностью 1, и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_x \left|F(x) - F_n^*(x)\right| > 0$ с вероятностью 1. Таким образом, с вероятностью 1 в данном случае $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\sup\limits_x \left|F(x) - F_n^*(x)\right| = \infty$. Это означает, что при любом уровне значимости мощность критерия Колмогорова стремится к 1, когда объем выборки неограниченно увеличивается.

Критерий Смирнова. В данном случае имеются две независимые генеральные совокупности $\xi$ и $\eta$. Основная гипотеза $H_0$ состоит в том, что $F_\xi = F_\eta$; альтернативная гипотеза $H_1$ состоит в том, что $F_\xi \ne F_\eta$. Предполагается что $F_\xi$ и $F_\eta$ непрерывны. Для проверки гипотезы в результате эксперимента получают выборку $X = (x_1,...,x_i,...,x_n)$ объема $n$ из первой генеральной совокупности и выборку $Y = (y_1,...,y_j,...,y_m)$ объема $m$ из второй генеральной совокупности. Затем вычисляют $F_n^*(x)$ и $G_m^*(x)$ и определяют $T(X,Y)$ равенством $T(X,Y) = \sqrt{\dfrac{nm}{n+m}}\sup\limits_x \left|F_n^*(x) - G_m^*(x)\right|$. Критерий Смирнова основан на следующей теореме, которую мы сформулируем без доказательства.

Теорема Смирнова. Если $F_\xi = F_\eta = F$, $F$ - непрерывна и выполняется равенство $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \dfrac{m}{n} = \tau$, $0 < \tau < \infty$, то при всех $x \ge 0$ справедливо соотношение $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} P\left\{\sqrt{\dfrac{mn}{m+n}}\sup\limits_x \left|F_n^*(x) - F_m^*(x)\right| < x\right\} = K(x)$, где $K(x)$ - функция Колмогорова.

Проверка гипотезы по критерию Смирнова осуществляется следующим образом. Задается уровень значимости $\alpha$ и по таблицам распределения

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

Колмогорова находится такое число $m_\alpha$, для которого выполняется равенство $P\{T(X,Y) > m_\alpha | H_0\} \le \alpha$. Затем проводится опыт, получаются выборки $X$ и $Y$ и вычисляется $T(X,Y) = \sqrt{\frac{nm}{n+m}} \sup_x |F_n^*(x) - G_m^*(x)|$. Если справедливо соотношение $T(X,Y) > m_\alpha$, то гипотеза $H_0$ отвергается на уровне значимости $\alpha$. Если же справедливо соотношение $T(X,Y) \le m_\alpha$, то гипотеза $H_0$ не отвергается на уровне значимости $\alpha$.

Замечание. При неограниченном возрастании объема выборок мощность критерия Смирнова стремится к 1.

***Контрольные вопросы***

1) Как определяется доверительный интервал для неизвестного параметра?

2) Как строится доверительный интервал для параметра $\theta_1$, если генеральная совокупность $\xi$ имеет нормальное распределение $N(\theta_1, \sigma)$?

3) Чему равна длина доверительного интервала для параметра $\theta_1$, если генеральная совокупность $\xi$ имеет нормальное распределение $N(\theta_1, \sigma)$?

4) Как строится доверительный интервал для параметра $\theta_2^2$, если генеральная совокупность $\xi$ имеет распределение $N(a, \theta_2)$?

5) Как строится доверительный интервал для параметра $\theta_1$, если генеральная совокупность $\xi$ имеет нормальное распределение $N(\theta_1, \theta_2)$?

6) Как строится доверительный интервал для параметра $\theta_2^2$, если генеральная совокупность $\xi$ имеет распределение $N(\theta_1, \theta_2)$?

7) Можно ли доверительный интервал, построенный для $\theta_1$ при $\xi \sim N(\theta_1, \sigma)$ использовать для оценивания $\theta_1$ при $\xi \sim N(\theta_1, \theta_2)$? Почему?

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

8) Можно ли доверительный интервал, построенный для $\theta_2^2$ при $\xi \sim N(a,\theta_2)$ использовать для оценивания $\theta_2^2$ при $\xi \sim N(\theta_1,\theta_2)$? Почему?

9) Какому условию должно удовлетворять критическое множество $S_\alpha$, построенное для проверки основной гипотезы $H_0$ для уровня значимости $\alpha$?

10) Как определяется и интерпретируется ошибка первого рода?

11) Как определяется и интерпретируется ошибка второго рода?

12) Как определяется и интерпретируется мощность критерия?

13) Какое распределение используется для нахождения «порогов» $m_1^\alpha$, $m_2^\alpha$ в критерии знаков?

14) Как строится $T(X)$ в критерии Пирсона?

15) Какое распределение используется для нахождения «порога» $m_\alpha$ в критерии Пирсона?

16) Как определяется эмпирическая функция распределения?

17) Как строится $T(X)$ в критерии Колмогорова?

18) Какое распределение используется для нахождения «порога» $m_\alpha$ в критерии Колмогорова?

19) Как строится $T(X,Y)$ в критерии Смирнова?

20) Какое распределение используется для нахождения «порога» $m_\alpha$ в критерии Смирнова?

***Тестовые задания***

1) При построении доверительного интервала для параметра $\theta_1$ при $\xi \sim N(\theta_1,\sigma)$ используется утверждение:

а) $x$, $s^2$ независимы; б) $x \in N\left(a, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$; в) $\frac{ns^2}{\sigma^2} \in \chi^2_{n-1}$; г) $\frac{x-a}{s}\sqrt{n-1} \in St_{n-1}$.

2) Доверительный интервал для параметра $\theta_1$ при $\xi \sim N(\theta_1,\theta_2)$ имеет вид:

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

а) $\left(\bar{x}-\varepsilon_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x}+\varepsilon_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$; б) $\left(\bar{x}-t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x}+t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$;

в) $\left(\bar{x}-\varepsilon_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n-1}}, \bar{x}+\varepsilon_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n-1}}\right)$; г) $\left(\bar{x}-t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n-1}}, \bar{x}+t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n-1}}\right)$.

3) При построении доверительного интервала для параметра $\theta_1$ при $\xi \sim N(\theta_1, \theta_2)$ используются таблицы распределения:

а) Колмогорова; б) Стьюдента; в) нормального; г) хи-квадрат.

4) Вероятность ошибки первого рода при основной гипотезе $H_0$, семействе альтернативных гипотез $\{H_\lambda\}_{\lambda \neq 0}$, уровне значимости $\alpha$, результате эксперимента $X$ и критическом множестве $S_\alpha$ определяется равенством:

а) $P\{x \in S_\alpha / H_\lambda, \lambda \neq 0\}$; б) $P\{x \notin S_\alpha / H_\lambda, \lambda \neq 0\}$;

в) $P\{x \in S_\alpha / H_0\}$; г). $P\{x \notin S_\alpha / H_0\}$

5) При проверке гипотезы с помощью критерия знаков используются таблицы распределения: а) Колмогорова; б) нормального; в) Бернулли; г) Стьюдента.

6) Если гипотеза проверяется с помощью критерия Колмогорова, $X = (x_1, ..., x_i, ..., x_n)$ - выборка объема $n$, то $T(X)$ вычисляется по формуле: а)

$T(X) = \sqrt{n} \sup_x \left|F(x) - F_n^*(x)\right|$; б) $T(X) = \sum_{k=1}^{l} \frac{(m_k - np_k)^2}{np_k}$; в)

$T(X) = \sqrt{\frac{nm}{n+m}} \sup_x \left|F_n^*(x) - G_m^*(x)\right|$; г) другое.

7) При выполнении теоремы Пирсона случайная величина $T(X) = \sum_{k=1}^{l} \frac{(m_k - np_k)^2}{np_k}$ в пределе имеет распределение а) нормальное б) Колмогорова; в) Стьюдента; г) хи-квадрат;.

8) Случайная величина $T(X) = \sum_{k=1}^{l} \frac{(m_k - np_k)^2}{np_k}$ используется при проверке гипотез по критерию а) Пирсона; б) Смирнова; в) Колмогорова; г) знаков.

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

9) При проверке гипотезы по критерию знаков основная гипотеза $H_0$ состоит в том, что а) $F_\xi = F$; б) $F_\xi \neq F$; в) $F_\xi = F_\eta$; г) $F_\xi \neq F_\eta$.

10) При проверке гипотезы по критерию Пирсона альтернативная гипотеза $H_1$ состоит в том, что а) $F_\xi = F$; б) $F_\xi \neq F$; в) $F_\xi = F_\eta$; г) $F_\xi \neq F_\eta$.

***Ответы***

| 1) | 2) | 3) | 4) | 5) | 6) | 7) | 8) | 9) | 10) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| б | г | б | в | в | а | г | а | в | б |

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

***Список рекомендуемой литературы***

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: учебник для студентов вузов. - М.: Издательский центр «Академия»., 2003.

2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: Высш. шк., 2003.

3. Севастьянов Б.А. Курс теории вероятностей и математической статистики - М, Наука 2004. 272 с.

4. Ширяев А. Н. Вероятность, В 2-х тт. Т.1,2, изд.4, доп. и перераб. - М., Наука, 2007. Твердый переплет. 928 с.

5. Боровков А.А.Теория вероятностей. Изд.5. М.: Физматлит, 2009. 656 с.

6. Боровков А.А. Математическая статистика. 3-е изд., испр. М.: Физматлит, 2007. – 703 с.

7. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций (под ред. Свешникова А. А.). Изд.4, перераб. Твердый переплет. 448 с. - М.:Наука, 2008

8. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. - М.: Высш. шк., 2004.

9. Гихман И.И., Скороход А.Б., Ядренко М.И. Теория вероятностей и математическая статистика.- Киев, “Вища школа”, 1979.

10. Пугачев В.С. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: Наука, 1979.

11. Александров Е.Л. и др. Сборник задач по теории вероятностей с методическими указаниями - СГУ, Саратов, 1987.

12. Александров Е.Л. Сборник задач по математической статистике. - СГУ, Саратов, 1992.

13. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения - том 1, М. , Мир,

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

1964.

14. Секей Г. Парадоксы теории вероятностей и математической статистики, -М., Мир, 1990.

15. Ивченко Г.И. Математическая статистика. - М.,"Высшая школа", 1984.

16. Израйлевич В. Л. и др. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике, часть 1, СГУ, Саратов, 1982.

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского