Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

Н. С. Анофрикова

# *Колебания упругих стержней. Часть 1*

*Учебное пособие для студентов механико-математического факультета Саратовского государственного университета*

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

Саратов, 2014

**Анофрикова Н. С.**
Колебания упругих стержней. Часть 1: Учеб. пособие для студентов механико-математического факультета СГУ. [Электронный ресурс]- Саратов : [б. и.], 2014. - 45 с.

В пособии рассмотрены вопросы построения и исследования математических моделей при решении задач о продольных колебаниях упругих однородных стержней постоянного сечения. Приводится вывод одномерных уравнений свободных и вынужденных продольных колебаний стержней, постановка основных краевых задач. Для решения поставленных задач применяются методы математической физики. Пособие содержит вопросы для самоконтроля и задачи для самостоятельного решения.

Для студентов, обучающихся по направлению подготовки «Механика и математическое моделирование».

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

Работа издана в авторской редакции

# ВВЕДЕНИЕ

Говоря о колебаниях, мы имеем в виду движения, явления, процессы, обладающие свойством хотя бы приблизительной повторяемости во времени. Объект той или иной физической природы, в котором реализуется колебательный процесс, называют колебательной системой.

Можно было бы привести множество примеров, иллюстрирующих важность колебательных явлений в технических устройствах. В одних случаях колебания вредны (именно эти случаи впервые привлекли внимание инженеров к проблемам теории колебаний), в других случаях они приносят пользу и целенаправленно применяются в современной технике.

Большинство современных технических сооружений, различных приборов, инструментов, различных механизмов представляют собой сложные системы, основу которых представляют колебательные конструкции, скомпонованные из стержневых и тонкостенных элементов, изготовленных из материалов, которые в пределах достаточно малых деформаций могут рассматриваться как упругие.

При различных воздействиях на данные конструкции, например ударом, в них могут возникнуть так называемые свободные колебания. Под свободными колебаниями понимают периодические упругие колебания элементов конструкции, возникающие после внешнего однократного толчка и протекающие в изолированной системе. В этом случае характер колебаний определяется только внутренним строением системы, зависящим от ее массы, характеристик демпфирования и упругости. Кроме того, в колебательной системе могут возникать вынужденные колебания, т.е. периодические колебания элементов конструкции, возникающие под воздействием внешней силы и поддерживаемые ею. Характер таких колебаний определяется как внешней силой, так и физическими параметрами самой системы.

Если колебательные смещения частиц стержня направлены вдоль его оси, то говорят о продольных колебаниях.

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

Одной из основных задач теории колебаний упругих систем является конструирование модели колебательной системы, основанное на правильной идеализации реального процесса. Второй, не менее важной задачей, является исследование уже построенной математической модели явления. При этом важным этапом исследования динамического поведения системы является определение динамических характеристик, входящих в ее состав упругих стержневых элементов. К числу таких характеристик можно отнести собственные частоты и собственные формы колебаний, амплитудно-фазовые частотные характеристики и т.д.

Под стержнем в теории колебании, понимается тело, длина которого значительно превышает его поперечные размеры.

В настоящем пособии рассмотрены вопросы моделирования малых продольных колебаний упругих стержней.

В первом разделе выведены уравнения свободных и вынужденных продольных колебаний. При выводе уравнений принята гипотеза плоских сечений.

Второй раздел посвящен постановке задач о продольных колебаниях конечных стержней. Рассмотрены четыре вида граничных условий, получаемых в зависимости от способа закрепления конца стержня.

Поскольку во многих задачах о свободных и вынужденных колебаниях упругих стержней постоянного сечения при равномерном распределении массы по длине может быть получено точное аналитическое решение, то в качестве метода решения задач о продольных колебаниях предложен метод Фурье (метод разделения переменных).

В третьем разделе показано применение этого метода к решению уравнения свободных колебаний.

В четвертом и седьмом разделах решены модельные задачи о свободных колебаниях стержня, один конец которого закреплен, а другой свободен, и о вынужденных колебаниях стержня один конец которого жестко закреплен, а к другому приложена переменная по времени сила. Для каждого случая найдены

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

собственные частоты и собственные формы колебаний, а также выражения для перемещений точек поперечных сечений стержня.

Показано, что любое колебание стержня можно представить как сумму простейших синусоидальных его собственных колебаний того или иного вида, частоты которых зависят от длины стержня, плотности материала, от упругого сопротивления его по отношению к данному типу деформаций, а также от условий закрепления его концов.

В пятом разделе найдены выражения для частот и форм свободных колебаний для других случаев закрепления концов стержня.

Шестой раздел посвящен исследованию свободных колебаний стержня, один конец которого жестко заделан, а ко второму концу прикреплен груз.

В конце пособия приведены контрольные вопросы, позволяющие оценить качество освоения теоретического материала, а также предложены задачи для самостоятельного решения, которые помогут обучающимся научиться применять полученные знания на практике, тем самым будут способствовать лучшему пониманию и усвоению материала. Все задачи снабжены ответами, а некоторые – краткими указаниями к решению.

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

# 1. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ

Во многих конструкциях встречаются тела, некоторые размеры которых малы по сравнению с другими их размерами (например, стержни, пластины, оболочки). В общем случае тело называется стержнем, если один из его характерных размеров (длина) много больше двух других характерных размеров (размеров поперечного сечения). Сечениями стержня могут быть любые плоские фигуры. Осью стержня называется линия, соединяющая центры тяжести его поперечных сечений. Если кривизна оси стержня отлична от нуля, то стержень называется криволинейным. В противном случае – прямолинейным.

Рассмотрим сплошной цилиндр с радиусом основания $R$ и длиной $l$. Если $R << l$, то цилиндр называют стержнем длиной $l$ с круговым поперечным сечением (рис.1).

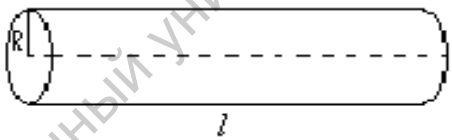


Рис. 1

Ось стержня совпадает с осью цилиндра. Она представляет собой отрезок прямой, поэтому рассматриваемый стержень будет прямолинейным. Рассмотрим однородный прямолинейный стержень постоянного поперечного сечения. Направим ось $x$ по оси стержня (рис. 2). Тогда поперечное сечение будет параллельно координатной плоскости $Oyz$. Предположим, что при продольной деформации стержня выполняется следующая гипотеза.

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

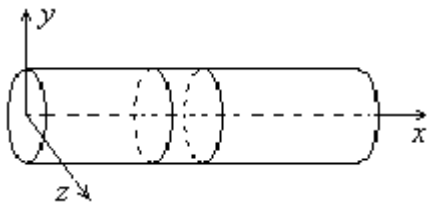


Рис.2

*Гипотеза.* Все точки поперечного сечения стержня смещаются в направлении оси стержня на одинаковую величину $u$ (рис. 2).

То есть поперечные сечения стержня, перемещаясь вдоль оси стержня, остаются плоскими и параллельными друг другу. Подобное допущение оправдано, если поперечные размеры стержня значительно меньше его длины.

Из сделанного предположения следует, что перемещения точек стержня не зависят от координат $y, z$ и являются функциями только координаты $x$ и времени $t$: $u = u(x,t)$. Это означает, что для определения перемещений точек стержня достаточно определить перемещения точек оси стержня, так как перемещение любой точки стержня совпадает с перемещением точки оси стержня, лежащей в том же сечении.

Если несколько растянуть или сжать стержень вдоль продольной оси, а затем предоставить самому себе, то в нем возникнут свободные продольные колебания. Будем считать, что в состоянии покоя концы стержня находятся в точках $x = 0$ и $x = l$. Рассмотрим бесконечно малый элемент стержня длиной $dx$, расположенный на расстоянии $x$ от левого конца. Если $u(x,t)$ смещение сечения с абсциссой $x$ в момент времени $t$, то смещение сечения с абсциссой $x + dx$ будет равно $u(x,t) + \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} dx$. Следовательно, относительное удлинение стержня в сечении с абсциссой $x$ выражается производной $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$.

Предположим, что стержень совершает малые колебания. Тогда на элемент стержня действуют силы, показанные на рисунке 3.

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

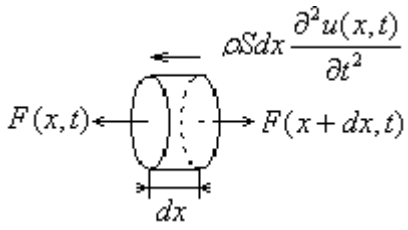


Рис. 3

Здесь $F(x,t)$ - направленная вдоль оси равнодействующая внутренних напряжений, возникающих в поперечном сечении с координатой $x$. Предположим, что материал стержня однородный и подчиняется закону Гука. Следовательно, продольную силу $F(x,t)$ можно выразить через продольное напряжение $\sigma(x,t)$ и, далее, через осевую деформацию $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$:

$$F(x,t) = S\sigma(x,t) = SE\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, \tag{1}$$

где $S$ - площадь поперечного сечения стержня, $E$ - модуль упругости материала стержня (модуль Юнга). Тогда

$$F(x+dx,t) = F(x,t) + \frac{\partial F(x,t)}{\partial x}dx = SE\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}dx\right). \tag{2}$$

Кроме того на элемент $dx$ действует инерционная нагрузка, равная произведению массы элемента $m$ на ускорение $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$ или

$$m\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \rho S dx\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}. \tag{3}$$

Согласно принципу Даламбера

$$F(x+dx,t) - F(x,t) - m\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0. \tag{4}$$

С учетом (1), (2), (3) уравнение (4) примет вид:

$$SE\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}dx - \rho S dx\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0. \tag{5}$$

Положив

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

$$a = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{6}$$

и сократив на $Sdx$, после преобразований получим

$$a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}. \tag{7}$$

Уравнение (7) называют уравнением свободных продольных колебаний стержня. Форма уравнения показывает, что продольные колебания стержня носят волновой характер, причем скорость $a$ распространения продольных волн определяется формулой (6).

Если на стержень действует еще внешняя сила $g(x,t)$, рассчитанная на единицу объема, то вместо уравнения (5) получим

$$SE \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} dx + g(x,t) Sdx = \rho Sdx \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2},$$

откуда

$$a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \frac{g(x,t)}{\rho} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}. \tag{8}$$

Это уравнение вынужденных продольных колебаний стержня под действием внешней распределенной нагрузки $g(x,t)$.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ СТЕРЖНЯ

Одного уравнения движения (7) или (8) не достаточно для полного определения движения стержня. Нужно задать начальные условия, то есть задать смещения сечений стержня и их скорости $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ в начальный момент времени

$$u(x,0) = f_1(x), \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = f_2(x), \tag{9}$$

где $f_1(x)$, $f_2(x)$- заданные функции на интервале $(0,l)$.

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

Кроме того, в случае стержня конечной длины, надо задать граничные условия на его концах.

Рассмотрим разные варианты граничных условий на конце стержня, который будем обозначать координатой $x_k$ (рис. 4):

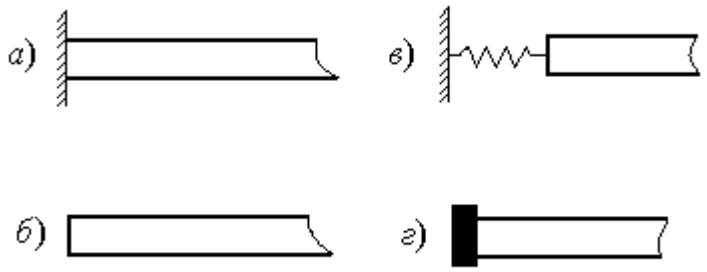


Рис. 4

1) если конец закреплен (рис. 4$a$), то перемещение его равно нулю, т.е.

$$u(x_k,t)=0 \tag{10}$$

в любой момент времени $t$;

2) если конец свободен (рис. 4б), то усилие $F(x,t)$ на этом конце равно нулю (нет внешних сил), т.е. $F(x_k,t)=0$ в любой момент времени $t$, а, следовательно, учитывая (1),

$$\frac{\partial u(x_k,t)}{\partial x}=0; \tag{11}$$

3) если конец стержня соединен с неподвижной опорой пружиной с жесткостью $c_k$ (упругое закрепление конца) (рис. 4$в$), то сила, передаваемая пружиной концу стержня при его колебаниях, будет равна $\pm c_k u(x_k,t)$. Тогда граничное условие на этом конце примет вид

$$SE\frac{\partial u(x_k,t)}{\partial x}=\pm c_k u(x_k,t) \tag{12}$$

(знак «+» - для левого конца стержня, «-» - для правого конца);

4) если к концу стержня прикреплен груз массой $m_g$ (случай сосредоточенной массы) (рис. 4$г$), то сила, передаваемая от

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

сосредоточенной массы к концу стержня при колебаниях равна $\pm m_g \dfrac{\partial^2 u(x_k,t)}{\partial t^2}$. Т.е. граничное условие на этом конце имеет вид

$$SE\frac{\partial u(x_k,t)}{\partial x} = \pm m_g \frac{\partial^2 u(x_k,t)}{\partial t^2} \qquad (13)$$

(знак «+» - для левого конца стержня, «-» - для правого конца).

Таким образом, математическая модель, описывающая продольные колебания упругого однородного ограниченного стержня включает в себя уравнение (7), в случае свободных колебаний, или уравнение (8), в случае вынужденных колебаний, начальные условия (9) и два граничных условия на концах $x=0$ и $x=l$, каждое из которых, в зависимости от варианта закрепления, может иметь один из видов (10)-(13).

## 3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ МЕТОДОМ ФУРЬЕ

Решение уравнения (7) будем искать методом Фурье (методом разделения переменных). Согласно этому методу, мы ищем частные решения (7), удовлетворяющие граничным условиям, и имеющие вид

$$u(x,t) = X(x)T(t), \qquad (14)$$

Таким образом, перемещение $u(x,t)$ мы представляем в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от аргумента $x$, а вторая – только от аргумента $t$. Тогда вместо определения функции двух переменных $u(x,t)$ приходим к задаче определения двух функций $X(x)$ и $T(t)$, каждая из которых зависит только от одной переменной.

Подставив (14) в уравнение (7), получим

$$X''(x)T(t) = \frac{1}{a^2}X(x)T''(t).$$

Разделив обе части равенства на произведение $X(x)T(t)$ и умножив на $a^2$, получим уравнение



Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

$$a^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)}.$$

Здесь левая часть зависит только от $x$, а правая – только от $t$. Для тождественного выполнения этого равенства (при любых $x$ и $t$) необходимо, чтобы каждая из частей была равна постоянной, которую обозначим через «$-p^2$» (можно показать, что случай «$p^2$», также как и случай «$p=0$», приводит к единственному тривиальному решению):

$$a^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = -p^2, \ \frac{T''(t)}{T(t)} = -p^2.$$

Отсюда следуют два уравнения

$$T''(t) + p^2 T(t) = 0, \tag{15}$$

$$X''(x) + \frac{p^2}{a^2} X(x) = 0. \tag{16}$$

Таким образом, задача сводится к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

Общее решение уравнения (15) имеет вид

$$T(t) = A\cos(pt) + B\sin(pt), \tag{17}$$

где $A$ и $B$ - произвольные постоянные.

Положим $A = I\sin\alpha$, $B = I\cos\alpha$, тогда функцию (17) можно представить следующим образом:

$$T(t) = I\sin(pt + \alpha), \tag{18}$$

где $I = \sqrt{A^2 + B^2}$, $tg\alpha = \frac{A}{B}$.

Вид решения (18) указывает на колебательный характер процесса. Из него видно, что неизвестная величина $p$ имеет смысл круговой частоты свободных колебаний, $I$ - амплитуды колебаний, а $\alpha$ - начальной фазы.

Так как искомые частные решения должны удовлетворять кроме уравнения соответствующим однородным граничным условиям, то подставляя в последние функцию (14) и исключая $T(t)$, получим два дополнительных



Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

условия относительно $X(0)$, $X(l)$ или их производных. Следовательно, для нахождения функций $X(x)$ мы приходим к задаче о собственных значениях (задаче Штурма-Лиувилля): найти те значения параметра $p$, при которых существуют нетривиальные решения уравнения (16), удовлетворяющие соответствующим дополнительным условиям, а также найти эти нетривиальные решения. Такие значения параметра $p$ называются собственными значениями, а соответствующие им нетривиальные решения – собственными функциями поставленной задачи. Как было показано выше, собственные значения имеют смысл круговой частоты свободных колебаний, поэтому их чаще называют собственными частотами.

Уравнение (16) имеет общее решение

$$X(x) = C_1 \cos\left(\frac{p}{a}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{p}{a}x\right), \tag{19}$$

где $C_1$ и $C_2$- произвольные постоянные. Подставляя (19) в условия, полученные для функций $X(0)$, $X(l)$ или их производных из граничных условий, получаем систему линейных однородных уравнений относительно постоянных $C_1$ и $C_2$. Такая система имеет нетривиальное решение, если ее определитель равен нулю. Раскрывая определитель указанной системы, мы получим уравнение для определения $p$. Данное уравнение называется уравнение частот или частотным уравнением.

Частотное уравнение, всегда трансцендентное и имеет бесконечное число корней. Перенумерованные в порядке возрастания они вместе с порядковым номером растут до бесконечности. Наименьшая положительная частота, отличная от нуля, называется частотой основного тона или основной частотой. Остальные частоты называются частотами высших порядков.

Для частоты $p_k$ находим $C_{1k}$ и $C_{2k}$. Таким образом каждому значению $p_k$ соответствует своя собственная функция $X_k(x)$ вида (19), определенная с точностью до произвольного постоянного множителя. Эта функция определяет собственную форму колебаний, т.е. задает распределение амплитуд колебаний

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

по длине стержня, соответствующих собственной частоте $p_k$. Очевидно, что она не зависит от начальных условий.

Таким образом, число собственных частот бесконечно, причем каждому значению частоты $p_k$ соответствует своя функция $T_k(t)$, определяемая зависимостью (17), и своя функция $X_k(x)$, определяемая зависимостью (19). Следовательно, каждому $k$ соответствует решение вида (14)

$$u_k(x,t) = X_k(x)T_k(t),$$

которое удовлетворяет уравнению (7) и граничным условиям, но является лишь частным и не дает полного описания движения.

Полное решение получим путем наложения всех частных решений:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)T_k(t). \qquad (20)$$

Поскольку мы составили бесконечный ряд, то нужно, чтобы он был сходящимся. Кроме того, он должен быть дважды непрерывно дифференцируем по обеим переменным на интервале $[0,l]$. Тогда в силу линейности и однородности уравнения свободных колебаний, ряд (20), также как и частные решения $u_k(x,t)$, будет являться решением уравнения (7). Ясно также, что функция (20) будет удовлетворять граничным условиям, так как им удовлетворяет каждая из функций $u_k(x,t)$.

## 4. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЯ С ОДНИМ ЗАКРЕПЛЕННЫМ КОНЦОМ

В качестве примера рассмотрим свободные продольные колебания стержня. Упругий цилиндрический стержень, имеющий в нерастянутом состоянии длину $l$, закрепляется на конце $x = 0$ и затем растягивается за конец $x = l$ до длины $l_1$; после этого конец $x = l$ отпускается, вследствие чего в стержне образуются продольные колебания. Таким образом, математическая модель, описывающая данные колебания включает уравнение (7), начальные условия (9) и граничные условия следующего вида

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

$$u(0,t)=0,\ \frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=0. \qquad (21)$$

Согласно методу Фурье, изложенному в предыдущем разделе, ищем частные решения уравнения (7), удовлетворяющие условиям (21), в виде (14), где функции $X(x)$ и $T(t)$ имеют вид (17) и (19), соответственно. Подставляя (14) в (21), имеем

$$X(0)T(t)=0,\ X'(0)T(t)=0.$$

Последние равенства должны выполняться при любых значениях $t$. Если предположить, что второй множитель в обоих равенствах равен нулю, то мы получим тривиальное решение. Но такое решение нас не интересует, поэтому мы должны считать, что

$$X(0)=0,\ X'(l)=0. \qquad (22)$$

В результате для отыскания функций $X(x)$ мы приходим к задаче Штурма-Лиувилля: найти нетривиальные решения уравнения (16), удовлетворяющие условиям (22).

Поскольку общее решение уравнения (16) имеет вид (19), то подставляя выражение (19) в (22), получим следующую систему линейных однородных уравнений для определения $C_1$ и $C_2$:

$$C_1=0,\ C_2\frac{p}{a}\cos\left(\frac{p}{a}l\right)=0. \qquad (23)$$

Считая $C_2\neq 0$, т.к. в противном случае мы получили бы $X(x)\equiv 0$, находим

$$\frac{p}{a}\cos\left(\frac{p}{a}l\right)=0.$$

Данное уравнение совпадает с условием равенства нулю определителя системы (23), а, следовательно, является уравнением частот для данного случая. Поскольку решению $p=0$, соответствует равномерное движение стержня как жесткого целого, что в данном случае не возможно, то уравнение частот принимает вид

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

$$\cos\left(\frac{p}{a}l\right)=0. \qquad (24)$$

Уравнение (24) будет удовлетворяться, если $\frac{p}{a}l=(2k+1)\frac{\pi}{2}$, где $k$ - целое число. Откуда находим следующие значения частот различных форм собственных колебаний:

$$p_k=\frac{a}{l}(2k+1)\frac{\pi}{2},\ \ k=0,\pm1,\pm2,\ldots. \qquad (25)$$

Собственные функции, соответствующие собственным частотам (25) имеют вид

$$X_k(x)=C_{2k}\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2l}x\right),\ k=0,\pm1,\pm2,\ldots. \qquad (26)$$

Они определены с точностью до постоянного сомножителя $C_{2k}$. Легко проверить, что, придавая числу $k$ отрицательные значения, мы не получим новых собственных функций (например, при $k=-1$ мы получим функцию, которая будет отличаться от функции $X_0(x)$ только знаком). Поэтому далее будем считать, что $k=0,1,2,\ldots$

При $p=p_k$ решение (17) принимает вид

$$T_k(t)=A_k^*\cos\left(\frac{(2k+1)\pi a}{2l}t\right)+B_k^*\sin\left(\frac{(2k+1)\pi a}{2l}t\right), \qquad (27)$$

где $A_k^*$ и $B_k^*$ - произвольные постоянные.

Подставляя (26), (27) в (20), получаем общее решение для перемещения в случае продольных колебаний

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}C_{2k}\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2l}x\right)\left(A_k^*\cos\left(\frac{(2k+1)\pi a}{2l}t\right)+B_k^*\sin\left(\frac{(2k+1)\pi a}{2l}t\right)\right).$$

Внося множитель $C_{2k}$ в скобку, и вводя обозначения $C_{2k}A_k^*=A_k$ и $C_{2k}B_k^*=B_k$, получим решение в виде

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2l}x\right)\left(A_k\cos\left(\frac{(2k+1)\pi a}{2l}t\right)+B_k\sin\left(\frac{(2k+1)\pi a}{2l}t\right)\right). \qquad (28)$$

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

Постоянные $A_k$ и $B_k$ в каждом конкретном случае определяются из начальных условий (9). Подставляя (28) в условия (9), имеем, что для выполнения начальных условий необходимо, чтобы

$$f_1(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2l}x\right)A_k\,,\ f_2(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2l}x\right)\frac{(2k+1)\pi a}{2l}B_k\,. \quad (29)$$

Равенства (29) представляют собой разложения функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ в ряды по собственным функциям (26).

Покажем, что собственные функции (26) ортогональны на интервале $[0,l]$. Напомним, что система функций $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_k,\ldots$ называется ортогональной на интервале $[0,l]$, если интеграл от произведения двух различных функций системы равен нулю:

$$\int_0^l \varphi_k(x)\varphi_m(x)dx=0,\ k\neq m. \quad (30)$$

В нашем случае, при $k\neq m$ имеем

$$\int_0^l \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2l}x\right)\sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{2l}x\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^l\left(\cos\left(\frac{(k-m)\pi}{l}x\right)-\right.$$

$$\left.-\cos\left(\frac{(k+m+1)\pi}{l}x\right)\right)=\frac{l}{2\pi}\left.\left(\frac{\sin\left(\frac{(k-m)\pi}{l}x\right)}{k-m}-\frac{\sin\left(\frac{(k+m+1)\pi}{l}x\right)}{k+m+1}\right)\right|_0^l=0\,.$$

Если $k=m$, то

$$\int_0^l \sin^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2l}x\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^l\left(1-\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{l}x\right)\right)dx=\frac{l}{2}\,.$$

Предполагая теперь, что ряды (29) сходятся равномерно, можно определить коэффициенты $A_k$ и $B_k$, умножив обе части равенств (29) на $\sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{2l}x\right)$ и проинтегрировав по $x$ в пределах от $x=0$ до $x=l$. Тогда, принимая во внимание, что для данных собственных функций условия ортогональности выполняются, получим

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

$$A_m = \frac{2}{l}\int_0^l f_1(x)\sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{2l}x\right)dx,$$

$$B_m = \frac{4}{(2m+1)\pi a}\int_0^l f_2(x)\sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{2l}x\right)dx. \qquad (31)$$

Подставляя найденные значения коэффициентов в ряд (28), мы получим решение исходной задачи, если ряд (28) и ряды, полученные из него почленным дифференцированием по $x$ и $t$, равномерно сходятся.

Решение (28) можно представить в виде

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} I_k \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2l}x\right)\sin\left(\frac{(2k+1)\pi a}{2l}t + \alpha_k\right),$$

где $I_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}$, $tg\alpha_k = \frac{A_k}{B_k}$. Таким образом, колебательное движение стержня является результатом сложения простых гармонических колебаний, совершающихся с амплитудами $I_k \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2l}x\right)$ и с частотами, определяемыми выражениями (25).

Основной тон, получающийся при $k = 0$, имеет период колебания

$$T_0 = \frac{2\pi}{p_0} = \frac{4l}{a} = 4l\sqrt{\frac{\rho}{E}}. \qquad (32)$$

Так как амплитуда основного тона равна $I_0 \sin\left(\frac{\pi}{2l}x\right)$, то, очевидно, что на закрепленном конце стержня $x = 0$ имеем узел (неподвижное сечение), а на свободном конце $x = l$ - пучность (сечение, имеющее максимальное по модулю отклонение).

Для данного случая закрепления частоты высших порядков кратны основной частоте, действительно из (25) следует, что $p_0 : p_1 : p_2 : \ldots = 1:3:5:\ldots$. Это говорит о том, что период основного тона, определяемый формулой (32) является периодом всего колебания. По истечении времени $T_0$ движение повторится в том же порядке. Таким образом, в данном случае движение будет периодическим.

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

Предположим, например, что со стержня, первоначально растянутого приложенной к незакрепленному концу продольной силой $P_0$ (рис. 5), в момент времени $t = 0$ эта сила внезапно убирается.

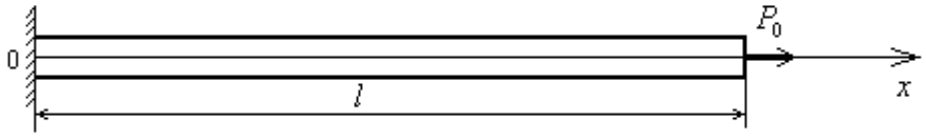


Рис. 5

Обозначим через $\varepsilon_0$ начальную деформацию, тогда

$$\varepsilon_0 = \frac{P_0}{ES}.$$

В этом случае начальные условия (9) примут вид

$$u(x,0) = \varepsilon_0 x, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0. \tag{33}$$

Т.е. $f_1(x) = \varepsilon_0 x, \ f_2(x) = 0$. Подставляя их в формулы (31) получаем следующее выражение для определения постоянных $A_k$ и $B_k$:

$$A_k = \frac{2\varepsilon_0}{l}\int_0^l x \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2l}x\right)dx, \ B_k = 0. \tag{34}$$

Учитывая, что $\int_0^l x \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2l}x\right)dx = (-1)^m \frac{4l^2}{(2k+1)^2\pi^2}$, получим окончательное выражение для постоянных $A_k$ :

$$A_k = (-1)^k \frac{8\varepsilon_0 l}{(2k+1)^2\pi^2}. \tag{35}$$

Окончательное выражение для функции перемещения получим из (28) с учетом (34), (35)

$$u(x,t) = \frac{8\varepsilon_0 l}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2l}x\right)\cos\left(\frac{(2k+1)\pi a}{2l}t\right). \tag{36}$$

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

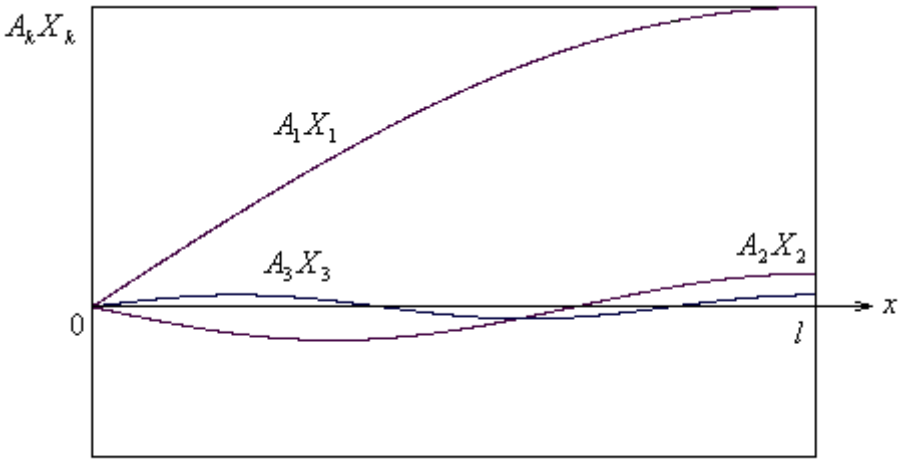


Рис. 6

На рис. 6 показаны вклады первых трех форм колебаний в суммарное динамическое перемещение стержня. Можно отметить, что амплитуды различных форм колебаний быстро уменьшаются с увеличением $k$. Кроме того, с увеличением $k$ увеличивается число узловых сечений $k$-ой формы колебания.

Очевидно, что перемещение на незакрепленном конце стержня получаем подстановкой $x = l$ в выражение (36).

Для момента времени $t = 0$, как и следовало ожидать, имеем

$$u(x,0) = \frac{8\varepsilon_0 l}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2l}x\right) = \frac{8\varepsilon_0 l}{\pi^2}\left(\frac{\pi^2 x}{8l}\right) = \varepsilon_0 x.$$

Откуда $u(l,0) = \varepsilon_0 l$.

## 5. ЧАСТОТЫ И ФОРМЫ СВОБОДНЫХ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЯ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ СЛУЧАЕВ ЗАКРЕПЛЕНИЯ КОНЦОВ

Будем искать нетривиальные решения уравнения (16), рассматривая разные варианты граничных условий на концах стержня.

1. Если оба конца стержня заделаны (рис. 7*а*), то граничные условия имеют вид $u(0,t) = u(l,t) = 0$ или для функции $X(x)$:

$$X(0) = X(l) = 0. \qquad (37)$$



Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

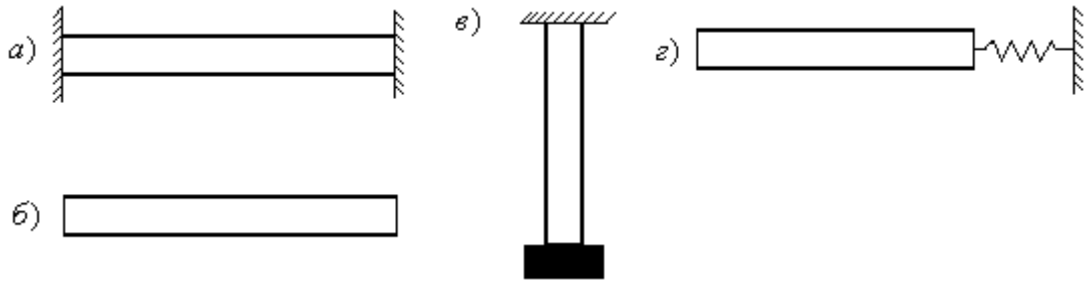


Рис. 7

Подставляя выражение (19) в граничные условия (37), получаем следующую систему для определения $C_1$ *и* $C_2$:

$$C_2 = 0,\ C_1 \sin\left(\frac{p}{a} l\right) = 0.$$

Исключив случай тривиального решения $C_1 = 0$, получаем следующее уравнение частот

$$\sin\left(\frac{p}{a} l\right) = 0,$$

откуда находим, что собственные частоты имеют вид

$$p_k = \frac{k\pi a}{l},\ k = 1, 2, \ldots$$

А собственные функции, определяющие формы колебаний, будут определяться по формулам

$$X_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{l} x\right),\ k = 1, 2, \ldots.$$

2. Для стержня со свободными концами (рис. 7*б*) граничные условия имеют вид

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0$$

или для собственных функций

$$X'(0) = X'(l) = 0, \tag{38}$$

а частоты и собственные функции находятся по формулам

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

$$p_k = \frac{k\pi a}{l},\ X_k(x) = \cos\left(\frac{k\pi}{l}x\right),\ k = 0, 1, 2, \ldots \qquad (39)$$

При $k = 0$ получаем нулевое значение собственной частоты $p_0 = 0$, которая соответствует смещению стержня как жесткого целого.

Докажем ортогональность собственных функций для случаев, когда: 1) один конец стержня жестко заделан, а другой свободен, 2) оба конца стержня жестко заделаны, 3) оба конца свободны. Это можно сделать, не опираясь на их явные выражения, как это было сделано в предыдущем разделе, а пользуясь только уравнением (16) и условиями (22), (37) и (38).

Пусть $p_k$ и $p_m$ - два различных значения собственных частот, а $X_k(x)$, $X_m(x)$ - соответствующие им собственные функции. По определению эти функции удовлетворяют уравнению (16)

$$X_k''(x) + \frac{p_k^2}{a^2}X_k(x) = 0,\ X_m''(x) + \frac{p_m^2}{a^2}X_m(x) = 0.$$

и соответствующим краевым условиям.

Умножим первое уравнение на $X_m(x)$, а второе на $X_k(x)$ и вычтем одно из другого:

$$(X_k''(x)X_m(x) - X_m''(x)X_k(x)) + \frac{p_k^2 - p_m^2}{a^2}X_k(x)X_m(x) = 0.$$

Проинтегрируем это равенство в пределах от $0$ до $l$

$$\int_0^l (X_k''(x)X_m(x) - X_m''(x)X_k(x))dx + \frac{p_k^2 - p_m^2}{a^2}\int_0^l X_k(x)X_m(x)dx = 0.$$

Откуда, учитывая, что $p_k \neq p_m$, получим

$$\int_0^l X_k(x)X_m(x)dx = \frac{a^2}{p_m^2 - p_k^2}\int_0^l (X_k''(x)X_m(x) - X_m''(x)X_k(x))dx.$$

Проинтегрируем интеграл, стоящий справа в последнем равенстве по частям:

$$\int_0^l (X_k''(x)X_m(x) - X_m''(x)X_k(x))dx = (X_k'(x)X_m(x) - X_m'(x)X_k(x))\Big|_0^l -$$



Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

$$-\int_0^l (X_k''(x)X_m''(x) - X_m''(x)X_k''(x))dx = 0.$$

Действительно, первое слагаемое обращается в нуль при любой из комбинаций начальных условий (22), (37) и (38), а интеграл равен нулю, так как подынтегральная функция равна нулю.

Таким образом, получаем, что во всех трех рассматриваемых случаях закрепления концов

$$\int_0^l X_k(x)X_m(x)dx = 0 \text{ при } k \neq m,$$

то есть условия ортогональности (30) выполняются.

3. Предположим, что один конец стержня жестко заделан, а к другому прикреплен груз массой $m_g$ (рис. 7*в*), и стержень совершает свободные колебания. В этом случае граничные условия принимают вид:

$$u(0,t) = 0, \;\; SE\frac{\partial u(x_k,t)}{\partial x} = -m_g\frac{\partial^2 u(x_k,t)}{\partial t^2}. \qquad (40)$$

Подставляя в (40) выражение (14), с учетом (16) получим следующие условия для $X(x)$:

$$X(0) = 0, \; X(l)p^2 = \frac{SE}{m_g}X'(l). \qquad (41)$$

Подставляя выражение (19) в условия (41), получаем следующую систему для определения $C_1$ *и* $C_2$:

$$C_1 = 0, \; C_2 p^2 \sin\left(\frac{p}{a}l\right) = \frac{SE}{m_g}C_2\frac{p}{a}\cos\left(\frac{p}{a}l\right).$$

Исключая случай тривиального решения $C_2 = 0$, получаем следующее уравнение частот

$$p\sin\left(\frac{p}{a}l\right) = \frac{SE}{m_g a}\cos\left(\frac{p}{a}l\right).$$

Преобразуем последнее к виду

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

$$ctg\left(\frac{p}{a}l\right)=\frac{m_g ap}{SE}. \qquad (42)$$

Положим в уравнении (42) $\frac{p}{a}l=\mu$, тогда

$$p=\frac{\mu a}{l}. \qquad (43)$$

Рассмотрим правую часть уравнения частот (42). С учетом (43) и того факта, что масса стержня $m_0=\rho Sl$, получим

$$\frac{m_g ap}{SE}=\frac{m_g a^2\mu}{SEl}=\frac{m_g E\mu}{SEl\rho}=\mu\frac{m_g}{m_0},$$

где $m_0$ - масса стержня.

Тогда уравнение частот (42) примет вид

$$ctg\mu=\frac{m_g}{m_0}\mu. \qquad (44)$$

Решим уравнение (44) графически. В одной системе координат построим графики функций, стоящих в правой и левой частях уравнения (44) (рис. 8). Точки пересечения графика котангенса с прямой определяют положение корней $\mu_1, \mu_2, \ldots$.

Из рис. 8 видно, что чем меньше масса груза по сравнению с массой стержня, тем меньше тангенс угла наклона прямой. Если $m_g << m_0$, то прямая близка к оси $\mu$. Тогда корни $\mu_k$ приближаются к значениям $(2k-1)\frac{\pi}{2}$. Тогда из (43) следует, что значения собственных частот $p_k$ будут близки к значениям $\frac{a}{l}(2k-1)\frac{\pi}{2}$, что соответствует случаю, колебаний стержня с одним закрепленным концом и вторым свободным концом (формула (25)).

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

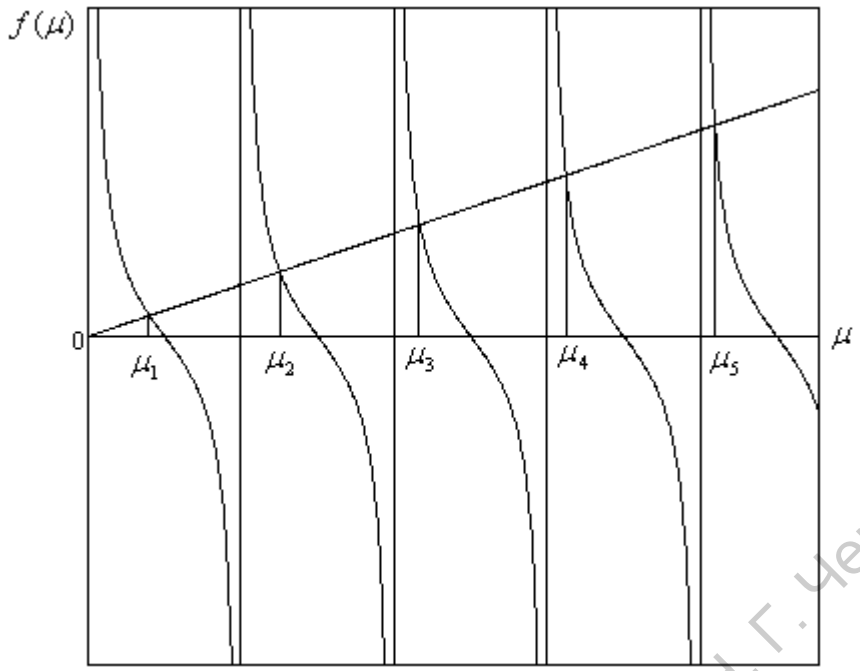


Рис. 8.

И, наоборот, чем масса груза больше массы стержня, тем больше тангенс угла наклона прямой. При $m_g >> m_0$ положение прямой стремиться к положению вертикальной оси, что приводит к уменьшению значений корней. В частности $\mu_1 \to 0$, когда $\frac{m_0}{m_n} \to 0$.

Уравнение (44) не имеет аналитического решения, но при малом значении $\frac{m_0}{m_g}$ можно получить явную приближенную формулу для корня $\mu_1$, который в этом случае тоже будет малым. Если $\mu_1$ - корень уравнения (44), то $\mu_1 tg\mu_1 = \frac{m_0}{m_g}$. Используя малость $\mu_1$, заменим $tg\mu_1$ на $\mu_1$. Таким образом, в случае, когда $m_g >> m_0$, получаем приближенное равенство $\mu_1^2 \approx \frac{m_0}{m_g}$ из которого вытекает, что

$$p_1^2 = \left(\frac{\mu_1 a}{l}\right)^2 \approx \frac{m_0 E}{m_g l^2 \rho} = \frac{\rho S l E}{m_g l^2 \rho} = \frac{SE}{m_g l} = \frac{c_0}{m_g}, \qquad (45)$$

но отношение



Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

$$\frac{SE}{l} = c_0 \tag{46}$$

представляет собой жесткость стержня на растяжение. Следовательно, в том случае, когда масса груза значительно больше массы стержня, при приближенном определении первой частоты колебаний можно не учитывать массу стержня, заменив его невесомой пружиной, имеющей жесткость $c_0$.

Полученную приближенную формулу для $p_1$ можно уточнить, если при вычислении $tg\mu_1$ учитывать два члена разложения в ряд:

$$tg\mu_1 \approx \mu_1 + \frac{\mu_1^3}{3}.$$

В этом случае уравнение для определения $\mu_1$ принимает вид

$$\mu_1\left(\mu_1 + \frac{\mu_1^3}{3}\right) = \frac{m_0}{m_g}. \tag{47}$$

Решение уравнения будем искать в виде ряда $\mu_1^2 = \frac{m_0}{m_g} + \beta\left(\frac{m_0}{m_g}\right)^2 + \ldots$. После подстановки ряда в уравнение (47) и приравнивания нулю коэффициента при $\left(\frac{m_0}{m_g}\right)^2$ получаем $\beta = -\frac{1}{3}$. Тогда $\mu_1^2 \approx \frac{m_0}{m_g} - \frac{1}{3}\left(\frac{m_0}{m_g}\right)^2$. С учетом последнего приближенного равенства из (43) получим

$$p_1^2 \approx \frac{c_0}{m_g + \frac{m_0}{3}}.$$

Сравнивая полученную формулу с формулой (45), можно заключить, что для оценки влияния массы стержня на первую частоту колебаний к массе груза $m_g$ нужно прибавить одну треть массы стержня.

Собственные функции, определяющие формы колебаний, в данном случае будут определяться по формулам

$$X_k(x) = \sin\left(\frac{p_k}{a}x\right),\ k = 1, 2, \ldots. \tag{48}$$

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

4. Предположим, что левый конец стержня свободен, а правый упруго закреплен с помощью пружины жесткостью $c_1$ (рис. 7*г*). В этом случае граничные условия имеют вид

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=0,\ SE\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=-c_1u(l,t).$$

Подстановка в эти условия выражения (14), с учетом (16) дает следующие условия для $X(x)$:

$$X'(0)=0,\ SEX'(l)=-c_1X(l).$$

Из этих граничных условий с учетом (19), получаем следующую систему для определения $C_1$ *и* $C_2$:

$$C_2=0,\ C_1SE\frac{p}{a}\sin\left(\frac{p}{a}l\right)=C_1c_1\cos\left(\frac{p}{a}l\right).$$

Исключая случай тривиального решения $C_1=0$, получаем следующее уравнение частот

$$ctg\left(\frac{p}{a}l\right)=\frac{SEp}{ac_1}. \qquad (49)$$

С учетом (43), (46) частотное уравнение (49) примет вид

$$ctg\mu=\frac{c_0}{c_1}\mu. \qquad (50)$$

Уравнение (50) по форме совпадает с уравнением (44). Зависимость корней от параметра $\frac{c_0}{c_1}$ можно проследить с помощью рис. 9, заменив на нем $\frac{m_g}{m_0}$ на $\frac{c_0}{c_1}$. С увеличением жесткости пружины $c_1$ уменьшается тангенс угла наклона прямой и она поворачивается по часовой стрелке. При этом корни $\mu_k$ увеличиваются, приближаясь к значениям $(2k-1)\frac{\pi}{2}$. Тогда из (43) следует, что значения собственных частот $p_k$ будут близки к значениям $\frac{a}{l}(2k-1)\frac{\pi}{2}$, что соответствует случаю, заделки правого конца стержня. Уменьшение $c_1$

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

вызывает поворот прямой против стрелки и уменьшение корней, которые при $\frac{c_1}{c_0} \to 0$ стремятся к пределам $\pi k,\ k = 0,1,2,\ldots$. Эти пределы соответствуют частотам колебаний стержня со свободными концами.

Уравнение (50), как и уравнение (44) не имеет аналитического решения, однако при малом значении отношения $\frac{c_1}{c_0}$ можно получить явную приближенную формулу для корня $\mu_1$, который в этом случае тоже будет малым. Как и в предыдущем случае, получаем приближенное равенство $\mu_1^2 \approx \frac{c_1}{c_0}$, из которого вытекает, что $p_1^2 \approx \frac{c_1}{m_0}$. Таким образом, при приближенном определении первой частоты колебаний упруго закрепленного стержня можно заменить его материальной точкой массой $m_0$, если жесткость стержня намного больше жесткости пружины.

В рассматриваемом случае собственные функции, определяющие формы колебаний, будут определяться по формулам

$$X_k(x) = \cos\left(\frac{p_k}{a}x\right),\ k = 1,\ 2,\ldots.$$

## 6. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЯ С МАССОЙ НА КОНЦЕ

Исследуем свободные продольные колебания стержня, один конец которого $x = 0$ жестко заделан, а к другому концу $x = l$ прикреплен груз массой $m_g$ (рис. 7*в*). Математическая модель, описывающая данные колебания включает уравнение (7), начальные условия (9) и граничные условия

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0.$$

В предыдущем разделе было получено уравнение частот и выражения для собственных функций при колебаниях рассматриваемого вида. Предположим,

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

что мы получили численные решения уравнения (44), т.е. собственные частоты нам известны.

Решение задачи ищем в виде ряда (19), где функции $X_k(x)$ задаются формулой (48), а функции $T_k(t)$ имеют вид

$$T_k(t) = A_k \cos(p_k t) + B_k \sin(p_k t). \qquad (51)$$

Таким образом,

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sin\left(\frac{p_k}{a} x\right)\left(A_k \cos(p_k t) + B_k \sin(p_k t)\right).$$

В данном случае для собственных функций не выполняется условие ортогональности (30), так как

$$\int_0^l \sin\left(\frac{p_k}{a} x\right)\sin\left(\frac{p_m}{a} x\right)dx \neq 0 \text{ при } k \neq m.$$

Поэтому применить к нахождению неопределенных коэффициентов $A_k$ и $B_k$ метод, описанный в четвертом разделе нельзя.

Для того чтобы записать соотношения ортогональности для стержня с прикрепленной на конце массой, перепишем задачу на собственные значения (уравнение (16)) для двух различных форм колебаний в следующем виде:

$$ESX_i''(x) = -m_0 p_i^2 X_i(x), \; ESX_j''(x) = -m_0 p_j^2 X_j(x).$$

Умножая первое из этих соотношений на $X_j(x)$, а второе - на $X_i(x)$ и интегрируя по длине стержня, получим

$$ES\int_0^l X_i''(x) X_j(x)dx = -m_0 p_i^2 \int_0^l X_i(x) X_j(x)dx,$$

$$ES\int_0^l X_j''(x) X_i(x)dx = -m_0 p_j^2 \int_0^l X_j(x) X_i(x)dx. \qquad (52)$$

Включим в условия ортогональности массу груза $m_g$. Для этого запишем второе условие (41) для $i$-й и $j$-й форм колебаний

$$X_i(l) p_i^2 = \frac{SE}{m_g} X_i'(l), \; X_j(l) p_j^2 = \frac{SE}{m_g} X_j'(l).$$

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

Умножим первое условие на $X_j(l)$ и вычтем из первого уравнения (52), аналогично умножим второе условие на $X_i(l)$ и вычтем из второго уравнения (52). В результате придем к следующим комбинированным соотношениям:

$$ES\int_0^l X_i''(x)X_j(x)dx - ESX_i'(l)X_j(l) = -p_i^2\left(m_0\int_0^l X_i(x)X_j(x)dx + m_g X_i(l)X_j(l)\right),$$

$$ES\int_0^l X_j''(x)X_i(x)dx - ESX_j'(l)X_i(l) = -p_j^2\left(m_0\int_0^l X_j(x)X_i(x)dx + m_g X_j(l)X_i(l)\right).$$

Интегрируя выражение, стоящее в левой части этих равенств по частям, с учетом первого соотношения (41), получим

$$-ES\int_0^l X_i'(x)X_j'(x)dx = -p_i^2\left(m_0\int_0^l X_i(x)X_j(x)dx + m_g X_i(l)X_j(l)\right),$$

$$-ES\int_0^l X_j'(x)X_i'(x)dx = -p_j^2\left(m_0\int_0^l X_j(x)X_i(x)dx + m_g X_j(l)X_i(l)\right).$$

Вычитая одно из другого, имеем

$$(p_j^2 - p_i^2)\left(m_0\int_0^l X_j(x)X_i(x)dx + m_g X_j(l)X_i(l)\right) = 0. \qquad (53)$$

Полагая в последнем равенстве $i \neq j$, получаем следующие условие ортогональности

$$m_0\int_0^l X_j(x)X_i(x)dx + m_g X_j(l)X_i(l) = 0, \qquad (54)$$

которое называется условием ортогональности с нагрузкой.

При $i = j$ второй сомножитель, стоящий в левой части равенства (53) можно положить равным произвольной постоянной. Положим, что данная постоянная равна $m_0$, тогда

$$m_0\int_0^l X_i^2(x)dx + m_g X_i^2(l) = m_0. \qquad (55)$$

Для исследования неустановившегося поведения системы при продольных перемещениях, обусловленного начальными условиями вида (9),

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

определим сначала начальные перемещения и скорость массы, прикрепленной к стержню в точке $x = l$:

$$u(l,0) = f_1(l), \ \frac{\partial u(l,0)}{\partial t} = f_2(l). \tag{56}$$

Затем левые части начальных условий для стержня (9) и для массы (56) представим в виде рядов (20)

$$\sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) T_k(0) = f_1(x), \ \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) T_k'(0) = f_2(x). \tag{57}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} X_k(l) T_k(0) = f_1(l), \ \sum_{k=1}^{\infty} X_k(l) T_k'(0) = f_2(l). \tag{58}$$

Умножим соотношения (57) на $m_0 X_i(x)$ и проинтегрируем по длине стержня, затем умножим соотношения (58) на $m_g X_i(l)$ и полученные результаты сложим попарно.

В результате имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k(0) \left( m_0 \int_0^l X_k(x) X_i(x) dx + m_g X_k(l) X_i(l) \right) = m_0 \int_0^l f_1(x) X_i(x) dx + m_g f_1(l) X_i(l),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k'(0) \left( m_0 \int_0^l X_k(x) X_i(x) dx + m_g X_k(l) X_i(l) \right) = m_0 \int_0^l f_2(x) X_i(x) dx + m_g f_2(l) X_i(l).$$

Из последних соотношений, используя отношения ортогональности (54) и условия (55), находим, что при $i = j$

$$T_i(0) = \int_0^l f_1(x) X_i(x) dx + \frac{m_g}{m_0} f_1(l) X_i(l),$$

$$T_i'(0) = \int_0^l f_2(x) X_i(x) dx + \frac{m_g}{m_0} f_2(l) X_i(l). \tag{59}$$

Коэффициенты $A_k$ и $B_k$ в выражении (51) находим, подставляя его в левые части условий (59):

$$A_k = \int_0^l f_1(x) X_k(x) dx + \frac{m_g}{m_0} f_1(l) X_k(l),$$

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

$$B_k = \frac{1}{p_k}\left(\int_0^l f_2(x)X_k(x)dx + \frac{m_g}{m_0} f_2(l)X_k(l)\right).$$

Предположим, например, что со стержня, первоначально растянутого приложенной к грузу продольной силой $P_0$, в момент времени $t = 0$ эта сила внезапно убирается. Тогда начальные условия имеют вид (33), т.е. $f_1(x) = \varepsilon_0 x,\ \ f_2(x) = 0$, где $\varepsilon_0 = \frac{P_0}{ES}$. Подставляя их в формулы для нахождения постоянных $A_k$ и $B_k$, получаем:

$$A_k = \varepsilon_0\left(\left(\frac{a^2}{p_k^2} + \frac{m_g l}{m_0}\right)\sin\left(\frac{p_k l}{a}\right) - \frac{al}{p_k}\cos\left(\frac{p_k l}{a}\right)\right),\ \ B_k = 0.$$

## 7. ВЫНУЖДЕННЫЕ ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЯ

Найдем решение уравнения вынужденных колебаний (8), удовлетворяющее начальным условиям (9) и граничным условиям, соответствующим способу закрепления концов. Как и в случае свободных колебаний, решение можно искать в виде ряда (19), где $T_k(t)$- неизвестные функции, а $X_k(x)$- функции, определяющие форму колебаний, которые удовлетворяют уравнению

$$X_k''(x) + \frac{p_k^2}{a^2} X_k(x) = 0 \qquad (60)$$

и заданным граничным условиям.

Таким образом, в качестве $X_k(x)$ можно взять собственные функции задачи о свободных продольных колебаниях стержня с соответствующими граничными условиями.

Перепишем уравнение (8) в виде

$$a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = -\frac{g(x,t)}{\rho}. \qquad (61)$$

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

Разложим правую часть уравнения (61) в ряд по собственным функциям $X_k(x)$

$$\frac{g(x,t)}{\rho} = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(t) X_k(x). \qquad (62)$$

Подставляя ряд (19) в уравнение (55), с учетом (62), умножая обе части полученного уравнения на $X_k(x)$ и интегрируя по $x$ в пределах от $x = 0$ до $x = l$, получим уравнение для нахождения функций $T_k(t)$

$$T_k''(t) + p^2 T_k(t) = g_k(t), \; k = 1, 2, \ldots. \qquad (63)$$

Мы получили линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Общее решение каждого такого уравнения представляется в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения $T_k^0(t)$ неоднородного уравнения:

$$T_k(t) = A_k \cos(p_k t) + B_k \sin(p_k t) + T_k^0(t). \qquad (64)$$

Частное решение уравнения (63) можно искать в виде интеграла Дюамеля

$$T_k^0(t) = \frac{1}{p_k} \int_0^t g_k(\tau) \sin\left(p_k (t - \tau)\right) d\tau, \qquad (65)$$

удовлетворяющего нулевым начальным условиям.

Постоянные $A_k$ и $B_k$ определяются из начальных условий (9).

В качестве примера рассмотрим вынужденные колебания однородного стержня под действием силы $P(t)$, приложенной к правому концу $x = l$. Левый конец стержня $x = 0$ считаем жестко заделанным (рис. 9)

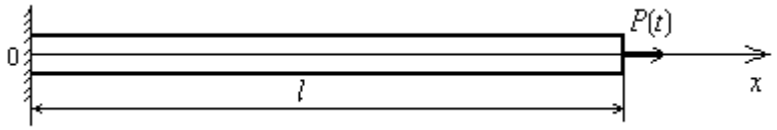


Рис. 9

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

Учет данной силы при моделировании продольных колебаний стержня происходит путем добавления в правую часть уравнения колебаний распределенной нагрузки $g(x,t)$ следующего вида

$$g(x,t)=\frac{p(x,t)}{S},$$

где $p(x,t)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0} p_\varepsilon(x,t)$, $p_\varepsilon(x,t)=\begin{cases}0,\ x<l-\varepsilon,\\ P(t)/\varepsilon,\ l-\varepsilon\le x\le l,\\ 0,\ x>l.\end{cases}$

При этом граничное условие на конце $x=l$ имеет вид $\dfrac{\partial u(l,t)}{\partial x}=0$.

Введем импульсную функцию $\delta(x)$ по формуле

$$\delta(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon(x),\ \delta_\varepsilon(x)=\begin{cases}0,\ x<-\varepsilon,\\ 1/\varepsilon,\ -\varepsilon\le x\le 0,\\ 0,\ x>0.\end{cases}$$

Тогда $p_\varepsilon(x,t)=P(t)\delta_\varepsilon(x-l)$, $p(x,t)=P(t)\delta(x-l)$.

Уравнение (61) примет вид

$$a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=-\frac{1}{\rho S}P(t)\delta(x-l)$$

или

$$a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=-Q(t)\delta(x-l), \qquad (66)$$

где $Q(t)=-\dfrac{1}{\rho S}P(t)$.

Таким образом, математическая модель, описывающая вынужденные продольные колебания однородного стержня при заданных условиях включает уравнение (66), граничные условия

$$u(0,t)=0,\ \frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=0$$

и начальные условия (9).



Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

Прежде чем приступить к решению поставленной задачи, докажем следующее свойство импульсной функции: для произвольной непрерывной функции $f(x)$ справедливо равенство

$$\int_{-l}^{0} f(x)\delta(x)dx = f(0). \qquad (67)$$

Действительно, так как

$$\int_{-l}^{0} f(x)\delta_{\varepsilon}(x)dx = \int_{-\varepsilon}^{0} f(x)\frac{1}{\varepsilon}dx = f(x_*), -\varepsilon < x_* < 0.$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем равенство (67).

Рассмотрим $\int_{0}^{l} f(x)\delta(x-l)dx$. Произведем в данном интеграле замену переменной по формуле $x = z + l$, получим с учетом (67)

$$\int_{0}^{l} f(x)\delta(x-l)dx = \int_{-l}^{0} f(z+l)\delta(z)dz = f(l). \qquad (68)$$

Решение уравнения (66) будем искать в виде ряда $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)T_k(t)$, где в качестве $X_k(x)$ выберем собственные функции задачи о свободных продольных колебаниях стержня, левый конец которого жестко заделан, а правый свободен (формулы (26)).

Принимая во внимание, что

$$\int_{0}^{l} Q(t)\delta(x-l)X_m(x)dx = \frac{1}{\rho S}P(t)\int_{-\varepsilon}^{0}\delta(x-l)X_m(x)dx = \frac{1}{\rho S}P(t)X_m(l) =$$
$$= \frac{1}{\rho S}P(t)\sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{2}\right),$$

а $\int_{0}^{l} X_k(x)X_m(x)dx = \int_{0}^{l}\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{2}\right)dx = \frac{l}{2}$,

получим следующее уравнение для определения функций $T_k(t)$:

$$T_m''(t) + p_m^2 T_m(t) = \frac{2}{\rho S l}P(t)\sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{2}\right), \quad m = 0,1,2.... \qquad (69)$$

Рассмотрим воздействие на стержень внезапно приложенной силы



Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

$$P(t)=\begin{cases}0,\ t<0,\\ P_0,\ t\ge 0.\end{cases}$$

Пусть в начальный момент времени стержень недеформирован и неподвижен, тогда начальные условия (9) примут вид

$$u(x,0)=0,\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0.$$

Тогда $A_k=B_k=0$.

Частное решение уравнения (63) будем искать в виде (59), тогда

$$T_m^0(t)=\frac{4P_0}{\rho Sa(2m+1)\pi}\sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{2}\right)\int_0^t\sin\left(\frac{(2m+1)a\pi}{2l}(t-\tau)\right)d\tau=$$

$$=\frac{8P_0l}{\rho S(a(2m+1)\pi)^2}\sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{2}\right)\left(1-\cos\left(\frac{(2m+1)a\pi}{2l}t\right)\right).$$

Таким образом, решение поставленной задачи следующее

$$u(x,t)=\frac{8P_0l}{\rho S(a\pi)^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2}\sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{2l}x\right)\times$$

$$\times\left(1-\cos\left(\frac{(2m+1)a\pi}{2l}t\right)\right). \qquad (70)$$

Подставляя в формулу (70) $x=l$, получим выражение для определения перемещения правого конца стержня

$$u(l,t)=\frac{8P_0l}{\rho S(a\pi)^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2}\left(1-\cos\left(\frac{(2m+1)a\pi}{2l}t\right)\right).$$

Так как для момента времени $t=\dfrac{2l}{a}$ выполняются равенства

$$\cos\left(\frac{(2m+1)a\pi}{2l}t\right)\Bigg|_{t=\frac{2l}{a}}=\cos\big((2m+1)\pi\big)=-1,$$

то в данный момент времени правый конец стержня имеет максимальное перемещение, определяемое формулой

$$u_{\max}=\frac{16P_0l}{\rho S(a\pi)^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2}=\frac{2P_0l}{\rho Sa^2}=\frac{2P_0l}{ES}.$$

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

Пусть теперь приложенная сила меняется по закону $P(t) = P_0 \cos\omega t$, где $P_0$, $\omega$ - амплитуда и частота внешней силы, соответственно. В этом случае уравнение для определения функций $T_k(t)$ имеет вид:

$$T_m''(t) + p_m^2 T_m(t) = \frac{2P_0}{\rho Sl} \sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{2}\right) \cos\omega t, \qquad (71)$$

где $p_k$ определяются формулой (25).

Частное решение уравнения (71) определяется формулой

$$T_m^0(t) = \frac{2P_0}{\rho Sl} \sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{2}\right) \frac{\cos p_m t - \cos\omega t}{\omega^2 - p_m^2}, \; m = 0,1,2...$$

Тогда решение для перемещения примет вид:

$$u(x,t) = \frac{2P_0}{\rho Sl} \sum_{m=0}^{\infty} \sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{2l} x\right) \frac{\cos p_m t - \cos\omega t}{\omega^2 - p_m^2}. \qquad (72)$$

Из выражения (72) следует, что если частота возмущающей силы $\omega$ близка или совпадает с одной из собственных частот $p_m$, то будет наблюдаться явление резонанса, которое заключается в резком возрастании амплитуды колебания.

Пусть, например, $\omega \to p_k$, тогда $\lim\limits_{\omega \to p_k} \frac{\cos p_k t - \cos\omega t}{\omega^2 - p_k^2} = \frac{t \sin p_k t}{2 p_k}$ и выражение для перемещения (72) перепишется в виде

$$u(x,t) = \frac{P_0}{\rho Sl p_k} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2l} x\right) t \sin p_k t +$$

$$+ \frac{2P_0}{\rho Sl} \sum_{\substack{m=0, \\ m \neq k}}^{\infty} \sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{2l} x\right) \frac{\cos p_m t - \cos\omega t}{\omega^2 - p_m^2}.$$

Из последнего видно, что абсолютная величина первого слагаемого неограниченно возрастает с ростом времени.

Поскольку, как было показано в разделе четыре, амплитуды различных форм колебаний быстро уменьшаются с увеличением $k$, то наиболее ощутимым в данном случае будет проявление резонанса при $\omega \to p_0$, то есть при $k = 0$.

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

## 8. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что такое колебания?

2. Какие колебания называются свободными?

3. Какие колебания называются вынужденными?

4. Какие колебания называются продольными?

5. В чем заключаются две основные задачи теории колебаний упругих систем?

6. Что называется стержнем?

7. Что называется осью стержня?

8. Какая гипотеза принимается при моделировании продольных колебаний упругих стержней?

9. В каком случае оправдано применение этой гипотезы?

10. Написать уравнение свободных продольных колебаний упругого стержня постоянного сечения.

11. Написать уравнение вынужденных продольных колебаний упругого стержня постоянного сечения под действием внешней распределенной нагрузки.

12. Что должна включать в себя математическая модель, описывающая продольные колебания упругого стержня?

13. Приведите математическую запись граничного условия для конца стержня, когда:

1) конец закреплен;

2) конец свободен;

3) конец соединен упругой пружиной с неподвижной опорой;

4) к концу прикреплен груз.

14. Опишите этапы решения задачи о свободных продольных колебаниях стержня методом Фурье.

15. Что называется уравнением частот?

16. Что такое частота основного тона?

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

17. Что определяет собственная функция, получаемая при решении задачи о колебаниях методом Фурье?

18. Приведите математическую модель, описывающую свободные продольные колебания упругого стержня, один конец которого заделан, а второй свободен.

19. Найдите значения частот и собственные функции в задаче о свободных продольных колебаниях упругого стержня, один конец которого заделан, а второй свободен.

20. Дайте определение системы функций, ортогональных на отрезке.

21. Выведите формулы для определения неизвестных постоянных в общем решении задачи о свободных продольных колебаниях упругого стержня, один конец которого заделан, а второй свободен.

22. Покажите, что процесс свободных продольных колебаний упругого стержня, один конец которого заделан, а второй свободен, является периодическим. Чему равен период этого колебания?

23. Найдите значения частот и собственные функции в задаче о свободных продольных колебаниях упругого стержня, оба конца которого заделаны.

24. Найдите значения частот и собственные функции в задаче о свободных продольных колебаниях упругого стержня, оба конца которого свободны.

25. Найдите значения частот и собственные функции в задаче о свободных продольных колебаниях упругого стержня, один конец которого заделан, а ко второму прикреплен груз.

26. Найдите значения частот и собственные функции в задаче о свободных продольных колебаниях упругого стержня, один конец которого свободен, а второй прикреплен к неподвижной опоре упругой пружиной.

27. Выведите формулы для определения неизвестных постоянных в общем решении задачи о свободных продольных колебаниях упругого стержня, один конец которого заделан, а ко второму прикреплен груз.

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

28. Опишите этапы решения задачи о вынужденных продольных колебаниях стержня методом Фурье.

## 9. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Движущийся вдоль оси $x$ с постоянной скоростью $v$ стержень останавливается при внезапном закреплении его конца $x=0$. Таким образом, начальные условия имеют вид: $u(x,0)=0, \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t}=v$. Найти выражения для возникающих при этом перемещений.

Ответ: $u(x,t)=\dfrac{8vl}{\pi^2 a}\sum\limits_{m=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2m+1)^2}\sin\left(\dfrac{(2m+1)\pi}{2l}x\right)\sin\left(\dfrac{(2m+1)\pi a}{2l}t\right)$.

2. Стержень длины $l$, жестко закрепленный по обоим концам, нагружается в середине пролета сосредоточенной продольной силой $P_0$ (рис. 10). Исследовать колебания, которые возникнут в стержне, если убрать силу $P_0$.

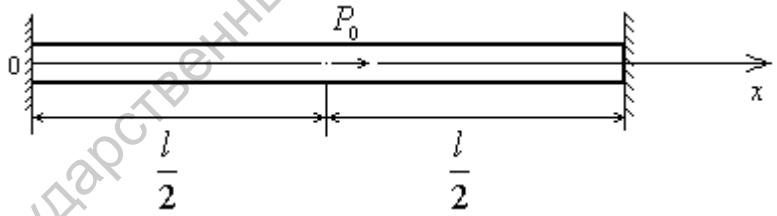


Рис. 10.

Ответ: $u(x,t)=\dfrac{4\varepsilon_0 l}{\pi^2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{l}x\right)\cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi a}{l}t\right)$.

Указание: в качестве начальных перемещений следует взять функцию

$$u(x,0)=\begin{cases}\varepsilon_0 x, & 0\le x\le,\\ \varepsilon_0(l-x), & l/2\le x\le l.\end{cases}$$

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

3. В стержне, движущемся вдоль оси $x$ с постоянной скоростью $v$ внезапно закрепляется поперечное сечение, лежащее в середине пролета ($x = l/2$). Найти выражение для перемещений при возникающих в результате мгновенной фиксации свободных колебаниях.

Ответ: $u(x,t) = \dfrac{4vl}{\pi^2 a}\sum\limits_{m=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2m+1)^2}\cos\left(\dfrac{(2m+1)\pi}{2l}x\right)\sin\left(\dfrac{(2m+1)\pi a}{2l}t\right)$.

4. Определить динамические перемещения при установившихся вынужденных колебаниях стержня, один конец которого жестко закреплен, а второй свободен (рис. 9), если к незакрепленному концу стержня прикладывается изменяющаяся во времени сила $P(t) = P_1 \sin\omega t$.

Ответ: $u(x,t) = \dfrac{2P_1}{\rho S l}\sum\limits_{m=0}^{\infty}\sin\left(\dfrac{(2m+1)\pi}{2}\right)\sin\left(\dfrac{(2m+1)\pi}{2l}x\right)\dfrac{\dfrac{\omega}{p_m}\sin p_m t - \sin\omega t}{\omega^2 - p_m^2}$,

$p_m = \dfrac{(2m+1)\pi a}{2l}$.

5. Пусть в середине пролета стержня с жестко закрепленными концами внезапно прикладывается постоянная продольная сила $P_0$ (рис. 10). Определить продольные динамические перемещения стержня, который в начальный момент времени находился в покое.

Ответ:

$$u(x,t) = \frac{2P_0 l}{\rho S(a\pi)^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)^2}\sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{l}x\right)\left(1-\cos\left(\frac{(2m+1)a\pi}{l}t\right)\right).$$

6. Определить динамические перемещения при вынужденных установившихся продольных колебаниях жестко закрепленного на конце $x = 0$ стержня и не закрепленного на конце $x = l$, если на него действует равномерно распределенная по его длине продольная сила $\dfrac{P_1}{l}\sin\omega t$.

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

Ответ: $u(x,t)=\dfrac{4P_1\sin\omega t}{\pi\rho Sl}\sum\limits_{m=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2m+1)(\omega^2-p_m^2)}\sin\left(\dfrac{(2m+1)\pi}{2l}x\right)$,

$p_m=\dfrac{(2m+1)\pi a}{2l}$.

7. Определить продольные динамические перемещения стержня, оба конца которого не закреплены, и к концу $x=l$ которого внезапно прикладывается продольная сила $P_0$.

Ответ: $u(x,t)=\dfrac{P_0t^2}{2\rho Sl}+\dfrac{2P_0l}{\rho S(a\pi)^2}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^m}{m^2}\cos\left(\dfrac{m\pi}{l}x\right)\left(1-\cos\left(\dfrac{ma\pi}{l}t\right)\right)$.

8. Буровая штанга представляет собой стальную трубу длиной 101,6 м. Рассматривая штангу как стержень, с незакрепленными концами, определить период колебания $T_1$ основного тона. Найти перемещение $\delta$ конца $x=l$ в момент времени $t=\dfrac{T_1}{2}$, обусловленное внезапным приложением к этому концу растягивающего напряжения $\sigma=\dfrac{P_0}{S}=2.11\cdot10^7$ Па. Принять, что $E=2.11\cdot10^{11}$ Па, $\rho=7.85\cdot10^{31}\ H\cdot c^2/м^4$.

Ответ: $T_1=0.47$ с, $\delta=1.02\cdot10^{-2}$ м.

Указание: воспользоваться решением задачи 7.

9. Определить динамические перемещения при вынужденных продольных колебаниях жестко закрепленного на конце $x=l$ стержня и не закрепленного на конце $x=0$, если в среднем сечении стержня $x=l/2$ внезапно приложена постоянная продольная сила $P_0$.

Ответ:

$$u(x,t)=\frac{8P_0l}{\rho S(a\pi)^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos((2m+1)\pi/4)}{(2m+1)^2}\cos\left(\frac{(2m+1)\pi}{2l}x\right)\left(1-\cos\left(\frac{(2m+1)a\pi}{2l}t\right)\right).$$

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

10. К концу $x=0$ стержня, оба конца которого не закреплены, прикладывается продольная сила $P(t)=P_1 t$, изменяющаяся по линейному закону во времени. Определить динамические продольные перемещения стержня, если в начальный момент времени стержень находился в покое.

Ответ: $u(x,t)=\dfrac{P_1 t^3}{6\rho S l}+\dfrac{2P_1 l}{\rho S(a\pi)^2}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{1}{m^2}\cos\left(\dfrac{m\pi}{l}x\right)\left(t-\dfrac{l}{m\pi a}\sin\left(\dfrac{ma\pi}{l}t\right)\right)$.

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

## СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. - М.: Высшая школа, 1970. - 712 с.
2. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний: Учеб. пособие для вузов. - Изд. 3-е доп. и переработ. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991. – 256 с.
3. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. - Изд. 3-е доп. и переработ. Л., «Машиностроение», 1976. - 320 с.
4. Пфейффер П. Колебания упругих тел.- М., «КомКнига», 2006. – 154 с.
5. Стрелков С.П. Введение в теорию колебаний.- Изд. 2-е перераб., учебное пособие для вузов – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1964. –440с.
6. Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. – М., «Машиностроение», 1985. – 472 с.
7. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – Изд. 5-е стереатипное, учебное пособие для вузов – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1977. – 736 с.


Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение…….. 3
1. Вывод уравнения продольных колебаний упругого стержня…… 6
2. Постановка задачи о продольных колебаниях стержня…….. 9
3. Решение уравнения свободных колебаний методом Фурье……... 11
4. Свободные колебания стержня с одни закрепленным концом……. 14
5. Частоты и формы свободных продольных колебаний стержня для различных случаев закрепления концов……. 20
6. Свободные колебания стержня с массой на конце……. 28
7. Вынужденные продольные колебания стержня…….. 32
8. Вопросы для самопроверки……... 38
9. Задачи для самостоятельного решения……. 40
Список рекомендуемой литературы……. 44

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского