

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической теории упругости и биомеханики

Применение уточненных граничных условий в задаче о
распространении изгибных волн в пластине при действии краевой
нагрузки

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 431 группы
направления 01.03.03 — Механика и математическое моделирование
механико-математического факультета

Мартынова Кирилл Андреевича

Научный руководитель
проф. каф. МТУиБМ, д.ф.-м.н. _____ М.В. Вильде

Зав. кафедрой
зав. каф., д.ф.-м.н., профессор _____ Л.Ю. Коссович

Саратов 2025

Введение

Настоящая бакалаврская работа посвящена изучению распространения изгибных волн в пластине на основе уточненной теории изгиба пластин с уточненными граничными условиями.

Актуальность темы. Исследование волн, распространяющихся вдоль края пластины (краевых волн), представляет интерес вследствие возможности применения таких волн в области неразрушающего контроля по аналогии с волнами Лэмба [1]. В низкочастотном диапазоне для описания краевых волн можно использовать прикладные двумерные теории пластин. В этом случае краевые волны с математической точки зрения представляют собой нетривиальное решение задачи о распространении гармонической волны, удовлетворяющее однородным условиям на краю пластины и экспоненциально затухающее при удалении от края. Впервые решение, описывающее такую волну на основе теории изгиба пластин Кирхгофа, было получено Ю. К. Коенковым [2]. Сравнение решения, полученного в [2], с решением трехмерной задачи показало, что оно имеет ограниченную область применимости по частоте. Это вызвало интерес к использованию уточненных теорий пластин для описания изгибной краевой волны. В недавней работе [3] построены асимптотически корректные граничные условия теории изгиба пластин, имеющие тот же порядок точности, что и уравнение теории с приведенной инерцией.

Целью данной работы является исследование распространения изгибных волн в пластине при действии краевой нагрузки на основе уточненной теории изгиба пластин с уточненными граничными условиями, полученными в работе [3]. В отличие от [3], в данной работе предложена матричная форма записи граничных условий, облегчающая составление дисперсионного уравнения и выполнение вычислений.

Задачи работы заключаются в следующем:

1. Сформулировать постановку задачи о действии изгибной краевой нагрузки на торец полубесконечной пластины на основе уточненной теории изгиба пластин с уточненными граничными условиями.
2. Получить дисперсионное уравнение изгибной краевой волны, построить дисперсионную кривую и исследовать её поведение в зависимости от порядка приближения.

3. Получить решение в изображениях для задачи с краевой нагрузкой, применяя интегральные преобразования Лапласа и Фурье.

4. Выполнить обращение полученного решения и выделить поле краевой волны.

5. Выполнить численные расчеты поля краевой волны, сравнить полученные результаты с решением задачи по трехмерной теории упругости и исследовать области применимости приближенных теорий.

6. Выполнить расчеты полного решения задачи о действии краевой нагрузки, сравнить его с вкладом краевой волны и с экспериментальными данными.

Материалами исследования являются уточненная теория изгиба пластин с уточненными граничными условиями и данные экспериментов о распространении краевых волн в пластине на торце.

Научная значимость работы состоит в демонстрации применимости асимптотически корректных граничных условий при описании распространения изгибных волн в пластине на основе уточненной теории изгиба пластины.

Структура и объем работы. Бакалаврская работа состоит из введения, пяти разделов, заключения, списка используемых источников, включающего 20 наименований. Работа изложена на 47 листах машинописного текста, содержит 21 рисунок.

Основное содержание работы

Во *введении* описывается актуальность проблемы исследования возможности применения новых уточненных граничных условий при описании изгибной краевой волны в пластине, формулируется цель исследования и ставятся задачи.

В *первом разделе* ставится задача о динамическом изгибе тонкой пластины толщины $2h$, срединная плоскость которой занимает в декартовых координатах (x_1, x_2) область $-\infty < x_1 \leq 0, -\infty < x_2 < \infty$. Для описания изгибной деформации пластины применяется классическая теория изгиба пластин Кирхгофа [4]. В соответствии с данной теорией, колебания пластины описываются уравнением Софии Жермен

$$\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\Delta^2 w + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (1)$$

Вводятся безразмерные переменные:

$$x_i^* = \frac{x_i}{h}, \quad t^* = \frac{c_2}{h}t, \quad i = 1, 2, \quad (2)$$

где $c_2 = \sqrt{\frac{E}{2(1+\nu)\rho}}$ — скорость сдвиговой волны, и безразмерные величины

$$w^* = \frac{w}{h}, \quad M_{ij}^* = \frac{Eh^2}{2(1+\nu)}M_{ij}, \quad Q_{ij}^* = \frac{Eh}{2(1+\nu)}Q_{ij} \quad i, j = 1, 2. \quad (3)$$

Уравнение (1) в безразмерных переменных принимает вид

$$\Delta^2 w + k_b^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad k_b^2 = \frac{3(1-\nu)}{2}. \quad (4)$$

Граничные условия свободного края в перемещениях при $x_1 = 0$ записываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} &= 0, \\ \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial x_2^2} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Если на краю пластины приложена заданная нагрузка, то граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} &= -\frac{k_b^2}{2}M_0(x_2, t), \\ \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial x_2^2} &= -\frac{k_b^2}{2} \left(Q_0(x_2, t) + \frac{\partial H_0(x_2, t)}{\partial x_2} \right), \end{aligned} \quad (6)$$

Теория изгиба пластин применима в случае, когда характерная длина волны λ значительно больше толщины пластины $2h$. Тогда выполняются неравенство

$$\gamma = \frac{2\pi h}{\lambda} \ll 1, \quad (7)$$

где γ — малый параметр, который представляет собой волновое число, умноженное на полутолщину пластины h .

Асимптотический анализ, выполненный в работе [5], показывает, что уравнения классической теории Кирхгофа имеют погрешность $O(\gamma^2)$. Также

в работе [5] получено уточненное уравнение теории изгиба пластин

$$\Delta^2 w + k_b^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + a_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Delta w) + a_2 \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + a_3 \frac{\partial^4}{\partial t^4} (\Delta w) \right) = 0. \quad (8)$$

Здесь

$$a_1 = \frac{7\nu - 17}{15(1 - \nu)} j_1, \quad a_2 = \frac{422 - 424\nu - 33\nu^2}{1050(1 - \nu)} j_2, \quad a_3 = \frac{32 - 64\nu + 197\nu^2}{15750(1 - \nu)} j_3, \quad (9)$$

где $j_i = 1$ если $i \leq n$, $j_i = 0$ если $i > n$ ($i = 0, 1, 2, 3$), $n = 0, 1, 2, 3$ – порядок приближения. Уравнение (8) имеет асимптотическую погрешность $O(\gamma^{2(n+1)})$ [5]. Для изучения волн, распространяющихся вдоль края пластины, требуется уточнить не только уравнения, но и граничные условия (5), (6).

Во *втором разделе* рассматривается постановка уточненных граничных условий. Анализ показывает, что граничные условия в классической теории Кирхгофа (5), (6) имеют погрешность $O(\gamma)$. В работе [6] получены уточненные граничные условия свободного края, имеющие погрешность $O(\gamma^2)$. В безразмерных переменных (2), (3) эти условия имеют вид

$$\begin{aligned} (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - \Delta w - c_{0,0}^I \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial x_2^2} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left((1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \Delta w \right) &= 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где $c_{0,0}^I = 3(1 - \nu)D_{GK}$, D_{GK} – постоянная Гольденвейзера–Колос, выражение для которой может быть найдено в [3, 5, 6]. Очевидно, что использование уточненных граничных условий (10) недостаточно для уточнения описания изгибной краевой волны, поскольку они имеют такую же погрешность, как и уравнение классической теории Кирхгофа.

В недавней работе [3] получены уточненные граничные условия свободного края для теории изгиба пластин, имеющие асимптотическую погрешность $O(\gamma^{2(n+1)})$, где $n = 0, 1, 2, 3$ – порядок приближения. Заметим, что погрешность этих условий соответствует асимптотической погрешности уравнения (8). В отличие от работы [3], в данной работе применяется матричная форма записи уточненных граничных условий. Для записи граничных усло-

вий в нулевом приближении вводятся операторные матрицы, имеющие размерность 1×2 :

$$R_{bc}^{(0)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} & \Delta \end{pmatrix}, \quad T_{bc}^{(0)} = \begin{pmatrix} \Delta \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2}{\partial t^2} \end{pmatrix}, \quad (11)$$

и матрицы коэффициентов, имеющие размерность 2×1 :

$$B_0^I = \begin{pmatrix} 1 - \nu \\ -1 \end{pmatrix}, \quad B_0^{II} = \begin{pmatrix} 1 - \nu \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C_0^I = \begin{pmatrix} c_{0,0}^I \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_0^{II} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

С использованием следа произведений полученных матриц, граничные условия (10) записываются в виде

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left(B_0^I R_{bc}^{(0)} \right) w - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\text{Tr} \left(C_0^I R_{bc}^{(0)} \right) w \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\text{Tr} \left(B_0^{II} R_{bc}^{(0)} \right) w \right) - \text{Tr} \left(C_0^{II} T_{bc}^{(0)} \right) w &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь слагаемое $\text{Tr} \left(C_0^{II} T_{bc}^{(0)} \right) w$ равно нулю.

Для того чтобы записать следующие приближения, вводятся матрицы

$$B^I = \begin{pmatrix} b_{0,0}^I & b_{0,1}^I & b_{0,2}^I & b_{0,3}^I \\ b_{1,0}^I & b_{1,1}^I & b_{1,2}^I & b_{1,3}^I \\ 0 & b_{2,1}^I & b_{2,2}^I & b_{2,3}^I \\ 0 & 0 & b_{3,2}^I & b_{3,3}^I \\ 0 & 0 & 0 & b_{4,3}^I \end{pmatrix}, \quad B^{II} = \begin{pmatrix} b_{0,0}^{II} & b_{0,1}^{II} & b_{0,2}^{II} & b_{0,3}^{II} \\ b_{1,0}^{II} & b_{1,1}^{II} & b_{1,2}^{II} & b_{1,3}^{II} \\ 0 & b_{2,1}^{II} & b_{2,2}^{II} & b_{2,3}^{II} \\ 0 & 0 & b_{3,2}^{II} & b_{3,3}^{II} \\ 0 & 0 & 0 & b_{4,3}^{II} \end{pmatrix}, \quad (14)$$

и

$$C^I = \begin{pmatrix} c_{0,0}^I & c_{0,1}^I & c_{0,2}^I & c_{0,3}^I \\ 0 & c_{1,1}^I & c_{1,2}^I & c_{1,3}^I \\ 0 & 0 & c_{2,2}^I & c_{2,3}^I \\ 0 & 0 & c_{3,2}^I & c_{3,3}^I \\ 0 & 0 & 0 & c_{4,3}^I \end{pmatrix}, \quad C^{II} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_{0,2}^{II} & c_{0,3}^{II} \\ 0 & 0 & c_{1,2}^{II} & c_{1,3}^{II} \\ 0 & 0 & c_{2,2}^{II} & c_{2,3}^{II} \\ 0 & 0 & c_{3,2}^{II} & c_{3,3}^{II} \\ 0 & 0 & 0 & c_{4,3}^{II} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Элементы этих матриц, расположенные в угловой подматрице размерностью 2×1 , соответствуют элементам матриц (12), остальные коэффициенты могут

быть найдены в работе [3]. Кроме того, вводятся операторные матрицы

$$R_{bc} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \Delta & \Delta & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} \Delta & \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \Delta & \frac{\partial^2}{\partial t^2} & 0 & 0 \\ \frac{\partial^6}{\partial x_2^6} \Delta & \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} \Delta & \frac{\partial^4}{\partial x_2^2 \partial t^2} & \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta & 0 \\ \frac{\partial^8}{\partial x_2^8} \Delta & \frac{\partial^6}{\partial x_2^6} \Delta & \frac{\partial^6}{\partial x_2^4 \partial t^2} & \frac{\partial^4}{\partial x_2^2 \partial t^2} \Delta & \frac{\partial^4}{\partial t^4} \Delta \end{pmatrix} \quad (16)$$

и

$$T_{bc} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \Delta & \frac{\partial^2}{\partial t^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} \Delta & \frac{\partial^4}{\partial x_2^2 \partial t^2} & \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta & 0 & 0 \\ \frac{\partial^6}{\partial x_2^6} \Delta & \frac{\partial^8}{\partial x_2^4 \partial t^2} & \frac{\partial^4}{\partial x_2^2 \partial t^2} \Delta & \frac{\partial^4}{\partial t^4} & 0 \\ \frac{\partial^8}{\partial x_2^8} \Delta & \frac{\partial^6}{\partial x_2^6 \partial t^2} & \frac{\partial^6}{\partial x_2^4 \partial t^2} \Delta & \frac{\partial^6}{\partial x_2^2 \partial t^4} & \frac{\partial^4}{\partial t^4} \Delta \end{pmatrix}, \quad (17)$$

а также оператор $S_{p,q}(A)$, выделяющий из матрицы A подматрицу, состоящую из элементов, расположенных в первых p строках и в первых q столбцах. С учетом введенных обозначений, уточненные граничные условия для n -ого приближения ($n = 0, 1, 2, 3$) записываются в виде

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left(B_n^I R_{bc}^{(n)} \right) w - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\text{Tr} \left(C_n^I R_{bc}^{(n)} \right) w \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\text{Tr} \left(B_n^{II} R_{bc}^{(n)} \right) w - \text{Tr} \left(C_n^{II} T_{bc}^{(n)} \right) w \right) &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Уточненные граничные условия нагруженного края имеют вид

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left(B_n^I R_{bc}^{(n)} \right) w - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\text{Tr} \left(C_n^I R_{bc}^{(n)} \right) w \right) &= M_g(x_2, t), \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\text{Tr} \left(B_n^{II} R_{bc}^{(n)} \right) w - \text{Tr} \left(C_n^{II} T_{bc}^{(n)} \right) w \right) &= N_g(x_2, t), \end{aligned} \quad (19)$$

где $M_g(x_2, t)$, $N_g(x_2, t)$ – уточненные выражения для нагрузок, которые в случае, когда на краю пластины приложен скручивающий момент, имеют вид

$$\begin{aligned} M_g &= -\frac{k_b^2}{2} \left(\kappa_0 \frac{\partial H_0}{\partial x_2} + j_1(\kappa_{1,0} + \nu \kappa_{1,1}) \frac{\partial^3 H_0}{\partial x_2^3} \right), \\ N_g &= -\frac{k_b^2}{2} \left(\frac{\partial H_0}{\partial x_2} + j_1 \frac{12 - \nu}{15} \frac{\partial^3 H_0}{\partial x_2^3} \right), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\kappa_0 = 1.26049775, \quad \kappa_{1,0} = 0.76648688, \quad \kappa_{1,1} = -0.08732051.$$

Раскрывая след произведения матриц в (18), нетрудно убедиться, что они соответствуют уточненным граничным условиям, построенным в [3].

В *третьем разделе* выводится дисперсионное уравнение изгибной краевой волны и исследуется погрешность его решения по сравнению с трехмерной теорией. Прогиб пластины ищется в виде гармонической волны [7], распространяющейся в направлении оси x_2 и затухающей при $x_1 \rightarrow \infty$. Строится общее решение уравнения (8) в виде

$$w = (C_1 e^{r_1 x_1} + C_2 e^{r_2 x_1}) e^{i(\omega t - \gamma x_2)}. \quad (21)$$

где C_1, C_2 — константы, ω — круговая частота, γ — волновое число.

В результате подстановки (21) в граничные условия (18) получено дисперсионное уравнение

$$\begin{aligned} & \left[\text{Tr} \left(B_n^I R_1^{(n)} \right) - r_1 \text{Tr} \left(C_n^I R_1^{(n)} \right) \right] \left[r_2 \text{Tr} \left(B_n^{II} R_2^{(n)} \right) - \text{Tr} \left(C_n^{II} T_2^{(n)} \right) \right] - \\ & - \left[r_1 \text{Tr} \left(B_n^{II} R_1^{(n)} \right) - \text{Tr} \left(C_n^{II} T_1^{(n)} \right) \right] \left[\text{Tr} \left(B_n^I R_2^{(n)} \right) - r_2 \text{Tr} \left(C_n^I R_2^{(n)} \right) \right] = 0, \end{aligned} \quad (22)$$

где матрицы $R_j^{(n)}$ и $T_j^{(n)}$ получаются из операторных матриц (16) и (17) в процессе подстановки в них (21).

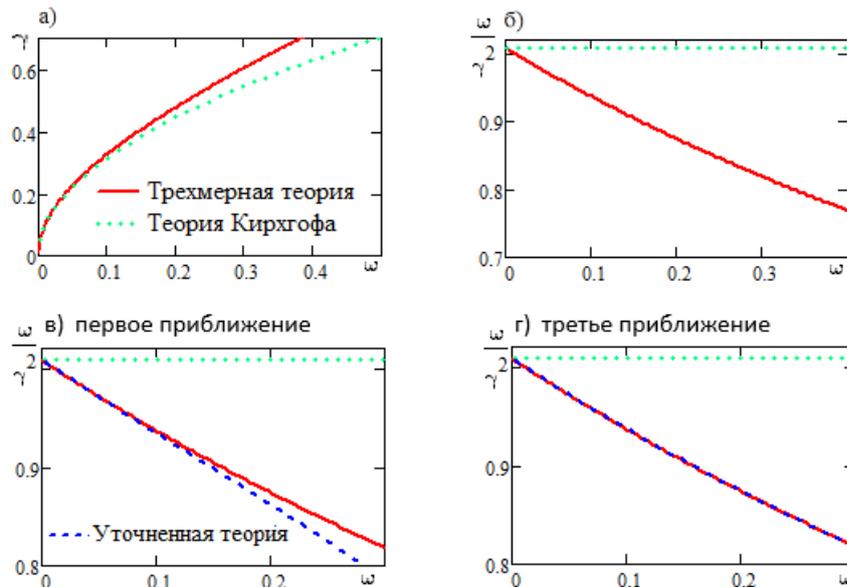


Рисунок 1 — Сравнение дисперсионных характеристик, полученных с использованием классической теории изгиба пластин, уточненной теории изгиба пластин с уточненными граничными условиями и трехмерной теории

Уравнение (22) решается численно в программном пакете MathCad [8]. При этом матричная форма записи граничных условий значительно облегчает составление программы, поскольку позволяет использовать стандартные процедуры умножения матриц и вычисления следа матрицы. На рисунке 1 приведено сравнение дисперсионной кривой, являющейся решением уравнения (22), с решением трехмерной задачи, полученным численно-аналитическим методом, описанным в работах [9]. Классическая теория Кирхгофа (рисунки 1,а,б) описывает нулевой член асимптотического приближения дисперсионной кривой при $\gamma \rightarrow 0$, $\omega \rightarrow 0$. Первое приближение (рисунок 1,в), описывает следующий член, третье приближение (рисунок 1,г) позволяет получить практически точное совпадение с трехмерным решением. В работе представлены графики, показывающие, что применение уточненного уравнения с классическими граничными условиями недостаточно для точного описания изгибной краевой волны.

В четвертом разделе получено решение нестационарной задачи о возбуждении изгибных волн скручивающим моментом, приложенным на краю $x_1 = 0$ в момент времени $t = 0$. Для решения задачи применяются интегральные преобразования Лапласа по времени и Фурье по координате x_2 [10]. Обращение решения в изображениях выполняется для скорости поворота нормального элемента на торце пластины $\theta(x_2, t)$.

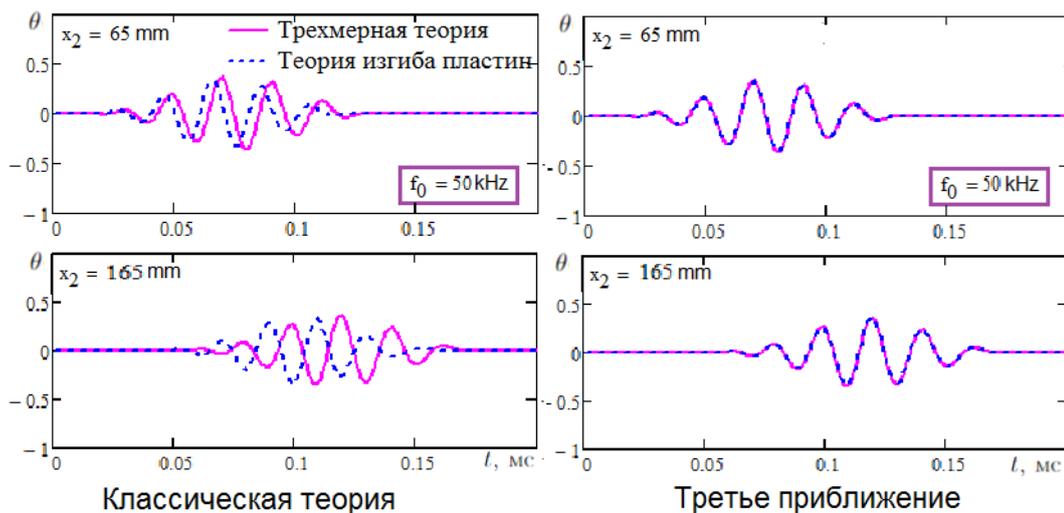


Рисунок 2 — Сравнение результатов для вклада краевой волны, полученных по трехмерной теории и по различным приближениям теории изгиба пластин для частоты 50 кГц

При обращении преобразования Фурье применяется контурное интегрирование. В результате получено решение, состоящее из двух слагаемых: функция $\theta_E(x_2, t)$ определяет вклад изгибающей краевой волны в волновое поле, которое возникает при действии краевой нагрузки, а функция $\theta_T(x_2, t)$, соответствующая интегралам по берегам разрезов, определяет вклад изгибающей волны Лэмба и затухающих погранслоев в окрестности области приложения нагрузки.

В пятом разделе приведены численные результаты. При выполнении численных расчетов были выбраны параметры задачи, соответствующие имеющимся данным экспериментального исследования краевых волн в алюминиевой пластине с размерами $600 \times 400 \times 4.97 \text{ мм}^3$. Упругие волны возбуждались с помощью пьезоупругого актуатора с размерами $30 \times 5 \times 0.25 \text{ мм}^3$, приклеенного к поверхности пластины вблизи края. В экспериментах был использован оптический виброметр с лазерным источником излучения (Polytec PSV-500-NV). Линии сканирования располагались на торце пластины. По данным, измеренным виброметром, определялись экспериментальные зависимости $\theta(t)$ для каждой из трех линий.

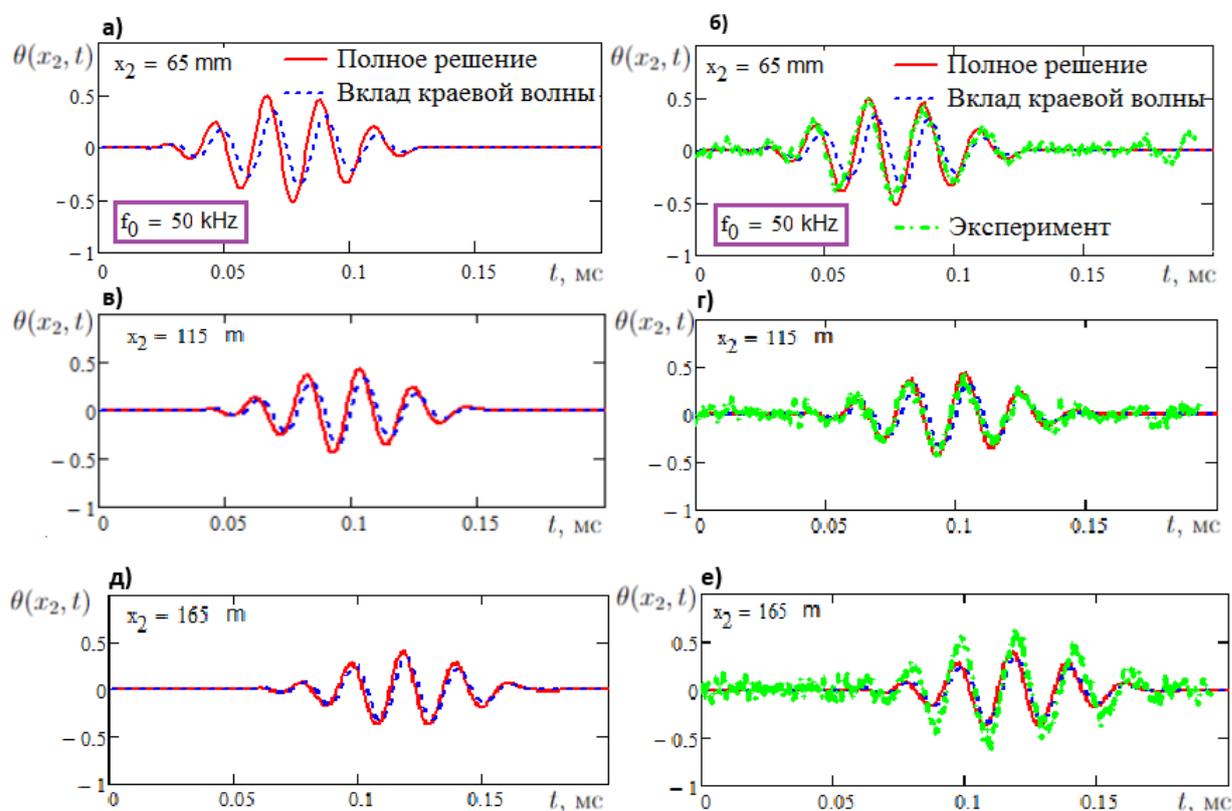


Рисунок 3 — Сравнение полного решения и вклада краевой волны с экспериментальными данными

Действие актуатора моделировалось скручивающим моментом, приложенным на торце пластины. На рисунке 2 вклад краевой волны $\theta_E(x_2, t)$ на частоте 50 кГц, для которой имеются экспериментальные данные, сравнивается с решением трехмерной задачи теории упругости для этой же величины, полученным численно-аналитическим методом, описанным в [9]. Здесь и далее на рисунках представлена величина $\theta_E(x_2, t) \cdot 10^4$. Как видно из рисунка 2, на данной частоте классическая теория неприменима, однако третье приближение обеспечивает хорошее совпадение с трехмерной теорией. На рисунке 3 представлено сравнение полного решения и вклада краевой волны с экспериментальными данными. В первых двух точках наблюдается хорошее соответствие между полным решением и экспериментом. Также можно видеть, что в третьей точке полное решение в основном определяется вкладом краевой волны. Увеличение экспериментальной амплитуды в третьей точке измерения, по-видимому, связано с влиянием неактивного актуатора, изменяющего упругие свойства в области, по которой идет волна.

Заключение

В данной работе предложена более удобная для проведения выкладок матричная форма записи асимптотически корректных уточненных граничных условий и исследована возможность их применения при описании изгибных волн в пластинах. Получено решение нестационарной задачи о действии скручивающего момента, приложенного на краю пластины. Сравнение с решением трехмерной задачи показало, что использование уточненного уравнения с уточненными граничными условиями в третьем приближении позволяет использовать двумерную теорию в диапазоне частот приблизительно в десять раз шире, чем область применения классической теории изгиба пластин Кирхгофа. Построенные в данной работе графики для различных частот позволяют выбрать порядок приближения, необходимый для получения решения с необходимой для практических целей точностью. В частности, для описания изгибной краевой волны в пластине толщиной 5 мм на частоте 50 кГц следует использовать уточненную теорию изгиба пластин в третьем приближении. Также в работе показано, что вблизи области приложения нагрузки следует использовать полное решение нестационарной задачи, а на

расстоянии более пяти длин волн можно ограничиться рассмотрением вклада краевой волны.

Автор выражает благодарность сотрудникам Института математики, механики и информатики Кубанского государственного университета Голубу М. В. и Еремину А. А. за предоставленные экспериментальные данные.

Список использованных источников

- 1 Mitra, M. Guided wave based structural health monitoring: A review / M. Mitra, S. Gopalakrishnan // Smart Materials and Structures. – 2016. – Vol. 25, № 5. – P. 25.
- 2 Коненков, Ю. К. Об изгибной волне «рэлеевского» типа / Ю. К. Коненков // Акуст. Журн. – 1960. – Т. 6. - вып. 1. – С. 124-126.
- 3 Wilde, M. V. Asymptotically correct boundary conditions for the higher-order theory of plate bending / M. V. Wilde, M. Y. Surova, N. V. Sergeeva // Mathematics and Mechanics of Solids. – 2022. – Vol.27(9). – P. 1813–1854.
- 4 Амензаде. Ю. А. Теория упругости / Ю. А. Амензаде. – М.: Высшая школа, 1976. – 272 с.
- 5 Kaplunov, J. D. Dynamics of Thin Walled Elastic Bodies / J. D. Kaplunov, L. Yu. Kossovich, E. V. Nolde. – San Diego: Academic Press, 1998. – 226 p.
- 6 Kolos, A. V. Methods of refining the classical theory of bending and extension of plates / A. V. Kolos // J. Appl. Math. Mech. – 1965. – Vol. 29. – P. 771–781.
- 7 Гринченко, В. Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах. / В. Т. Гринченко, В. В Мелешко. – М.: Киев: Наук. думка, 1981. – 283 с.
- 8 Кирьянов, Д. В. Mathcad 15/Mathcad Prime 1.0. / Д. В. Кирьянов. – СПб.:БХВ-Петербург, 2012. – 432 с.
- 9 Wilde, M. V. Experimental and theoretical investigation of transient edge waves excited by a piezoelectric transducer bonded to the edge of a thick elastic plate / M. V. Wilde, M. V. Golub, A. A. Eremin // Journal of Sound and Vibration. – 2019. – Vol. 441. – P. 26-49.
- 10 Лаврентьев, М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат – М.: Наука, 1973. – 749 с.