

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.  
ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра дифференциальных уравнений и математической экономики

**Аппроксимация денежных накоплений индивида с  
использованием задачи состыковки полиномиальных функций**

**АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ**

Студентки 4 курса 451 группы

направления – **38.03.05 Бизнес-информатика**

**механико-математического факультета**

**Сафриной Кристины Игоревны**

Научный руководитель  
доцент, к.ф.-м.н., доцент

И.Ю. Выгодчикова

Заведующий кафедрой  
зав. кафедрой, д.ф.-м.н., профессор

С.И. Дудов

Саратов 2025

**Введение.** В современном мире управление личными финансами становится все более актуальным, поскольку важно не только откладывать деньги, но и грамотно управлять накоплениями для достижения различных целей, таких как образование или покупка жилья. Анализ и прогнозирование накопительных процессов, особенно монотонных платежей, требуют использования математических методов аппроксимации для эффективного моделирования накоплений.

Учитывая влияние различных факторов на финансовое состояние и, соответственно, динамику платежей, в работе предлагается использовать полиномиальные сплайны для разделения периода накопления на интервалы, чтобы повысить точность модели в условиях нестабильных данных.

**Цель работы** — разработать веб-приложение на языке Python с использованием фреймворка Streamlit, которое будет реализовывать как традиционные методы аппроксимации, так и инновационные подходы, основанные на задаче состыковки полиномиальных функций, для оценки и прогноза денежных накоплений.

В соответствии с данной целью поставлены и решены следующие **задачи**:

1. Изучены теоретические основы расчета денежных накоплений с использованием монотонной ренты.
2. Изучены теоретические основы двух методов аппроксимации: метода наименьших квадратов и задачи П. Л. Чебышёва.
3. Исследован минимаксный метод аппроксимации в рамках задачи состыковки полиномиальных функций.
4. Выбран и проанализирован набор данных, который будет использоваться для тестирования и оценки рассмотренных методов аппроксимации.
5. Разработано интерактивное приложение на базе Streamlit, реализующее аппроксимацию денежных накоплений.
6. Рассчитаны накопительные суммы с использованием монотонной ренты для каждого алгоритма аппроксимации.

**Объектом** исследования являются индивидуальные денежные накопления.

**Предметом** исследования являются методы аппроксимации функций,

применяемые для измерения динамики денежных накоплений индивида.

**Основное содержание работы.** В первой части «Денежные накопления с использованием монотонной ренты» рассматриваются теоретические основы накопления как важного элемента финансового планирования, а также понятие монотонной ренты, формулы и примеры задач для её расчёта.

Накопление — это постепенное формирование и сохранение финансовых ресурсов для достижения различных целей, таких как покупка жилья, образование, отдых или создание бизнеса. Эффективное накопление предполагает регулярные взносы и грамотное управление доходами и расходами, что способствует увеличению ресурсов и достижению финансовой устойчивости.

Анализ накоплений включает оценку различных сценариев их развития. В рамках исследования особое внимание уделяется моделированию процессов с помощью математических методов, в частности, аппроксимации с использованием задачи состыковки полиномиальных функций. Такой подход позволяет учитывать изменения в динамике платежей, вызванных внешними факторами (например, изменением доходов, кризисами), и строить более точные прогнозы.

Далее в разделе рассматриваются особенности оценки стоимости монотонной ренты — регулярных платежей, изменяющихся во времени по линейному закону. В зависимости от режима платежей (в конце или в начале периода) приводятся формулы для определения их современной и наращенной стоимости. Приведены практические примеры — расчёты первого взноса по депозиту с ежегодным увеличением выплат и при ежемесячных выплатах с убыванием суммы. Такие модели помогают более точно планировать будущие поступления и расходы, а также разрабатывать стратегии накопления в условиях изменяющихся доходов и затрат.

**Во второй части** «Теоретические основы аппроксимации» описаны метод наименьших квадратов и задача П.Л. Чебышёва для дискретного случая, позволяющие моделировать и точно аппроксимировать финансовые процессы.

Парная регрессия (линейная регрессия) — это статистический метод анализа взаимосвязи между двумя переменными: зависимой ( $y$ ) и независимой ( $x$ ). Цель — найти линейную функцию, максимально описывающую

зависимость, обычно в виде

$$y = \alpha + \beta x + \varepsilon, \quad (1)$$

где  $\alpha$  — константа (точка пересечения с осью  $y$ ),  $\beta$  — коэффициент наклона (угловой коэффициент), а  $\varepsilon$  — случайная ошибка (отклонение наблюдаемых значений от линии регрессии).

Для нахождения параметров  $\alpha$  и  $\beta$  используется метод наименьших квадратов (МНК), который минимизирует сумму квадратов отклонений наблюдаемых значений от линии регрессии:

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - (\alpha + \beta x_i))^2 \rightarrow \min. \quad (2)$$

Решения для  $\alpha$  и  $\beta$  по методу наименьших квадратов:

$$\beta = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \alpha = \bar{y} - \beta \bar{x}, \quad (3)$$

где  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  — выборочные средние значения  $x$  и  $y$  соответственно.

Для оценки качества модели используют коэффициент детерминации ( $R^2$ ), показывающий долю объяснённой вариации, и стандартную ошибку ( $S_e$ ), характеризующую среднее отклонение наблюдений от модели.

Задача П.Л. Чебышёва заключается в аппроксимации дискретной функции полиномом минимальной максимальной погрешности по всем узлам сетки:

$$\varphi(A) = \max_{k=0, N} |y_k - p_n(A, t_k)| \rightarrow \min_{A \in \mathbb{R}^{n+1}}. \quad (4)$$

Обозначим через  $\rho := \min_{A \in \mathbb{R}^{n+1}} \varphi(A)$  минимальное значение целевой функции задачи (4).

Решение этой задачи сводится к поиску так называемого экстремального базиса, то есть такого  $(n+2)$  — точечного подмножества сетки  $T$ :

$$\sigma^* = \{t_{j_0}^* < t_{j_1}^* < \dots < t_{j_{n+1}}^*\} \subset T,$$

для которого выполняются соотношения:

$$p_n(A^*, t_{j_k}) = y_{j_k} + (-1)^{k+1} \cdot h, \quad k = \overline{0, n+1}, \quad (5)$$

причем  $\varphi(A^*) = |h|$ . В таком случае  $A^* = (a_0^*, \dots, a_n^*) \in \mathbb{R}^{n+1}$  – решение задачи (4).

В данной работе рассматривается случай  $n = 1$ . Система (5) запишется в виде (в целях упрощения обозначений берем базис  $\sigma = \{t_0 < t_1 < t_2\} \subset T$ , символы «\*» и двойные индексы опускаем):

$$a_0 + a_1 t_k = y_k + (-1)^{k+1} \cdot h, \quad k = \overline{0, 2}. \quad (6)$$

Несложно отыскать решение системы (6):

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{-h \cdot (t_1 + t_0) + y_0 \cdot t_1 - y_1 \cdot t_0}{t_1 - t_0}, \\ a_1 &= \frac{y_1 - y_0 + 2 \cdot h}{t_1 - t_0}, \\ h &= -\frac{y_1}{2} + \frac{y_0}{2} \cdot \frac{t_2 - t_1}{t_2 - t_0} + \frac{y_2}{2} \cdot \frac{t_1 - t_0}{t_2 - t_0}. \end{aligned}$$

Использование этих методов в финансовом моделировании повышает точность прогнозов, помогает выявлять аномалии и оптимизировать стратегии накопления. Внедрение математических моделей способствует развитию устойчивых и эффективных финансовых решений, обеспечивая достижение целей и снижение рисков.

**В третьей части** «Задача состыковки полиномиальных функций» описываются причины применения данной задачи в рамках индивидуальных денежных накоплений, а также минимаксный метод аппроксимации линейными сплайнами.

Задача состыковки полиномиальных функций в работе рассматривается на основе метода аппроксимации линейными сплайнами, так как использование полиномов выше второй степени редко оправдано из-за сложности поведения. Основная цель задачи — учесть неравномерность накоплений, вызванную изменениями жизненных условий, и выделить ключевые события,

влияющие на динамику. Это позволит разбить общий период на этапы с разными зависимостями и точнее спрогнозировать будущие накопления.

Метод состоит в минимизации максимальной ошибки аппроксимации по узлам сетки с помощью задачи Чебышёва. В случае линейных сплайнов задача сводится к поиску оптимальных коэффициентов на каждом этапе с учётом ограничений в начальной и конечной точках:

$$\varphi(A) = \max_{k=0, N} |y_k - a_0 - a_1 t_k| \rightarrow \min_{A \in D = \{A \in \mathbb{R}^2: a_0 + a_1 t_0 = y_0\}}, \quad (7)$$

$$\varphi(A) = \max_{k=0, N} |y_k - a_0 - a_1 t_k| \rightarrow \min_{A \in D = \{A \in \mathbb{R}^2: a_0 + a_1 t_N = y_N\}}. \quad (8)$$

Решение включает подбор базисных точек, проверку условий оптимальности и последовательное уточнение модели через итерации, что обеспечивает высокую точность и возможность моделировать сложные сценарии накопления.

Рациональный алгоритм решения задачи:

Шаг 0. Выбираем любой частичный базис.

Шаг 1. Вычисляем:

$$a_1(\sigma) = \frac{y_{j_1} + y_{j_2} - 2y_0}{t_{j_1} + t_{j_2} - 2t_{j_0}}, \quad (9)$$

$$a_0(\sigma) = y_0 - a_1(\sigma)t_{j_0} = \frac{y_0(t_{j_1} + t_{j_2}) - t_{j_0}(y_{j_1} + y_{j_2})}{t_{j_1} + t_{j_2} - 2t_{j_0}}, \quad (10)$$

$$h(\sigma) = y_{j_2} - a_0(\sigma) - a_1(\sigma)t_{j_2}. \quad (11)$$

Шаг 2. Вычисляем  $\max_{k=1, N} |y_k - a_0(\sigma) - a_1(\sigma)t_k|$ . Если эта величина совпадает с полученным в результате решения системы значением  $|h(\sigma)|$ , делаем вывод об оптимальности вектора  $A = (a_0(\sigma), a_1(\sigma))$ .

Иначе переходим к шагу 3.

Шаг 3. Ищем одну из точек сетки, в которой этот максимум достигается. Ясно, что полученная точка не была в первоначальном базисе. Так включим её в базис, исключив ту точку базиса, которая находится с новой точкой в одной полуплоскости, определяемой линией  $p(A(\sigma), t) = a_0(\sigma) + a_1(\sigma)t$ .

С новым базисом переходим к шагу 1.

Все рассуждения, приведённые выше для задачи (7), несложно повторить для задачи (8). Таким образом, точка «склейки» сплайнов выполняет одновременно роль начальной точки для первой части данных (решение задачи (8)) и для второй части данных (решение задачи (7)).

**В четвёртой части** «Описание набора данных» представлены выбранные для работы данные, а также смоделирован накопительный процесс индивида, являющийся основой будущих аппроксимаций.

Для создания набора данных использовалась информация с сайта SberIndex, а именно — данные о медианной зарплате в сфере информационных технологий в России.

На основе данных за январь 2020 — февраль 2025 составлен набор, моделирующий доход сотрудника, который за 2,5 года получил два повышения — на 20% и 10%. В таблице представлены взносы на накопительный счет, составляющие 10% от заработной платы, за исключением декабррей, когда размер взноса снижается до 8% в связи с ростом потребительских расходов в этот период. Эти данные позволяют анализировать влияние карьерного роста на накопления.

Таблица 1 – Набор данных. Ежемесячные взносы на накопительный счет

| $t$ | $y_t$   | $t$ | $y_t$  | $t$ | $y_t$   | $t$ | $y_t$   |
|-----|---------|-----|--------|-----|---------|-----|---------|
| 1   | 4044,8  | 16  | 4099,8 | 31  | 6035,76 | 46  | 7319,76 |
| 2   | 3885,8  | 17  | 4313,5 | 32  | 6003,12 | 47  | 7457,16 |
| 3   | 4002    | 18  | 4339,2 | 33  | 5977,32 | 48  | 6723,36 |
| 4   | 4002    | 19  | 4305,3 | 34  | 6101,04 | 49  | 7876,44 |
| 5   | 4099    | 20  | 4224,3 | 35  | 6338,64 | 50  | 7847,76 |
| 6   | 4225,1  | 21  | 4202,9 | 36  | 5736    | 51  | 8637,59 |
| 7   | 4270,9  | 22  | 4159,9 | 37  | 6608,52 | 52  | 8775,52 |
| 8   | 3937,1  | 23  | 4419,6 | 38  | 6471    | 53  | 9107,54 |
| 9   | 3999,8  | 24  | 4000   | 39  | 6804    | 54  | 9285,51 |
| 10  | 4002    | 25  | 4525,7 | 40  | 6786    | 55  | 9402,64 |
| 11  | 3937    | 26  | 4500   | 41  | 7101,96 | 56  | 9088,69 |
| 12  | 3566,24 | 27  | 4697,4 | 42  | 7203,6  | 57  | 9154,47 |
| 13  | 3941    | 28  | 4599,1 | 43  | 7215,6  | 58  | 9613,5  |
| 14  | 3897,6  | 29  | 4902,6 | 44  | 7105,56 | 59  | 9467,12 |
| 15  | 4211,8  | 30  | 5157,3 | 45  | 7007,76 | 60  | 9048    |

**В пятой части** «Реализация методов аппроксимации. Streamlit» представлены результаты работы программы, которая аппроксимирует входные данные четырьмя методами (классическая аппроксимация и три метода с использованием задачи состыковки функций), а также производится расчет накопительных сумм с использованием найденного значения  $\beta$  в рамках задачи монотонной ренты.

Каждый метод описан определённой структурой:

1. Уравнения линий аппроксимации.
2. Таблицы, содержащие реальные и прогнозные значения и разницу между ними для каждого метода.
3. График прогнозируемых и реальных значений и значение коэффициента детерминации.
4. График погрешностей между прогнозируемыми и реальными значениями.

Ниже представлен стартовый интерфейс веб-приложения, который доступен по адресу: <https://individuals-savings.streamlit.app/>.

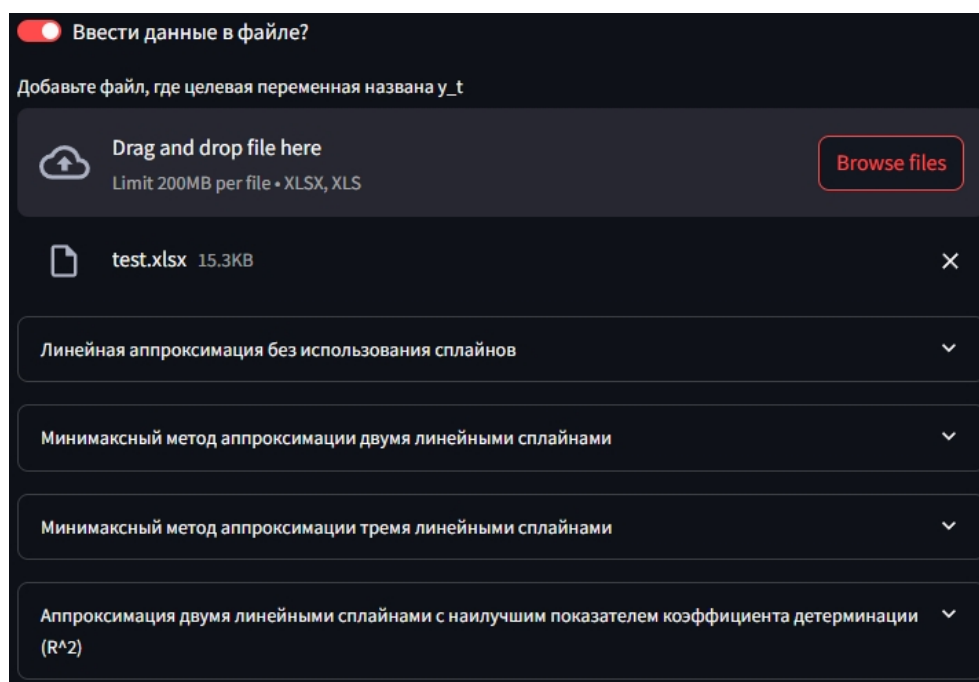


Рисунок 0.1 – Стартовый интерфейс

*Линейная аппроксимация без использования сплайнов:* реализуются метод наименьших квадратов и метод Чебышёва, с помощью функции `minimize`

из библиотеки `scipy`. Для каждой модели выводятся уравнения линий, где параметр  $a_1$  (или  $\beta$ ) показывает среднее изменение платежей:  $\beta \approx 104$  руб. для МНК и  $\beta \approx 99$  руб. для метода Чебышёва.

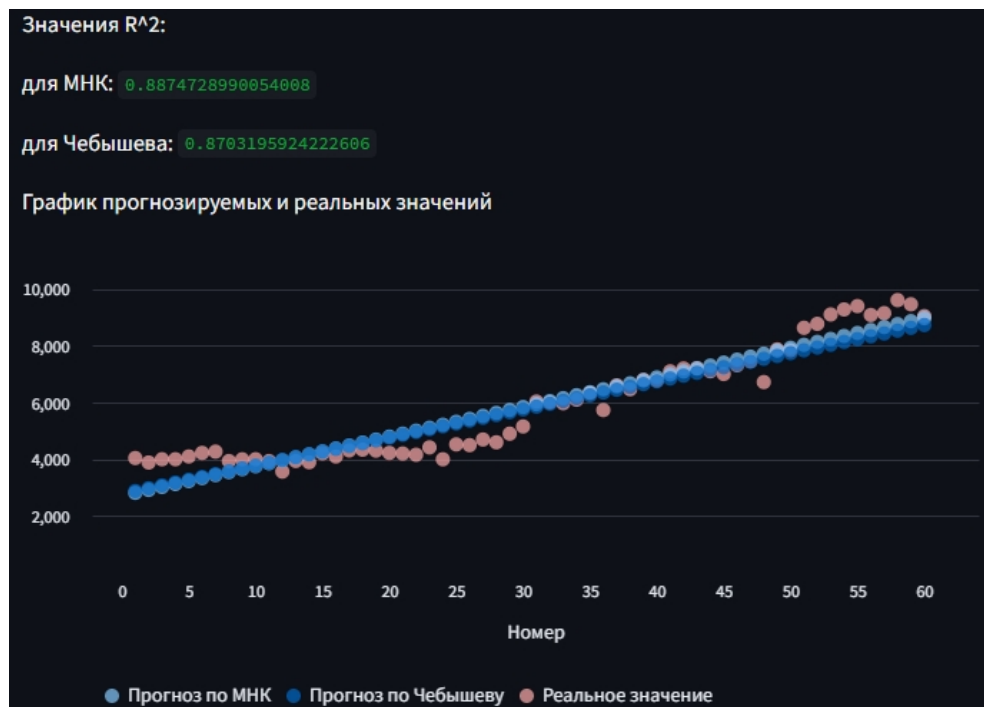


Рисунок 0.2 – График прогнозируемых и реальных значений

Видим показатели  $R^2$  — около 0,89 для МНК и 0,87 для метода Чебышёва, что свидетельствует о высокой точности обеих моделей.

Затем формулируется общая задача накопления для всех алгоритмов аппроксимации: предположим, что индивид открыл новый счёт, и его первый платеж составляет 9000 руб. (сумма берётся, основываясь на последнем значении предыдущих накоплений). Банк предлагает процентную ставку в 14% годовых. Индивид планирует совершать накопления в течение года. Требуется найти накопленную сумму.

Итоговая сумма за год: по МНК — около 122344 руб., по методу Чебышёва — около 122001 руб. В целом, оба подхода дают схожие результаты, но предпочтительнее использовать метод, лучше описывающий данные — в данном случае, МНК.

*Минимаксный метод аппроксимации двумя линейными сплайнами:* для определения точки «склейки» сплайнов сначала рассчитываются коэффициенты аппроксимации методом Чебышёва без учета склейки, затем опре-

деляется разница между реальными и прогнозируемыми значениями. Исключаются первые и последние две точки, и среди оставшихся выбирается точка с максимальной разницей как опорная по умолчанию.



Рисунок 0.3 – График прогнозируемых и реальных значений

Результаты показывают, что для МНК  $\beta_{1,2} \approx -3,162$ , а для Чебышёва —  $\beta_{1,2} \approx 1,154$ . Графики и таблицы подтверждают повышение точности моделей (коэффициенты детерминации около 0,96).

Учитывая, что всего рассматривается 60 месяцев и большая часть периода аппроксимируется именно вторым сплайном, целесообразно брать вторые значения  $\beta$  для расчёта новых накоплений. Остальные условия накопительного процесса остаются неизменными. Накопленная сумма по МНК — около 126 326 руб., по методу Чебышёва — около 125 776 руб.

*Минимаксный метод аппроксимации тремя линейными сплайнами:* алгоритм поиска опорных точек аналогичен предыдущему: первая точка — максимальное отклонение, вторая — следующая по величине. Для каждого метода — МНК и Чебышёва — получены три коэффициента  $\beta$ . Графики показывают, что оба метода дают похожие результаты с высоким коэффициентом детерминации (около 0,97).



Рисунок 0.4 – График прогнозируемых и реальных значений

При использовании МНК накопленная сумма составляет около 125 090 руб.; при использовании аппроксимации методом Чебышёва — около 125 433 руб.

*Аппроксимация двумя линейными сплайнами с наилучшими показателями коэффициента детерминации ( $R^2$ ):* проводится путём перебора всех возможных точек (кроме первых и последних двух). Для метода Чебышёва опорная точка — 24-ый месяц (как и в случае минимаксного подхода), для МНК — 22-ой месяц. Результаты показывают, что  $R^2$  у МНК — 0,9736, у метода Чебышёва — 0,9684.

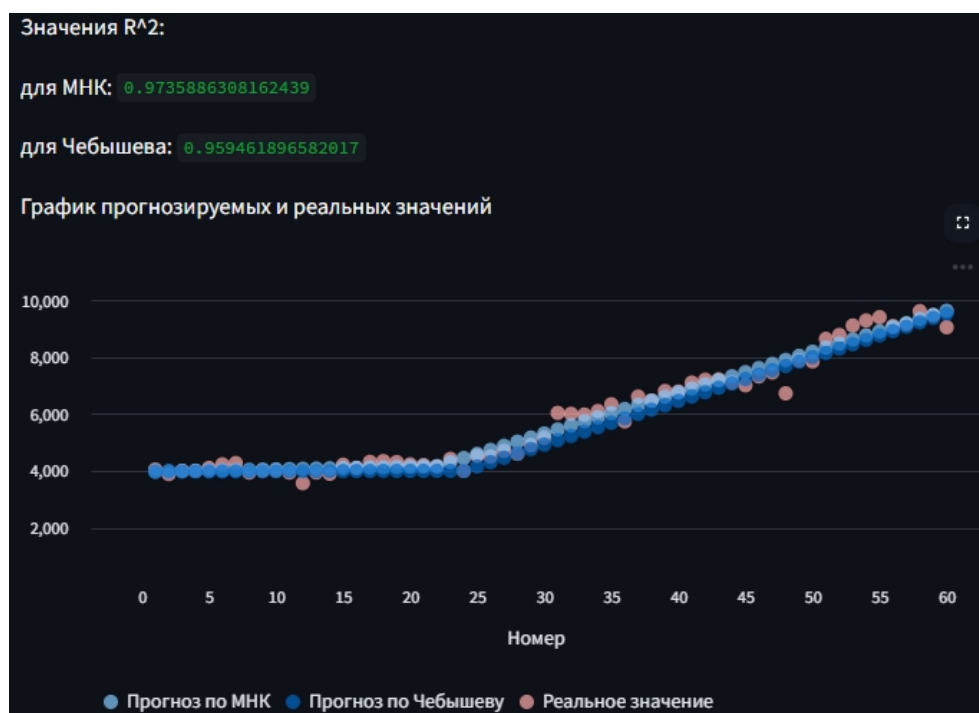


Рисунок 0.5 – График прогнозируемых и реальных значений

При использовании МНК накопленная сумма составляет около 125 090 руб.; при использовании аппроксимации методом Чебышёва — около 125 776 руб.

**В приложениях** представлены вычисления накопительных сумм в виде скриншотов экрана из программы MS Excel и исходный программный код реализации поставленной практической задачи.

**Заключение.** В заключение можно сказать, что главная цель достигнута, все задачи выполнены. В ходе работы создано веб-приложение на языке Python с использованием фреймворка Streamlit, которое эффективно аппроксимирует денежные потоки, предоставляя пользователям удобные графики и таблицы.

Анализ практической части работы показал, что традиционная линейная аппроксимация имеет ограничения при нестабильных финансовых условиях, тогда как минимаксный метод с использованием линейных сплайнов значительно повышает точность моделей благодаря делению периода на интервалы.

Разработанный комплексный подход является эффективным инструментом для анализа и прогнозирования индивидуальных накоплений.