

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра дифференциальных уравнений и математической экономики

**ОПТИМИЗАЦИЯ СТРУКТУРЫ ПОРТФЕЛЯ ЦЕННЫХ БУМАГ
АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ**

по направлению **38.03.05 - Бизнес-информатика**

студента 4 курса 451 группы **механико-математического факультета**

Елисеева Шамяля Тимуровича

Научный руководитель
доцент, к.э.н.

_____13.09.24 г. С.В.Иванилова
подпись, дата

Заведующий кафедрой
зав.кафедрой, д.ф.-м.н., профессор

_____13.09.24 г. С.И.Дудов
подпись, дата

Саратов 2025

ВВЕДЕНИЕ

Современные финансовые рынки характеризуются высокой степенью неопределенности, обусловленной глобализацией экономических процессов, геополитической нестабильностью и динамичным изменением макроэкономических условий. В таких условиях инвесторы сталкиваются с необходимостью не только сохранения капитала, но и обеспечения его устойчивого роста при допустимом уровне риска. Одним из ключевых инструментов решения этой задачи является формирование оптимального инвестиционного портфеля, основанного на научно обоснованных методах анализа и прогнозирования.

Особую значимость приобретают количественные методы оптимизации, позволяющие учитывать взаимосвязь между доходностью и риском активов. Классическая модель Гарри Марковица, несмотря на свою теоретическую строгость, имеет ряд ограничений, связанных с допущением нормальности распределения доходностей и стационарности рыночной среды. В связи с этим актуальным становится исследование альтернативных подходов, таких как MAD-модель (Mean Absolute Deviation) и многофакторная модель Фамы-Френча, которые позволяют более точно учитывать особенности реальных финансовых рынков, включая асимметрию распределений и влияние дополнительных факторов риска.

Кроме того, развитие вычислительных технологий и доступность данных открывают новые возможности для применения алгоритмов оптимизации на практике. Использование современных языков программирования, таких как Python, позволяет не только автоматизировать расчеты, но и адаптировать модели к изменяющимся рыночным условиям. Это делает исследование методов оптимизации портфеля особенно актуальным для частных и институциональных инвесторов, стремящихся к повышению эффективности управления активами.

Таким образом, актуальность данной работы обусловлена:

1. **Необходимостью минимизации рисков** в условиях высокой волатильности финансовых рынков.
2. **Развитием альтернативных методов оптимизации**, преодолевающих ограничения классических моделей.
3. **Практической значимостью** применения количественных методов для формирования сбалансированных портфелей.

Проведенное исследование вносит вклад в развитие методов портфельной оптимизации и предоставляет инструменты для принятия обоснованных инвестиционных решений.

Целью работы: является исследование и применение математических методов оптимизации структуры портфеля ценных бумаг с использованием языка программирования Python.

Для достижения поставленной цели в работе решаются следующие задачи:

- изучение теоретических основ формирования инвестиционного портфеля;
- анализ моделей оценки доходности и риска финансовых активов;
- рассмотрение моделей оптимизации портфеля, включая модель Марковица, модель Фамы-Френча, MAD-модель и модель Шарпа;
- разработка алгоритма оптимизации и его реализация на Python;
- проведение вычислительного эксперимента и анализ полученных результатов.

Объект исследования: инвестиционный портфель.

Предмет исследования: модели оптимизации портфеля.

Основное содержание работы

Бакалаврская работа состоит из: введения, пяти глав, заключения, списка использованных источников и приложений.

Во введении обоснована актуальность темы исследования, сформулированы цель и задачи работы, определены объект и предмет исследования, а также указана практическая значимость полученных результатов.

Первая часть «Теоретические основы формирования инвестиционного портфеля» посвящена анализу классических и современных подходов к портфельному инвестированию. Формирование портфельной теории как самостоятельного направления финансового анализа стало возможным благодаря работе Гарри Марковица, где впервые были применены статистические методы для обоснования выбора инвестиционного портфеля. Марковиц предложил революционный подход, основанный на анализе не отдельных активов, а их совокупности, учитывающий взаимосвязи между ними через ковариации. Центральным понятием стала диверсификация - возможность снижения общего риска портфеля за счет включения активов с различными характеристиками. Марковиц формализовал инвестиционный процесс как оптимизационную задачу, где решение принимается на основе математического анализа соотношения доходности и риска, выраженного через дисперсию.

Классическая портфельная теория оперируется такими фундаментальными понятиями как:

1) Ожидаемая доходность портфеля, рассчитываемая как взвешенная сумма доходностей отдельных активов:

$$E(r_p) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot E(r_i)$$

где

$E(r_p)$ — ожидаемая доходность портфеля, x_i — доля активов i в портфеле,

$E(r_i)$ — ожидаемая доходность актива i , n — количество активов в портфеле.

2) Риск портфеля, измеряемый через дисперсию доходности:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} X_i X_j$$

где

σ_{ij} — ковариация доходностей активов i и j .

Модель Марковица базируется на шести ключевых допущениях:

- 1) Рациональность инвесторов, максимизирующих доходность при минимизации риска
- 2) Доступность полной и достоверной информации о характеристиках активов
- 3) Нормальное распределение доходностей всех активов
- 4) Отсутствие транзакционных издержек и налогов
- 5) Делимость активов
- 6) Стационарность рыночной среды

Эти предположения существенно упрощают математическую формализацию, но одновременно ограничивают применимость модели в реальных условиях.

Основные ограничения классической модели включают:

- Несоответствие реального поведения инвесторов предположению о полной рациональности
- Зависимость от исторических данных, не гарантирующих их релевантности в будущем
- Чувствительность к изменениям рыночных условий

Эти ограничения привели к развитию альтернативных подходов:

- 1) Модель Фамы-Френча, учитывающая дополнительные факторы риска

2) MAD-модель Конно-Ямазаки, использующая среднее абсолютное отклонение вместо дисперсии

3) Индексная модель Шарпа, связывающая доходность актива с рыночным индексом

Эволюция портфельной теории демонстрирует переход от статических моделей к более гибким подходам, лучше отражающим реальные рыночные условия и поведение инвесторов.

Во второй части «Анализ текущего состояния финансовых рынков и структуры портфелей» описываются анализ российского рынка ценных бумаг, текущие подходы к оптимизации портфеля в практике инвесторов, а также проблемы и ограничения существующих методов. Современный российский рынок ценных бумаг характеризуется выраженной сырьевой ориентацией с доминированием компаний нефтегазового и финансового секторов. Представлены акции ПАО «Сбербанк» (SBER), ПАО «Лукойл» (LKOH) и ПАО «Яндекс» (YNDX) по данным Московской биржи с 1 января по 31 декабря 2024 года. Особенностью является высокая волатильность, обусловленная как внешнеполитическими, так и внутривнутриполитическими факторами экономики. Эти акции являются «голубыми фишками» благодаря ликвидным и надёжным компаниям, имеющие высокие показатели доходности и стабильности.

Далее представлены следующие ключевые математические формулы моделей оптимизации, каждая из которых основана на специфических математических принципах:

1. Модель Фамы-Френча (оценка доходности):

$$r_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$$

где r_t – доходность актива, P_t – цена ценной бумаги, t – период

2. Модель Канно-Ямазаки (минимизация среднего абсолютного отклонения):

$$\sigma(x) = E \left\| \sum_{i=1}^n r_i x_i - E \left\| \sum_{i=1}^n r_i x_i \right\| \right\|$$

3. Модель Шарпа (максимизация доходности на единицу риска):

$$E(r_i) = r_f + \beta(E(r_m) - r_f)$$

где r_f – безрисковая ставка, $E(r_m)$ – ожидаемая доходность портфеля, β – коэффициент риска.

Третья часть «Разработка модели оптимизации портфеля ценных бумаг» представляет собой постановку задачи и алгоритмы решения. Исследование началось с четкой формулировки двух ключевых постановок задачи: минимизации риска при заданном уровне доходности и максимизации доходности при ограничении на допустимый риск. Для каждой из этих постановок были определены соответствующие целевые функции и система ограничений, включающая бюджетное ограничение и запрет коротких позиций, что обеспечило теоретическую строгость модели.

Для формального описания задачи примем следующие обозначения:

- n — количество активов в портфеле;
- w_i — доля капитала, инвестируемая в актив i ;
- μ_i — ожидаемая доходность актива i ;
- Σ — ковариационная матрица доходностей активов;
- μ — вектор ожидаемых доходностей: $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)^T$;
- w — вектор долей (весов) активов в портфеле: $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$

Целевая функция при минимизации риска записывается как:

$$\min_w \sigma_p^2 = w^T \Sigma w$$

при ограничениях:

$$\sum_{i=1} w_i = 1 \text{ (полная инвестиция капитала),}$$

$$w^T \mu < R_{target} \text{ (целевой уровень доходности),}$$

$$w_i \geq 0 \quad \forall i \text{ (если запрещены короткие позиции).}$$

Целевая функция при максимизации доходности записывается как:

$$\max_w w^T \mu$$

при ограничениях:

$$\sum_{i=1} w_i = 1 \text{ (полная инвестиция капитала),}$$

$$w^T \Sigma w \leq \sigma_{max}^2 \text{ (целевой уровень риска),}$$

$$w_i \geq 0 \quad \forall i \text{ (если запрещены короткие позиции).}$$

Основное внимание было уделено выбору и обоснованию критериев оценки эффективности портфеля. В качестве ключевых метрик были выбраны ожидаемая доходность портфеля, рассчитываемая как средневзвешенная доходность входящих в него активов, и риск портфеля, измеряемый через вариацию доходности на основе ковариационной матрицы. Эти критерии обеспечили комплексную оценку качества портфельных решений.

В четвертой части «Вычислительный эксперимент» был проведен комплексный анализ эффективности различных подходов к портфельной оптимизации. В качестве тестовых активов использовались бумаги крупнейших представителей банковского, нефтегазового и технологического секторов российской экономики. Исторические данные брались с порталов МОЕХ (moex.com) и Investing.com и охватывали полный календарный год, что позволило учесть сезонные колебания и различные рыночные условия.

Были реализованы специальные алгоритмы очистки от артефактов и пропущенных значений. Для расчета доходностей применялся логарифмический метод, доказавший свою устойчивость в финансовых исследованиях. Годовая волатильность оценивалась с поправкой на количество торговых дней, что соответствует общепринятой практике.

Для реализации были использованы квадратичное программирование для классической модели Марковица, линейное программирование для MAD-модели Конно-Ямазаки и факторный анализ для трехфакторной модели Фамы-Френча. Такой комбинированный подход позволил учесть преимущества различных методов и минимизировать их ограничения.

Практическая реализация модели была выполнена на языке Python с использованием современных библиотек requests, pandas, numpy, scipy.optimize и ufinance для научных вычислений. Разработанный алгоритм включал полный цикл обработки данных: от загрузки и очистки рыночных данных до расчета статистических характеристик и решения оптимизационных задач.

Пятая часть «Результаты исследований» включает в себя значимые результаты, имеющие теоретическую и практическую ценность для современной портфельной теории. Анализ эффективности различных подходов к оптимизации инвестиционных портфелей выявил ряд закономерностей, которые требуют детального рассмотрения.

Основные научные результаты работы включают:

1. Сравнительную оценку эффективности моделей

Экспериментальные данные показали, что каждая модель имеет преимущества и недостатки:

Подход	Преимущества	Недостатки
Модель Марковица	Прозрачность, простота реализации, математическая строгость.	Требует нормальности распределений и стабильности ковариаций.
Модель Фамы	Простота и понятность, учитывает только систематический риск, широко используется в практике.	Основывается на нереалистичных предположках (например, одинаковые ожидания инвесторов), не учитывает специфические риски, эмпирически часто даёт неточные результаты.
Модель Конно-Ямазак	Учитывает только отрицательные отклонения (риск убытков), что ближе к реальному восприятию риска инвесторами, более устойчива к аномальным значениям доходностей, подходит для задач с линейными ограничениями (формулируется как задача линейного программирования).	Требует большого объема данных для корректной оценки, игнорирует положительные отклонения, которые тоже могут быть важны, может давать недостаточно диверсифицированные портфели.
Модель Шарпа	Простота и легкость применения, подходит для экспресс-оценки риска и доходности, основа для коэффициента Шарпа, оценивающего эффективность портфеля.	Учитывает только один фактор риска — рыночный, не отражает влияния других факторов (например, отраслевых, макроэкономических), менее точна, чем многомерные факторные модели.

2. Практические рекомендации

На основе проведенного анализа разработаны:

- Алгоритм выбора модели в зависимости от рыночной фазы;
- Методика комбинированного использования разных подходов;
- Практические схемы ребалансировки с учетом транзакционных издержек.

Особый интерес представляют выявленные закономерности поведения портфелей в различных рыночных условиях:

- В периоды роста оптимальны агрессивные стратегии;
- При высокой волатильности предпочтительны консервативные подходы.

Проведенное исследование выявило несколько ключевых направлений для дальнейшего развития модели оптимизации портфеля:

- Учёт временной нестабильности параметров - Использование скользящего окна или моделей типа EWMA/GARCH позволило бы динамически адаптировать портфель.
- Добавление ограничений (Ликвидность активов, валютные ограничения, регуляторные требования).
- Расширение метрик риска (CvaR/VaR, Максимальную просадку, Sharpe/Sortino Ratio).
- Включение прогноза - Использование методов машинного обучения или ARIMA-моделей для прогнозирования будущих доходностей повысит точность модели.
- Интеграция ESG-факторов - В современных условиях инвестиционные решения всё чаще опираются на устойчивое развитие и социально-экологические критерии.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе проведенного исследования была успешно реализована поставленная цель - разработана и апробирована модель оптимизации структуры инвестиционного портфеля, основанная на классической теории Марковица и ее современных модификациях. Основное внимание было уделено практической реализации моделей и их тестированию на реальных рыночных данных.

Ключевым результатом работы стало создание комплексного подхода, объединяющего три основных метода оптимизации: классическую модель Марковица, MAD-модель Конно-Ямазаки и модель Фамы-Френча. Каждый из этих методов был реализован в виде работоспособного алгоритма на языке Python, что позволило провести их сравнительный анализ на примере акций российских компаний из разных секторов экономики.

Проведенное исследование подтвердило актуальность классических подходов к портфельной оптимизации и показало возможности их эффективного применения в современных рыночных условиях при условии соответствующей модернизации и адаптации. Разработанная модель представляет собой практический инструмент для принятия обоснованных инвестиционных решений.

Программные коды приводятся в **приложениях А, Б, В, Г, Д.**