

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра дифференциальных уравнений и математической экономики

**ВЫБОР СТРАТЕГИИ ИНВЕСТИТОРОМ ПРИ ФОРМИРОВАНИИ
ПОРТФЕЛЯ ЦЕННЫХ РИСКОВЫХ БУМАГ**

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 2 курса 247 группы

направления 09.04.03 – Прикладная информатика

механико-математического факультета
Кулагиной Лилии Мавлетовны

Научный руководитель
зав. кафедрой, д.ф-м.н., профессор _____ С.И. Дудов

Заведующий кафедрой
зав. кафедрой, д.ф-м.н., профессор _____ С.И. Дудов

Введение. Проблема риска — одна из ключевых в экономической деятельности человека. Фактор риска напрямую отражается на конечном финансовом результате принятого решения. Один из важных видов риска — инвестиционный.

Именно с ним связана задача, которая будет рассматриваться далее, — формирование портфеля ценных бумаг через распределение инвестиционного капитала среди различных ценных бумаг.

Идеальной для инвестора стратегией инвестирования является стратегия, обеспечивающая достижение максимальной ожидаемой доходности при минимальном риске вложений. Однако, одновременное достижение этих целей невозможно. Практика работы на финансовых рынках свидетельствует о том, что большему значению ожидаемой доходности обычно сопутствует и большее значение риска вложений.

Выбор портфеля ценных бумаг на основе учета его ожидаемой доходности и риска известен как подход «доходность – риск», который был впервые сформулирован Г. Марковицем. Дальнейшее развитие этот подход получил благодаря работам Дж. Тобина, У. Шарпа, С. Росса и др. В рамках данного подхода предполагается, что инвестор стремится максимизировать ожидаемую доходность портфеля при заданном уровне риска, либо минимизировать риск при заданном уровне ожидаемой доходности посредством диверсификации вложений.

Целью работы является составление оптимального портфеля ценных рисковых бумаг с применением разных стратегий по отношению к периоду владения портфелем и сравнение подходов.

В рамках данной работы будет подробно рассмотрена классическая модель Марковица для формирования портфеля ценных бумаг с заданным уровнем доходности и минимальным риском. Особое внимание будет уделено проведению вычислительных экспериментов по формированию оптимальных портфелей как на модельных, так и на реальных данных. Будет проведен сравнительный анализ различных инвестиционных стратегий с периодами владения активами на год, полгода и квартал, а также с ограничениями кардинальности, то есть с ограничениями на количество активов, включаемых в портфель. Результаты анализа позволят определить наиболее эффективную

стратегию формирования и управления инвестиционным портфелем.

Структура данной работы состоит из четырех основных разделов.

- В первом разделе рассматриваются теоретические основы портфельного инвестирования, его принципы и проблемы выбора оптимального портфеля.
- Второй раздел посвящен математической формализации задачи Марковица и выводу формул, выражающих ее решение.
- В третьем разделе представлены результаты вычислительных экспериментов на модельных данных, демонстрирующие работу модели Марковица при различных исходных условиях.
- Четвертый раздел содержит результаты вычислительных экспериментов на реальных данных, включая выбор инструментальных средств, формирование портфеля из акций российских компаний, прогнозирование доходностей с помощью модели ARIMA, оптимизацию портфеля и сравнительный анализ различных стратегий управления.

Работа прошла апробацию на различных конференциях, в частности, на ежегодной студенческой конференции «Актуальные проблемы математики и механики», которую проводил механико-математический факультет СГУ в апреле 2025 года, в секции «Математическая экономика и негладкий анализ».

Портфельное инвестирование – это стратегия размещения капитала в разнообразные активы с целью уменьшения риска и увеличения потенциальной доходности. По сути, это представляет собой диверсификацию инвестиционного портфеля, чтобы уменьшить зависимость от конкретных инвестиций или активов.

Портфель инвестиций - это совокупность всех инвестиций физического или юридического лица, рассматриваемая как единое целое. В то же время портфель может состоять из определенного числа субпортфелей: например, инвестор может иметь портфель ценных бумаг и портфель имущества.

Портфель ценных бумаг - это определенным образом подобранная совокупность видов ценных бумаг для достижения поставленной цели. Соотношение конкретных видов ценных бумаг в портфеле определяет структуру портфеля.

Цель портфеля состоит в том, чтобы создать оптимальный баланс риска и доходности ценных бумаг.

Основными принципами формирования портфеля являются:

1. **Принцип диверсификации.** Это основной принцип портфельного инвестирования, который уменьшает риск за счет того, что возможные невысокие доходы по одним ценным бумагам, будут компенсироваться высокими доходами по другим бумагам.
2. **Принцип консервативности.** Инвестор еще до формирования портфеля должен установить предельный объем принимаемых на себя рисков, то есть лимит максимальных потерь по портфелю.
3. **Принцип достаточной ликвидности.** В соответствии с этим принципом в портфеле обязательно должны присутствовать высоколиквидные активы. Принцип заключается в том, чтобы поддерживать долю быстрореализуемых активов в портфеле, не ниже уровня, достаточного для проведения неожиданных высокодоходных сделок и удовлетворения потребностей клиентов в денежных средствах.

Проблема выбора портфеля ценных бумаг. В 1952 г. Гарри Марковицем была опубликована фундаментальная работа, являющаяся основой подхода к инвестициям с точки зрения современной теории формирования инвестиционного портфеля. Подход Марковица основывается на предположении, что инвестор в данный настоящий момент времени имеет определенную сумму денег для инвестирования. Данная сумма будет инвестирована на конкретный промежуток времени, называемый периодом владения. В конце этого периода инвестор продает ценные бумаги, которые были изначально куплены, после чего возможны следующие действия:

1. использует полученный в результате инвестирования доход на текущее потребление;
2. реинвестирует полученный доход;
3. делает то и другое одновременно.

Инвестор при выборе портфеля стремится прежде всего:

1. максимально увеличить ожидаемую доходность;
2. минимально снизить неопределенность.

Математическая формализация задачи Марковица и форму-

лы, выражающие ее решение. Предположим, что инвестор может вложить свой капитал в покупку n видов ценных бумаг, сформировав тем самым портфель ценных бумаг.

Пусть x_i - доля общего вложения, приходящаяся на i -й вид ценных бумаг, $i = \overline{1, n}$. Таким образом, $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$. Вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ определяет структуру портфеля ценных бумаг.

Значения x_i интерпретируются следующим образом:

- а) $x_i > 0$ означает, что доля x_i капитала инвестора вложена в ценные бумаги i -того вида;
- б) $x_i = 0$ означает, что ценные бумаги i -того вида отсутствуют в портфеле;
- в) $x_i < 0$ означает, что относительно ценных бумаг i -того вида совершена операция «короткая продажа», то есть средства, полученные за счет данной операции составляют долю $|x_i|$ от первоначального капитала инвестора и использованы им для покупки других ценных бумаг.

Пусть R_i - случайная величина доходности ценных бумаг i -того вида, как если бы капитал инвестора был целиком вложен в их покупку, $i = \overline{1, n}$.

Случайная величина R_p доходности такого портфеля со структурой, задаваемой вектором $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, есть

$$R_p = \sum_{i=1}^n R_i x_i.$$

Ожидаемая доходность портфеля соответствует формуле

$$m_p = M[R_p] = \sum_{i=1}^n x_i M[R_i] = \sum_{i=1}^n m_i x_i, \quad (1)$$

Отклонение случайной величины доходности портфеля от ожидаемой доходности есть случайная величина

$$R_p - m_p = \sum_{i=1}^n x_i (R_i - m_i),$$

Дисперсия случайной величины R_p

$$D_p = M [(R_p - m_p)^2] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n V_{ij} x_i x_j, \quad (2)$$

Модель оптимального портфеля Марковица строится на основе следующих предположений:

1. инвестор осуществляет оценку портфелей, основываясь на ожидаемой доходности и риске активов;
2. при выборе из двух идентичных во всем, кроме ожидаемой доходности, портфелей инвестор выбирает портфель с большей ожидаемой доходностью;
3. при выборе из двух идентичных во всем, кроме риска, портфелей он предпочитает портфель с меньшим риском;
4. активы являются бесконечно делимыми, то есть в каждый актив может быть вложена произвольная доля капитала инвестора;
5. характеристики активов и самого портфеля относятся к одному заданному периоду владения;
6. отсутствуют какие-либо технические препятствия в реализации оптимальных инвестиционных стратегий, относительно любого актива возможна операция «короткая продажа», а налоги и издержки, которые связаны с покупкой и продажей активов, во внимание не принимаются.

Постановку задачи можно сформулировать следующим образом: инвестору требуется выбрать структуру портфеля так, чтобы обеспечить заданное значение ожидаемой доходности m_p и при этом риск портфеля был бы минимальным. При этом портфель будет состоять из n различных рисковых ценных бумаг. Изначально известны прогнозные значения ожидаемых доходностей ценных бумаг соответствующего вида, которые задаются вектором $m = (m_1, m_2, \dots, m_n)^T$. А также известна матрица $V = (V_{ij})_{i=\overline{1,n}, j=\overline{1,n}}$, элементами которой являются ковариации $V_{ij} = M[(R_i - m_i)(R_j - m_j)]$ случайных величин доходностей ценных бумаг i -го и j -го видов. В будущем будем предполагать, что данная матрица является положительно определённой. Таким образом, задача формализуется как поиск структуры портфеля $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, которая обеспечила бы достижение целевой ожидаемой доходности портфеля m_p с минимальной риском.

Вычислительные эксперименты на модельных данных. Проиллюстрированы изложенный в разделе 2 теоретический материал решением задачи Марковица на модельных примерах. Рассмотрены 3 примера с разными входными данными. Во втором примере добавлена отрицательная ковариация между первым и вторым активами. Это позволяет пронаблюдать эффект снижения риска за счёт диверсификации.

Программный код для решения задачи формирования портфеля ценных рисков бумаг, на основе входных данных, таких как матрица ковариации, вектор эффективности и значений риска для каждой акции, реализован на языке программирования Python.

Вычислительные эксперименты на реальных данных. Для реализации вычислительных экспериментов по выбору стратегии инвестором при формировании портфеля ценных рисков бумаг был выбран язык программирования Python. Python был выбран как основное средство благодаря его гибкости, наличию специализированных библиотек и возможностям визуализации данных. Это позволяет реализовать как модели временных рядов ARIMA, так и оптимизационные задачи с учётом теоретических и практических аспектов формирования инвестиционного портфеля.

Выбор ценных бумаг для формирования портфеля.

Для реализации вычислительных экспериментов на реальных данных были отобраны пять компаний — по одной из ключевых отраслей российской экономики. При выборе акций в портфель будем учитывать, что акции должны быть из разных отраслей экономики. Именно такое условие может обеспечить портфель, который будет более устойчивым к каким-либо событиям в одной из отраслей. В каждом секторе экономики есть свои лидеры, ценные бумаги, которых покупать выгоднее всего. В качестве активов выбраны:

- В секторе энергетики — ПАО «Газпром».
- В металлургическом секторе — ПАО «ГМК Норникель».
- В финансовом секторе — ПАО «Сбербанк России».
- В секторе информационных технологий — ПАО «Яндекс».
- В промышленном секторе — ПАО «Северсталь».

Выбор именно этих пяти бумаг обоснован стремлением покрыть как

можно больше отраслей с разной цикличностью, чтобы повысить устойчивость портфеля. Сырьевой, финансовой, высокотехнологичной и промышленной. Это помогает снизить влияние отраслевых шоков к примеру, падение цен на нефть или металлы и получить сбалансированный портфель с приемлемой волатильностью и потенциальной доходностью.

Эксперимент будет проводиться по данным акций за определенный период.

Данные о стоимости акций, были выгружены с сайта Finam. Для этого в коде программы, представленной в приложении В, считываются файлы формата «.csv», указывается список выбранных компаний и период. Для наглядности приведем графики каждой акции с таймфреймом 1 день.

Модель временных рядов — ARIMA применяется для прогнозирования доходностей активов, входящих в портфель.

Построение ARIMA-модели происходит поэтапно. Сначала производим проверку стационарности, Для этого применяются тесты Дики-Фуллера (ADF) и KPSS. Если ряд нестационарен, используется дифференцирование, то есть взятие первых разностей исходного временного ряда.

На следующем этапе происходит обучение модели, на исторических данных настраиваются коэффициенты авторегрессии и скользящего среднего. Далее этап прогнозирования, модель позволяет делать прогнозы на основе предыдущих значений ряда и ошибок. На последнем этапе производится оценка качества прогноза, сравнением прогнозных значений с реальными данными с использованием метрик MSE, RMSE и MAE.

Для каждого актива, входящего в портфель, строится индивидуальная ARIMA-модель. Прогнозы доходностей применяются для формирования ожидаемой доходности (μ) и ковариационной матрицы (V), которые необходимы для оптимизации портфеля по критериям Марковица.

Оптимизация портфеля на основе модели Марковица. Для выбора оптимальной структуры портфеля инвестора используются прогнозируемые значения доходностей (μ) и ковариационная матрица (V), полученные на основе ARIMA-моделей. В рамках данной работы оптимизация проводится по критериям классической модели Марковица, которая позволяет найти наилучшее распределение активов при заданных ограничениях на риск и до-

ходность.

Сравнительный анализ стратегий управления портфелем. Для объективной оценки эффективности различных стратегий управления портфелем необходимо провести сравнительный анализ их доходности и рисков на исторических данных. Начальный капитал равен 1.000.000 рублей, а безрисковая ставка 8%. В рамках дипломной работы будут рассмотрены три стратегии:

- «годовая» стратегия. Прогноз доходностей и ковариационной матрицы строится на основе исторических данных. Планируемая доходность и риск фиксируются на весь год.
- «полугодовая» стратегия с ребалансировкой портфеля один раз за год.
- «квартальная» стратегия с ребалансировкой портфеля 3 раза за год каждые 3 месяца.

Методика анализа состоит из нескольких этапов. Сначала для каждой стратегии рассчитывается планируемая доходность в виде результата оптимизации и фактическая доходность по историческим данным, после вычисляется разница между ними отображая степень погрешности прогноза и адаптивности стратегии. Следующий этап оценка риска, в качестве основной метрики риска используется стандартное отклонение доходностей и дополнительно анализируется максимальная просадка для каждой стратегии. Последний этап - сравнительный анализ. Строятся графики риск-доходность для всех трёх стратегий, выявляется наилучшее соотношение риска и доходности, а после определяется стратегия, наименее подверженная отклонениям от плановых значений.

Годовая стратегия подразумевает ребалансировку портфеля раз в год. В рамках этой стратегии прогнозы доходностей и ковариаций рассчитываются на основе данных за предыдущие 12 месяцев с использованием ARIMA.

Полугодовая стратегия предполагает ребалансировку портфеля раз в шесть месяцев на основе показателей доходности и риска активов. Такой подход позволяет оперативно реагировать на изменения в финансовых рынках, сохраняя баланс между риском и доходностью.

Квартальная стратегия предполагает пересмотр структуры портфеля каждые три месяца. Такой подход позволяет более оперативно реагировать на изменения рынка и корректировать распределение активов в зависимости от динамики цен, обеспечивая оптимальное соотношение риска и доходности.

Стратегии формирования портфеля с ограничением на кардинальность или мощность означает, что в портфеле разрешено использовать не все доступные активы, а только фиксированное число из них: например, только 3, 4 или 5 ценных бумаг из доступных 5.

Это может быть вызвано необходимостью снижения операционных и транзакционных затрат, предпочтением «сфокусированных» инвестиций, ограничениями регуляторов или фонда.

Введение ограничения на кардинальность позволило снизить операционные затраты без существенного ухудшения показателей эффективности.

Сравнительный анализ стратегий формирования портфеля. Для объективной оценки стратегий были выбраны следующие ключевые метрики:

- Средняя годовая доходность — позволяет оценить общий рост капитала за исследуемый период.
- Стандартное отклонение доходности — характеризует уровень риска, связанного с изменениями стоимости портфеля.
- Коэффициент Шарпа — демонстрирует соотношение доходности к риску, что позволяет определить, насколько эффективно стратегия компенсирует уровень риска.
- Количество ребалансировок — характеризует транзакционные издержки и частоту корректировок портфеля.

Результат сравнительного анализа представлен в таблице 1.

Каждая из стратегий имеет свои преимущества и недостатки годовая стратегия подойдет для консервативных инвесторов с низким уровнем риска и минимальными издержками. Полугодовая стратегия представляет собой сбалансированный вариант, обеспечивая оптимальное сочетание доходности и риска при умеренных затратах. Квартальная стратегия предназначена для более агрессивных инвесторов, готовых к повышенной волатильности в обмен на высокую доходность.

Таблица 1 – Средние ежемесячные доходности

Показатель	Годовая стратегия	Полугодовая стратегия	Квартальная стратегия
Средняя годовая доходность	24.9%	9.24%	4.87636%
Коэффициент Шарпа	1.4965	4.8394	8.8195
Максимальная просадка	-55.3207%	-36.9849%	-35.7645%
Количество ребалансировок	0	1	3

Заключение. В ходе проведённого исследования была полностью достигнута главная цель — разработка, реализация и апробация алгоритмов построения оптимального портфеля ценных рисков бумаг на основе классической модели Марковица, дополненной прогнозами доходностей и ковариаций, полученными с помощью ARIMA-моделей. На теоретическом этапе подробно разобраны предпосылки портфельного инвестирования, даны ключевые определения, приведена математическая формулировка задачи минимизации дисперсии при заданном уровне доходности и получено аналитическое решение Марковица, которое легло в основу практических реализаций.

В практической части сначала выполнены вычислительные эксперименты на синтетических данных, подтвердившие важность диверсификации и чувствительность эффективного фронта к структуре корреляций между активами. Были разработаны программы реализующие:

1. Модель Марковица для определения оптимальных долей активов в портфеле.
2. Модель ARIMA для прогнозирования доходностей.
3. Модуль отвечающий за визуализацию результатов, предоставляющий возможность удобного анализа результатов работы программы.
4. Модуль отвечающий за вычисление матрицы ковариаций, коэффициент Шарпа, процент риска и доходности.

В анализе реальных котировок пяти ведущих российских компаний, та-

ких как «Газпром», «ГМК Норникель», «Сбербанк», «Яндекс», «Северсталь», для каждого инструмента построены ARIMA-модели. По результатам прогноза был сформирован прогнозный вектор доходностей и ковариационная матрица, после чего проведена оптимизация портфеля с тремя стратегиями ребалансировки годовой, полугодовой, квартальной и ограничением на кардинальность.

Сравнение стратегий показало:

- Годовая стратегия обеспечивает наилучшую доходностью, но компенсирует это высоким риском.
- Полугодовая стратегия демонстрирует сбалансированную устойчивость к рыночным изменениям при сравнительно низких транзакционных издержках.
- Квартальная позволяет оперативно реагировать на новые данные, однако приводит к росту волатильности и увеличению совокупных издержек.

Ограничение кардинальности эффективно снижает транзакционные расходы без существенной потери качества портфеля, что важно при работе с малыми объёмами капитала.

Практическая значимость работы заключается в том, что предложенные алгоритмы могут быть интегрированы в автоматизированные системы управления активами как для институциональных, так и для частных инвесторов.

Полученные результаты подтверждают высокую прогностическую способность комбинации классической теории портфеля и временных рядов, открывая перспективу использования данной методики в реальных инвестиционных решениях.