

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра дифференциальных уравнений и математической экономики

Формирование портфеля ценных рискованных бумаг по

заданной функции полезности

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 441 группы

направление 09.03.03 — Прикладная информатика

механико-математического факультета

Сергиенко Григория Станиславовича

Научный руководитель
зав. кафедрой, д.ф.-м.н.,
профессор

С.И. Дудов

Заведующий кафедрой
зав. кафедрой, д.ф.-м.н.,
профессор

С.И. Дудов

Саратов 2025

Введение

Портфельное инвестирование в настоящее время представляет собой один из наиболее распространенных видов финансовой деятельности. В современных рыночных условиях данный сегмент является крайне нестабильным и требует своевременного реагирования и ориентирования в его течениях. Ввиду этого детальное исследование специфики формирования портфеля ценных рисков бумаг как никогда актуально.

Портфельное инвестирование представляет собой инвестирование с заранее зафиксированными условиями, которые дают возможность подобрать наиболее подходящие активы и ценные бумаги в портфель и управлять ими. Портфельные инвестиции осуществляются исключительно с целью привлечения прибыли.

В процессе формирования портфеля ценных бумаг наиболее значимым критерием является приемлемое сочетание комбинации риск-доходность. Риск и доходность связаны прямо пропорциональной зависимостью. Чем выше риск, тем больше значение возможного дохода. Чем выше доля высоко рисков ценных бумаг в портфеле, тем больше шансов понести потери от подобного рода инвестиции. Модель составления набора ценных бумаг, рассматриваемая в данной работе, направлена как на уменьшение риска потерь вклада до минимума, так и на повышение дохода до максимума.

В дипломной работе будут рассмотрены основы портфельного инвестирования, выделены принципы построения портфеля, решена задача максимизации заданной функции полезности и проведены вычислительные эксперименты по формированию портфеля на заданных данных.

Описание структуры. Работа состоит из введения, двух разделов, в которых содержится теоретический материал. В третьем разделе проводятся эксперименты с модельными данными, а в четвёртом на реальных данных. Затем в работе написано заключение, список использованных источников и приложение со скриптами на языке Python, данные, которые выводит скрипт, а также реальные данные, используемые в работе.

Первый раздел содержит формальное описание задачи Марковица об эффективном портфеле ценных рискованных бумаг.

Построение оптимального инвестиционного портфеля — одна из ключевых задач в области финансовой математики. В дипломной работе в каче-

стве теоретической основы используется модель портфельного инвестирования, разработанная Гарри Марковицем. Эта модель впервые ввела количественные характеристики — доходность и риск — в контекст оценки инвестиционных решений и легла в основу современной теории портфеля.

В рамках модели Марковица инвестор оценивает ценные бумаги по двум критериям: ожидаемой доходности и риску (вариации доходности). Основным принципом заключается в том, что разумный инвестор предпочитает либо максимизировать доходность при фиксированном уровне риска, либо минимизировать риск при заданной доходности. Оптимальные с этой точки зрения портфели называются эффективными, а множество таких портфелей формирует фронт Марковица — выпуклую границу в пространстве «риск–доходность».

Для формализации задачи вводятся следующие предпосылки:

1. доходность и риск описываются статистически;
2. активы являются бесконечно делимыми;
3. операции с ценными бумагами не сопровождаются транзакционными издержками;
4. допускается короткая продажа.

С математической точки зрения, задача сводится к квадратичной оптимизации: необходимо минимизировать дисперсию доходности портфеля при заданной его ожидаемой доходности. Для этого используются ковариационная матрица доходностей активов и вектор их средних значений. В результате аналитического решения определяется вектор долей капиталовложений, формирующий эффективный портфель.

Таким образом, задача Марковица предоставляет методологически строгий и практически применимый подход к управлению портфелем. Она позволяет не только количественно оценивать инвестиционные решения, но и формировать множество рациональных стратегий в зависимости от уровня склонности к риску.

Во втором разделе рассматривается основной инструмент, позволяющий учитывать индивидуальные предпочтения инвестора при выборе оптимального портфеля — функция полезности, которая часто применяется в рамках теории Марковица. Её цель — формализовать компромисс между ожидаемой доходностью и риском инвестиций. Суть функции полезности заключается в том, чтобы описать, насколько желателен конкретный портфель для инвестора, с учётом

его отношения к доходности и неприятия риска.

Функция полезности в портфельной теории отражает субъективную оценку инвестором качества портфеля: чем выше значение функции, тем более привлекательным является портфель. Основное предположение заключается в том, что инвестор стремится максимизировать полезность, а не только доходность.

Одна из функций полезности определяется как:

$$U(m_p, \sigma_p) = m_p - \frac{t}{2} \cdot \sigma_p, \quad (1)$$

где m_p — ожидаемая доходность портфеля, σ_p — риск (стандартное отклонение доходности), а t — коэффициент неприятия риска, определяющий, насколько инвестор боится риска. Чем выше t , тем более чувствителен инвестор к увеличению риска.

Эта функция показывает, что полезность увеличивается при росте доходности и уменьшается при увеличении риска. Однако она имеет ограниченную гибкость. Поэтому в ряде исследований используется более общая форма, предполагающая наличие квадратичной зависимости от доходности. Такая функция учитывает усиленное предпочтение инвестора к высоким доходам и её мы и будем рассматривать в дальнейшей работе:

$$U(m_p, \sigma_p) = t \cdot m_p^2 - (1 - t) \cdot \sigma_p^2$$

где параметр $t \in [0, 1]$ регулирует баланс между приоритетом доходности и стремлением к минимизации риска. Эта функция отличается от предыдущей тем, что:

1. доходность возводится в квадрат, усиливая влияние высоких значений;
2. риск учитывается через дисперсию, а не через стандартное отклонение;
3. коэффициенты t и $1 - t$ позволяют варьировать поведение инвестора от исключительно ориентированного на доходность ($t = 1$) до исключительно избегания риска ($t = 0$).

Функции полезности позволяют не просто выбрать «лучший» портфель из фронта Марковица, но и объяснить поведение инвестора: почему, например, при одном и том же уровне доходности он предпочитает менее волатильный портфель. Таким образом, включение функции полезности в теорию портфеля делает модель более гибкой и приближённой к реальности.

Третий раздел дипломной работы посвящён численному эксперименту с использованием синтетических (модельных) данных, что позволяет исследовать поведение портфельной модели в контролируемых условиях. Основной задачей эксперимента стало построение фронта Марковица, проверка влияния параметра функции полезности на структуру оптимального портфеля и демонстрация применимости алгоритма к различным инвестиционным сценариям.

На начальном этапе эксперимента были заданы произвольные ожидаемые доходности и риски для трёх условных ценных бумаг. Также была определена ковариационная матрица доходностей. Затем реализован классический алгоритм решения задачи Марковица, основанный на аналитическом выводе:

- Формируются векторы доходностей $m = (m_1, m_2, m_3)^T$ и единичный вектор I .
- Строится ковариационная матрица V , в простейшем случае — диагональная (в отсутствие корреляции между активами).
- Вычисляются коэффициенты:

$$a_{11} = I^T V^{-1} I, \quad a_{12} = I^T V^{-1} m, \quad a_{22} = m^T V^{-1} m,$$

а также дискриминант:

$$d_0 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2.$$

- Находятся векторы b и c , определяющие структуру портфеля в зависимости от желаемой доходности m_p :

$$x = b + c \cdot m_p.$$

- Риск рассчитывается по формуле:

$$\sigma_p = \sqrt{\alpha m_p^2 + 2\beta m_p + \gamma},$$

где параметры α, β, γ получаются как квадратичные формы от b и c .

Программа реализована на языке Python с использованием библиотек NumPy и matplotlib. Она позволяет задавать любую комбинацию параметров и получать соответствующий эффективный фронт. Это даёт возможность анализировать поведение модели при различных сценариях доходности, риска и ковариации.

В эксперимент также была включена функция полезности:

$$U(m_p, \sigma_p) = t \cdot m_p^2 - (1 - t) \cdot \sigma_p^2,$$

что позволило исследовать влияние предпочтений инвестора на выбор портфеля. Изменяя параметр t от 0 до 1, можно было построить семейство портфелей, ориентированных либо на доходность, либо на снижение риска.

Было замечено, что при высоких значениях m_p и низком риске функция демонстрирует крайнее поведение — быстро «выбирает» одну бумагу и игнорирует остальные. Это важное наблюдение, указывающее на необходимость нормализации входных данных или введения ограничений на короткие продажи при работе с реальными данными.

Несмотря на то, что в данном разделе использовались синтетические данные, реализованный алгоритм полностью пригоден для анализа реальных рыночных данных. Достаточно подставить эмпирические доходности и ковариации, рассчитанные на основе исторических цен, и модель будет работать аналогично.

Ниже приведён пример построенного в рамках работы с моделью фронта Марковица, а также кривых безразличия, полученных при помощи модельных данных:

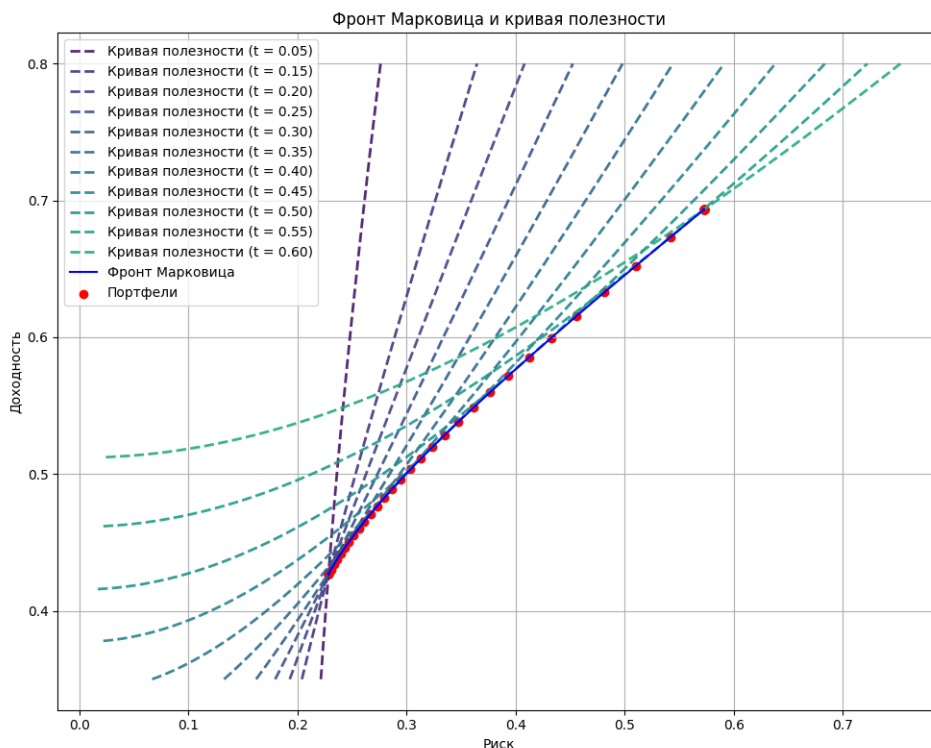


Рисунок 1 – График фронта Марковица и нескольких кривых безразличия

На графике отображена выпуклая граница эффективных портфелей. Каждая точка соответствует портфелю с заданной доходностью m_p , минимизирующему риск σ_p .

В конце раздела были описаны следующие выводы, позволяющие более эффективно подходить к этапу работы с реальными данными:

1. Модель одинаково относится как к коррелирующим, так и к независимым ценным бумагам.
2. При отсутствии ограничения на выполнение операции с короткими продажами применение модели ведёт к использованию жадного алгоритма оптимизации, который не может быть адекватно применён в реальности.
3. Отличие функции полезности с квадратом ожидаемой доходности наблюдается на фронте Марковица и на оптимальных портфелях, формирующих его. Так, при использовании выбранной в качестве основной функции полезности **1**, мы получаем более резкий рост ожидаемой доходности и риска, что может быть не очень удобно при дальнейшем анализе.

В четвёртом разделе дипломной работы рассмотрена практическая реализация модели Марковица на основе реальных данных по акциям компаний **NVIDIA (NVDA)**, **Amazon (AMZN)** и **Coca-Cola (KO)** за период с января 2016 по декабрь 2023 года. Это позволило проверить применимость модели к реальному фондовому рынку и оценить точность её предсказаний. В тексте подробно описано, по какой причине были взяты именно эти акции.

Данные были собраны с сайта `investing.com` в формате `.csv` и прошли предобработку: конвертацию строковых значений в числовые, фильтрацию пропусков и устранение аномалий. Далее был использован алгоритм, аналогичный тому, что был на модельных данных.

Алгоритм работы с реальными данными включал следующие шаги:

1. Сбор месячных данных с января 2016 по декабрь 2023 года.
2. Разделение данных:
 - Исторические данные: 2016–2019 (для 4-летнего портфеля), 2016–2017 и 2018–2019 (для двух 2-летних портфелей).
 - Период владения: 2020–2023 (4 года), 2018–2019 и 2020–2021 (2+2 года).
3. Построение матрицы ковариаций по месячным доходностям.
4. Расчёт ожидаемой доходности по итоговым ценам начала и конца периода.

5. Запрет короткой продажи (ограничение $x_i \geq 0$).
6. Построение фронта Марковица.
7. Расчёт фактической доходности портфеля:

$$R = \sum_{i=1}^n x_i R_i,$$

где x_i — доля актива в портфеле, R_i — реальная доходность актива.

8. Сравнение прогнозной и фактической доходности.

Модель использует всё ту же функцию полезности вида:

$$U = t \cdot m^2 + (1 - t) \cdot \sigma^2,$$

где m — ожидаемая доходность, σ — риск, $t \in [0, 1]$ — параметр, отражающий отношение инвестора к риску.

Ниже приведён пример графика фронта Марковица, построенного на основе исторических данных за 2016–2019 годы:

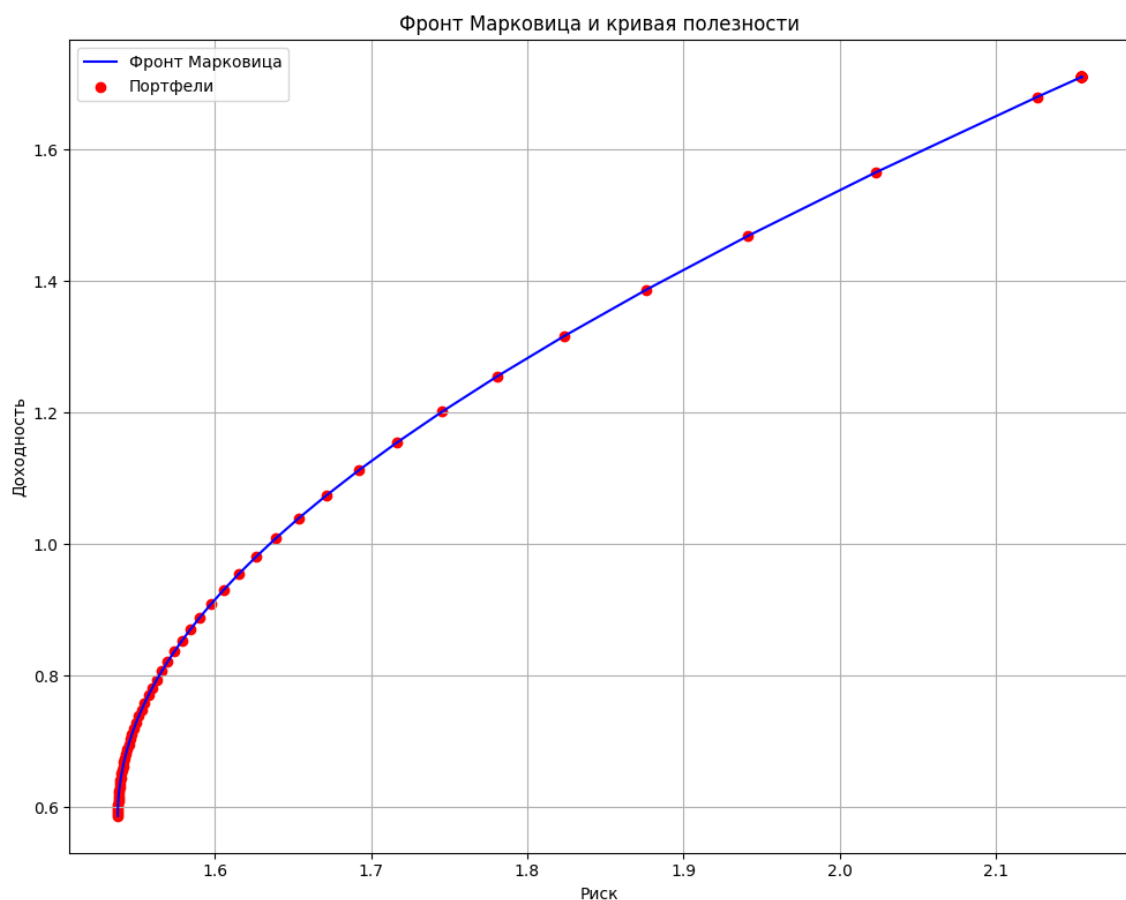


Рисунок 2 – Фронт Марковица для четырёхгодового портфеля

Для каждого параметра t были рассчитаны прогнозируемая моделью доходность m_p и фактическая доходность m'_p по историческим данным:

t	Модельная доходность m_p	Реальная доходность m'_p
0.050	0.6233	0.2709
0.100	0.6694	0.3307
0.150	0.7297	0.4090
0.200	0.8119	0.5158
0.250	0.9309	0.6702
0.300	1.1180	0.9133
0.350	1.4558	1.3518
0.400	1.7102	1.6822
0.450	1.7102	1.6822
0.500	1.7102	1.6822

Таблица 1 – Сравнение модельной и реальной доходностей (4-летний портфель)

Далее, после того, как аналогичный эксперимент был проделан для ещё двух портфелей двухлетнего периода инвестирования, для сравнения эффективности владения портфелем на протяжении 4 лет и стратегии с двумя пересобранными портфелями по 2 года использовалась формула сложного процента:

$$R = \left(\prod_{i=1}^n (1 + R_i) \right) - 1.$$

Вот результаты, которые получились в результате сравнения эффективностей портфелей:

t	$R_{4 \text{ года}}$	$R_1 \times R_2$
0.050	0.7147	1.1374
0.100	0.7428	1.2069
0.200	0.8195	1.4188
0.300	0.9448	1.8659
0.400	1.1869	3.6738
0.500	1.8508	13.1192

Видно, что более эффективной стратегией является сборка двухлетнего

портфеля с пересборкой через два года на ещё два года.

- Модель Марковица способна формировать портфели с доходностью, близкой к фактической.
- Алгоритм устойчив даже при ограничении на короткую продажу.
- Стратегия с периодической пересборкой портфеля может значительно повышать итоговую доходность.
- Слишком частая пересборка может снижать надёжность прогнозов из-за переобучения.

В приложении были представлены следующее:

1. программный код, реализующий модель Марковица и взаимодействие с её параметрами;
2. формат данных, который выдаёт программа в ходе работы с модельными данными для формализации описания вывода программа;
3. данные, по которым осуществлялись расчёты ожидаемой доходности, рисков и ковариаций для реальных данных по описанной выше методологии.

Заключение. В данной выпускной квалификационной работе была рассмотрена задача оптимального формирования портфеля рискованных активов с использованием модели Марковица и функции полезности инвестора. Основное внимание уделялось исследованию теоретических основ, разработке вычислительного алгоритма и практической проверке эффективности модели как на синтетических, так и на реальных данных.

Работа началась с изучения классической модели Марковица, на которой основана современная теория портфеля. Были изложены ключевые принципы эффективного выбора ценных бумаг, основанные на соотношении риска и ожидаемой доходности, а также описаны математические методы, лежащие в основе построения эффективной границы — так называемого фронта Марковица. На этой теоретической основе была выведена аналитическая формула, позволяющая рассчитывать оптимальные структуры портфеля при заданных значениях ожидаемой доходности.

Особое внимание было уделено функции полезности, описывающей индивидуальные предпочтения инвестора в отношении риска и дохода. Использование параметризованной функции полезности позволило моделировать разное поведение инвесторов и отразить, как варьируются их инвестиционные решения при изменении отношения к риску.

В практической части работы была проведена серия экспериментов на модельных данных, что позволило проверить корректность разработанного алгоритма и наглядно продемонстрировать влияние различных параметров на форму эффективного фронта и структуру портфеля. Результаты показали, что при корректной настройке параметров модель демонстрирует устойчивость и предсказуемость.

Продолжением практической части стало применение модели на реальных исторических данных по ценным бумагам ведущих мировых компаний. Полученные результаты подтвердили, что теоретическая модель может быть адаптирована для практических задач, а также позволили оценить точность прогнозов модели при сравнении с фактической доходностью акций в последующие периоды.

Отдельный интерес вызвало сравнение стратегий «долгосрочного удержания портфеля» и «пересборки через два года». Анализ показал, что периодическая пересборка может оказывать существенное влияние на итоговую доходность, что подчёркивает значимость регулярного обновления портфеля на основе актуальных данных.

Всё вышеизложенное было показано в рамках этой работы, а поставленные цели полностью достигнуты.