

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра дифференциальных уравнений и математической экономики

Оптимизация устойчивости по доходности и

рisku портфеля ценных рисковх бумаг

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 441 группы

направление 09.03.03 — Прикладная информатика

механико-математического факультета

Подуст Яны Сергеевны

Научный руководитель

зав. кафедрой., д.ф.-м.н., профессор

С.И. Дудов

Зав. кафедрой

зав. кафедрой., д.ф.-м.н., профессор

С.И. Дудов

Саратов 2025

Введение. Данная бакалаврская работа посвящена оптимизации устойчивости по доходности и риску портфеля ценных рисков бумаг.

Актуальность проблемы оптимизации устойчивости по доходности и риску портфеля ценных бумаг является важной для инвесторов и управляющих активами.

Портфельное инвестирование позволяет планировать, оценивать и контролировать конечные результаты всей инвестиционной деятельности в различных сегментах фондового рынка.

Цель бакалаврской работы заключается в изучение основ теории портфельного инвестирования и формирования такого портфеля ценных бумаг, у которого запас устойчивости по доходности и риску был бы максимальным, а также применение приобретенных знаний при проведении вычислительных действий на реальных данных. Для достижения этих целей в работе решались следующие задачи:

1. Изучение основ портфельного инвестирования;
2. Постановка задачи Марковица и подробное изучение её решения;
3. Моделирование задачи устойчивости по доходности и риску портфеля ценных бумаг;
4. Аналитическое решение задачи
5. Выбор используемой среды и программная реализация решения;
6. Решение задачи на модельных данных;
7. Выбор ценных бумаг для проведения вычислительных экспериментов;
8. Проведение вычислительных экспериментов на реальных данных

В данной работе изложена теория, которая способствует пониманию портфельного инвестирования. Кроме того, в работе рассмотрены и решены задачи по оптимизации устойчивости инвестиционного портфеля. Также представлена экспериментально сформированная структура портфеля, в которой показатели доходности и риска основаны на модельных и реальных данных.

В первом разделе, «Портфельное инвестирование», изложена теоретическая основа темы. Рассмотрены ключевые аспекты портфельного инвестирования, его преимущества и недостатки, различные типы инвестиционных портфелей и категорий инвесторов. Также представлены основные понятия

доходности и риска, которые станут основой для последующих расчетов и анализа.

В рамках данного подхода предполагается, что инвестор стремится максимизировать ожидаемую доходность портфеля при заданном уровне риска, либо минимизировать риск при заданном уровне ожидаемой доходности посредством диверсификации вложений. В этом состоит главное преимущество портфельного инвестирования по сравнению с инвестициями в отдельные ценные бумаги.

Во втором разделе, «Задача Г. Марковица», была рассмотрена выдвинутая Гарри Марковицем теория. Описаны её основные положения, исходные предположения, а также математическая модель для поиска эффективного портфеля ценных бумаг. Кроме того, будут представлены ключевые формулы, применяемые в этой теории, и показано её аналитическое решение.

Предположим, что прогнозируемые значения ожидаемых доходностей ценных бумаг задаются вектором $m = (m_1, m_2, \dots, m_n)^T$ и известна матрица ковариации V .

Тогда задача сводится к поиску структуры портфеля $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, которая бы смогла обеспечить достижение заданной ожидаемой доходности портфеля m_p с минимальным риском. С учетом формул доходности и риска, математическое представление задачи имеет вид

$$D_p = x^T V x \rightarrow \min_x, \quad (1)$$

$$I^T x = 1, m^T x = m_p. \quad (2)$$

Проведя аналитическое решение задачи, получаем оптимальную структуру портфеля x^* в виде:

$$x^* = b + c m_p, \quad (3)$$

где b и c - векторы размерности n

$$b = \frac{1}{d} (a_{22} V^{-1} I - a_{12} V^{-1} m), \quad (4)$$

$$c = \frac{1}{d}(a_{11}V^{-1}m - a_{12}V^{-1}I), \quad (5)$$

Портфель ценных бумаг со структурой, определяемой по формуле 3, будем называть оптимальным по Марковицу. Ему соответствует минимальная дисперсия доходности портфеля, определяемая по формуле

$$D_p = \sigma_p^{*2} = m_p^2 c^T V c + 2b^T V c m_p + b^T V b. \quad (6)$$

Третий раздел, «Задача оптимизации устойчивости по доходности и риску», в нем описана словесная и математическая формализация задачи, а также её аналитическое решение.

Предположим, что нам задается предельное снизу значение ожидаемой доходности портфеля m_p^* , понимаемое как ограничение снизу (доходность у формируемого портфеля должен быть не менее m_p^*). А также задано предельное значение риска портфеля σ_p^* , которое задает ограничение сверху (риск у формируемого портфеля не должен превысить σ_p^*). При этом предполагается, что портфель с данными (m_p^*, σ_p^*) не является эффективным. Требуется сформировать портфель, у которого разности $m_p^2 - (m_p^*)^2$ (запас устойчивости по доходности) и $(\sigma_p^*)^2 - \sigma_p^2$ (запас устойчивости по риску) принимали бы максимальное значение. Но поскольку эти значения (доходности и риска) противоречивы, то выбираем коэффициент пропорциональности $k > 0$ между этими значениями. В итоге получаем следующую математическую формализацию задачи:

$$\min\{k((m^T x)^2 - (m_p^*)^2), (\sigma_p^*)^2 - (x^T V x)^2\} \rightarrow \max_x, \quad (7)$$

$$I^T x = 1.$$

После всех исследований и математических вычислений мы получаем решение для нашей задачи в виде формулы для нахождения ожидаемой доходности:

$$m_p = \frac{-2\beta + \sqrt{4\beta^2 - 4(k + \alpha)(\gamma - k(m_p^*)^2 - (\sigma_p^*)^2)}}{2(k + \alpha)}. \quad (8)$$

По найденному значению m_p теперь можно восстановить структуру распределения акций капитала инвестора x^0 и получить соответствующее значение риска.

Предварительно получим явные формулы для α, β и γ

$$\begin{aligned}
\alpha &= c^T V c = \frac{1}{d^2} (a_{11} V^{-1} m - a_{12} V^{-1} I)^T V (a_{11} V^{-1} m - a_{12} V^{-1} I) = \\
&= \frac{1}{d^2} (a_{11} V^{-1} m - a_{12} V^{-1} I)^T (a_{11} m - a_{12} I) = \\
&= \frac{1}{d^2} (a_{11}^2 m^T V^{-1} m - a_{11} a_{12} m^T V^{-1} I - a_{11} a_{12} I^T V^{-1} m + a_{12}^2 I^T V^{-1} I) = \\
&= \frac{1}{d^2} (a_{11}^2 a_{22} - a_{11} a_{12}^2 - a_{11} a_{12}^2 + a_{11} a_{12}^2) = \frac{1}{d^2} a_{11} (a_{11} a_{22} - a_{12}^2) = \frac{a_{11}}{d}; \\
\beta &= b^T V c = \frac{1}{d^2} (a_{22} V^{-1} I - a_{12} V^{-1} m)^T V (a_{11} V^{-1} m - a_{12} V^{-1} I) = \\
&= \frac{1}{d^2} (a_{22} V^{-1} I - a_{12} V^{-1} m)^T (a_{11} m - a_{12} I) = \\
&= \frac{1}{d^2} (a_{22} a_{11} I^T V^{-1} m - a_{22} a_{12} I^T V^{-1} I - a_{12} a_{11} m^T V^{-1} m + a_{12}^2 m^T V^{-1} I) = \\
&= \frac{1}{d^2} (a_{22} a_{11} a_{12} - a_{22} a_{12} a_{11} - a_{12} a_{11} a_{22} + a_{12}^3) = \frac{1}{d^2} a_{12} (a_{12}^2 - a_{11} a_{22}) = -\frac{a_{12}}{d}; \\
\gamma &= b^T V b = \frac{1}{d^2} (a_{22} V^{-1} I - a_{12} V^{-1} m)^T V (a_{22} V^{-1} I - a_{12} V^{-1} m) = \\
&= \frac{1}{d^2} (a_{22} V^{-1} I - a_{12} V^{-1} m)^T (a_{22} I - a_{12} m) = \\
&= \frac{1}{d^2} (a_{22}^2 I^T V^{-1} I - a_{22} a_{12} I^T V^{-1} m - a_{12} a_{22} m^T V^{-1} I + a_{12}^2 m^T V^{-1} m) = \\
&= \frac{1}{d^2} (a_{22}^2 a_{11} - a_{22} a_{12}^2 - a_{12}^2 a_{22} + a_{12}^2 a_{22}) = \frac{1}{d^2} a_{22} (a_{22} a_{11} - a_{12}^2) = \frac{a_{22}}{d}.
\end{aligned}$$

Подставив α, β и γ в 8, получим:

$$m_p = \frac{\frac{2a_{12}}{d} + \sqrt{\frac{4a_{12}^2}{d^2} - 4(k + \frac{a_{11}}{d})(\frac{a_{22}}{d} - k(m_p^*)^2 - (\sigma_p^*)^2)}}{2(k + \frac{a_{11}}{d})}. \quad (9)$$

Четвертый раздел, «Вычислительные эксперименты на модельных данных» содержит в себе наглядное применение на практике теоретического материала, аналитического решения задачи Г. Марковица, а также проведение экспериментов по оптимизации устойчивости на модельных данных. Чтобы провести данные эксперименты, были использованы положительно определенные матрицы.

Для реализации данной бакалаврской работы мной использовались следующие программные средства:

1. Язык программирования Python 3, а также различные подключаемые библиотеки, такие как pandas, numpy, matplotlib, math и другие.
2. Среда для разработки и выполнения программного кода на языке Python 3 в облаке Google Colab.

Мой выбор пал именно на Python 3, в виду того, что этот язык обладает рядом особенностей и преимуществ по сравнению с другими языками программирования. Например, он отличается своей простотой, читабельностью, гибкостью и применимостью в различных областях.

Были рассмотрены два модельных примера, на которых проиллюстрировался теоретический материал, выведено графическое решение задачи и с помощью программного кода реализована задача Марковица.

В пятом разделе, «Вычислительные эксперименты на реальных данных» для проведения эксперимента с использованием реальных данных и создания инвестиционного портфеля с различными сроками владения, требовалось проанализировать рынок акций и выявить прибыльные сектора для инвестирования.

Текущая динамика характеризуется смешанными сигналами: с одной стороны, прослеживается тенденция к возвращению цен на прежний уровень, с другой – сохраняется значительная неопределенность, поэтому в резуль-

тате проведенного исследования рыночной ситуации был осуществлен отбор компаний, акции которых показали максимально сдержанную реакцию на колебания.

При проведении анализа ценных бумаг применялись следующие технические индикаторы и методики:

1. Индикатор Аллигатора (Alligator Indicator): используется для определения направления тренда и момента входа в рынок;
2. Каналы (Price Channels): помогают определить границы колебаний цены и выявить точки разворота трендов;
3. Уровни Фибоначчи (Fibonacci Levels): применяются для выявления потенциальных уровней поддержки и сопротивления, точек отката и продолжения движения;
4. Волновой анализ Эллиотта (Elliott Wave Theory): основан на теории волновых движений рынка, включая идентификацию основных импульсных волн и коррекционных фаз.

Эти инструменты позволяют комплексно анализировать поведение рынка, выявлять ключевые тенденции и закономерности, повышая точность прогнозирования динамики стоимости ценных бумаг.

Стоимость акций «Сбербанка» стремительно растёт и, согласно прогнозам, показанным на рисунке 5.3, продолжит увеличиваться в будущем.

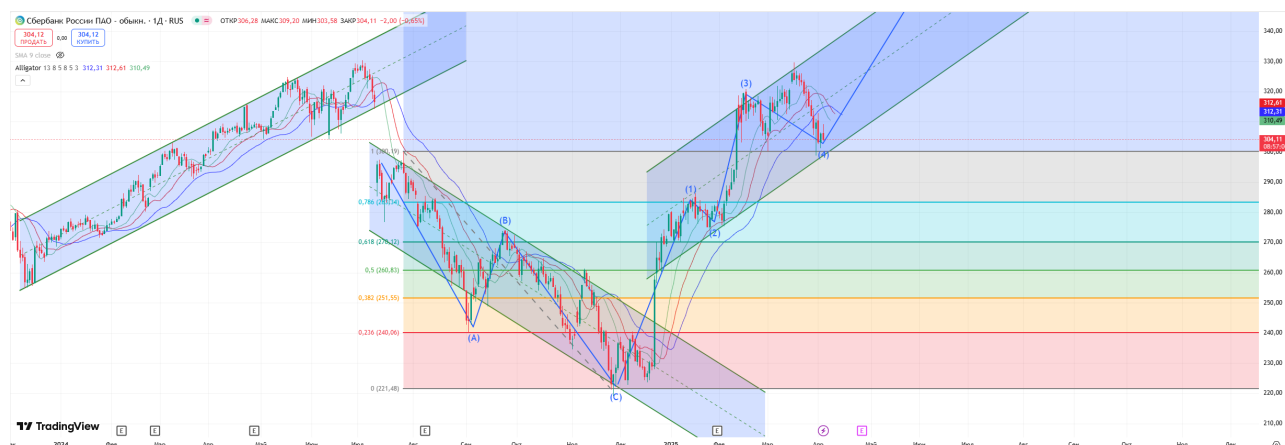


Рисунок 1 — Прогноз акций «Сбербанк»

Так, проанализировав остальные 3 компании «Полюс», «Аэрофлот», «Яндекс» мы выяснили, что все компании показывают рост акций в долгосрочном периоде.

Для более наглядного подтверждения корректной работы программы было решено провести серию экспериментов. Эти эксперименты позволят визуально продемонстрировать функциональность и эффективность разработанной системы, проверив её основные алгоритмы и результаты на практике, для каждой ситуации будет проведен анализ среднесрочной сделки сроком на пол года в период с 01.11.2024 по 01.04.2025:

- 1 случай: портфель «Аэрофлот», «Сбербанк», «Полюс»;
- 2 случай: портфель «Аэрофлот», «Сбербанк», «Яндекс»;
- 3 случай: портфель «Аэрофлот», «Яндекс», «Полюс»;
- 4 случай: портфель «Яндекс», «Сбербанк», «Полюс».

Для подготовки исходных данных брались цены котировок за предыдущие 6 месяцев для Сбербанка, Аэрофлота, Полюса, Яндекса. С помощью встроенных функций Excel рассчитывалась их доходность, после чего находилось среднее арифметическое — оно использовалось в качестве прогнозируемого значения доходности на следующий месяц.

В эксперименте, реализуемом для акций компаний «Яндекс», «Сбербанк», «Полюс» в промежутке с 01.11.2024 01.04.2025, с временным интервалом в один месяц, что позволило получить исходный вектор ожидаемой доходности, который показан на рисунке 2:

2024-25 год	Яндекс	Сбербанк	Полюс	m_p Яндекс	m_p Сбербанк	m_p Полюс
01.ноя	3674	238,03	1516,4			
01.дек	3434	235,17	1443	-0,065323898	-0,012015292	-0,048404115
01.янв	3872,5	279,43	1398,2	0,127693652	0,188204278	-0,031046431
01.фев	4092	280,73	1717	0,05668173	0,004652328	0,228007438
01.мар	4423	305,5	1931,4	0,080889541	0,088234246	0,124868957
01.апр	4355,5	303,24	1783	-0,015261135	-0,007397709	-0,076835456
ожидаемая доходность:				0,030779982	0,043612975	0,032765066

Рисунок 2 — Ожидаемая доходность для портфеля

Строим матрицу ковариации для данного случая с использованием функции в Excel — *ковариация.в()*.

На рисунке 3, показана исходная матрица ковариации для портфеля с 01.11.2024 по 01.04.2025.

	Яндекс	Сбербанк	Полюс
Яндекс	0,005935097	0,005666469	0,004033325
Сбербанк	0,005666469	0,007432953	-0,000725815
Полюс	0,004033325	-0,000725815	0,017265155

Рисунок 3 — Ковариационная матрица, подсчитанная в Excel

В ходе реализации программы на интересующем нас периоде мы получаем следующие данные на графике оптимальных портфелей:

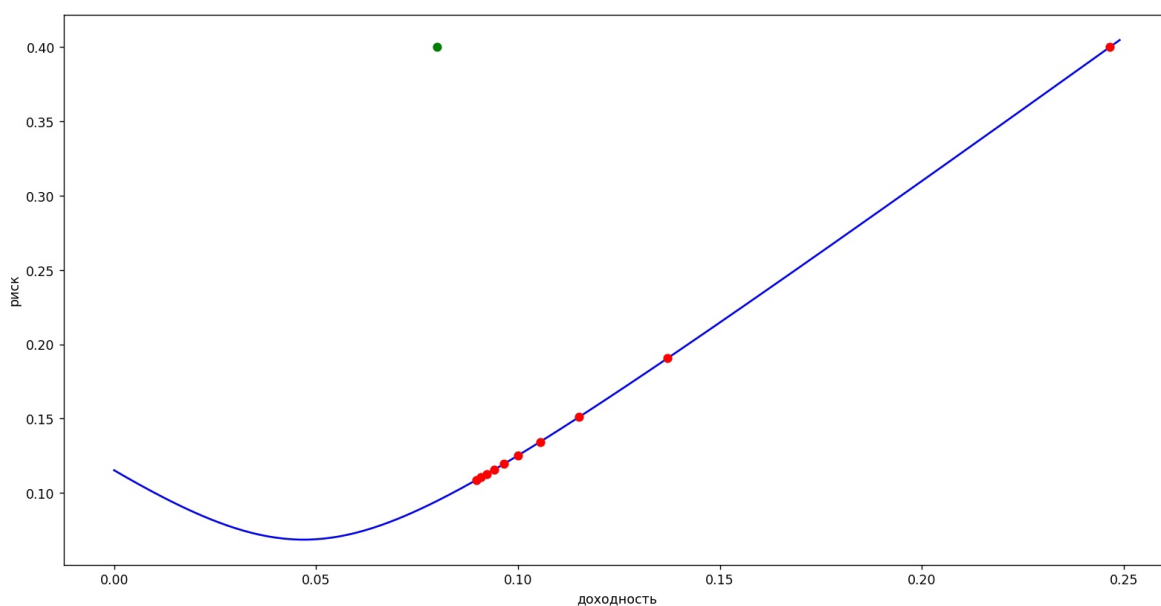


Рисунок 4 — График оптимальных портфелей

В таблице 1 представлена информация о различиях в доходности и уровне риска для портфеля при изменении коэффициента k . Анализ данных позволяет оценить эффективность инвестиций при различных значениях данного параметра.

Таблица 1 — Таблица, отражающая риск и структуру эффективного портфеля для различных значений коэффициента пропорциональности:

k	m_p	σ_p	x_1	x_2	x_3	m
0.0	0.24657	0.40000	-20.03235	16.04400	4.98835	1.668979489
10.0	0.13700	0.19056	-9.40080	7.88841	2.51238	0.771526549
20.0	0.11514	0.15111	-7.28035	6.26179	2.01855	0.592530632
30.0	0.10550	0.13443	-6.34489	5.54420	1.80070	0.513564087
40.0	0.10004	0.12528	-5.81465	5.13744	1.67721	0.46880455
50.0	0.09651	0.11951	-5.47241	4.87490	1.59751	0.439914523
60.0	0.09404	0.11556	-5.23298	4.69124	1.54175	0.419703119
70.0	0.09222	0.11268	-5.05599	4.55546	1.50053	0.404762805
80.0	0.09082	0.11050	-4.91979	4.45098	1.46881	0.393265618
90.0	0.08970	0.10878	-4.81170	4.36807	1.44363	0.38414154

В рамках исследования были выполнены четыре практических эксперимента с использованием реальных данных по акциям. Для каждого случая были подготовлены исходные данные, включающие векторы доходности и матрицы ковариаций. После этого для всех сформированных портфелей были вычислены показатели риска, доходности и их структура. Результаты анализа показали, что все портфели являются оптимальными.

Благодаря подсчетам можно сделать вывод о составленных портфелях: при одинаковом значении риска самым доходным оказался портфель, состоящий из бумаг «Яндекс», «Сбербанк», «Полус». При возрастании значения коэффициента k наблюдается снижение доходности портфеля, однако одновременно уменьшается и уровень его рискованности. Это позволяет инвестору, исходя из своих инвестиционных целей, подобрать наиболее подходящую структуру портфеля с помощью данного коэффициента.

При проведении детального анализа инвестиционного портфеля становится очевидно значительное расхождение между ожидаемой и фактической доходностью. Реальная доходность демонстрирует существенно более высокие показатели по сравнению с предварительными расчетами.

Анализ показывает, что разработанная модель представляет собой эффективный инструмент для формирования диверсифицированных инвестиционных портфелей, нацеленных на достижение оптимизации устойчивости доходности и риска портфеля. Ключевым аспектом при этом является необходимость учета корреляционных связей между активами в портфеле для оптимизации диверсификации и снижения рисков.

Заключение. Целью данной выпускной работы было освоение теоретических аспектов портфельного инвестирования, рассмотрение классической задачи оптимизации структуры портфеля ценных бумаг, предложенной Г. Марковицем, а также практическая реализация метода оптимизации устойчивости по доходности и риску для портфеля ценных рискованных бумаг на примере модельных данных посредством программирования.

Применяя полученные знания, был разработан программный код, который автоматически разрабатывает структуру инвестиционного портфеля с максимальным отношением доходности к риску.

С помощью проведения экспериментов на модельных и реальных данных, мы убедились, что риск и доходность прямо пропорциональны и зависят друг от друга, то есть чем выше доходность, тем выше риск и наоборот. Но если задать минимальную желаемую доходность и максимальный этой доходности риск, то с определенным коэффициентом пропорциональности можно получить оптимальный для инвестора портфель с данными соотношениями.

Все задачи, поставленные вначале, были выполнены, тем самым цель достигнута.