МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра дифференциальных уравнений и математической экономики

Исследование аппроксимативных возможностей обобщений синк-аппроксимаций

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента (ки) 2 курса 218 группы

направления **01.04.02 – Прикладная математика и информатика**

код и наименование направления

механико-математического факультета

наименование факультета, института, колледжа

Рыжовой Маргариты Евгеньевны

фамилия, имя, отчество

Научный руководитель
профессор, д.ф.-м.н., доцент _____ А. Ю. Трынин

Заведующий кафедрой
зав. кафедрой, д.ф.-м.н.,
профессор _____ С. И. Дудов

Саратов 2025

ВВЕДЕНИЕ

Обобщения синк-аппроксимаций представляют собой метод аппроксимации функций, который основывается на использовании сферических функций Бесселя нулевого порядка, известных как функции синк (или функции Бесселя первого рода). Этот метод широко используется в различных областях, таких как обработка сигналов, обработка изображений, оптика, математическое моделирование и другие.

Основная идея работы заключается в том, чтобы показать, что обобщения синк-аппроксимаций сохраняют возможность приближения непрерывных фракталов, для которых классические синк-аппроксимации имеют тенденцию к неограниченному увеличению погрешности приближения в окрестности заданной точки.

Целью работы является изучение аппроксимативных свойств, а также проведение численного эксперимента.

Поставленная цель определила следующие задачи:

1. Исследовать сходимость и устойчивость обобщенных синк-аппроксимаций;
2. Проанализировать влияние различных параметров на точность аппроксимации;
3. Изучить погрешности и оценить их величину для различных обобщенных синк-аппроксимаций;
4. Реализовать алгоритм для численного эксперимента непрерывной функции в программной среде.

1 Историческая справка

История возникновения аппроксимативных свойств обобщений синк-аппроксимаций включает несколько ключевых этапов, связанных с развитием теории обработки сигналов, численных методов и их приложений.

1.1 Классическая синк-функция и теорема отсчетов Уиттекера-Шеннона

1.1 **Синк-функция**.

1.2 **Теорема Уиттекера-Котельникова-Шеннона**.

1.2 Современные исследования и приложения.

4.1 **Цифровая обработка сигналов.**

4.2 **Численные методы и моделирование.**

4.3 **Примеры приложений.**

- **Медицинская визуализация**.

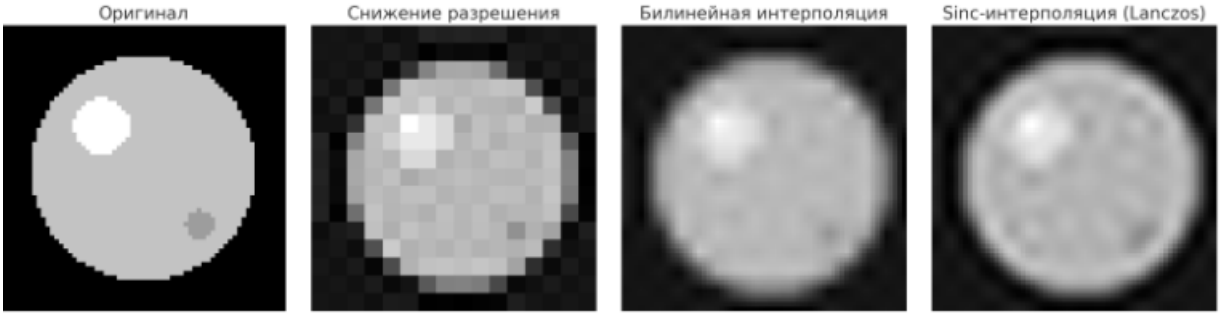

Рисунок 1.1 — Сравнение восстановления медицинского изображения (фантома) после снижения разрешения

- **Геофизика**.
- **Компьютерная графика**.

2 Обобщение теоремы отсчетов Уиттекера-Котельникова-Шеннона для непрерывных функций на отрезке

В работе изучаются аппроксимативные свойства операторов интерполирования лагранжева типа, представляющих собой некоторое обобщение усеченных кардинальных функций Уиттекера и классических интерполяционных многочленов.

Пусть $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ — некоторая система комплексных или действительнозначных функций, определенных на множестве $D \subset \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, каждая из которых при любом натуральном n обращается в нуль во всех точках множества $\{x_{k,n}\}_{k=0}^{n} \subset D$ и имеет конечную отличную от нуля производную в этих точках. Тогда значения операторов L_n, ставящих в соответствие любой определенной на множестве $\{x_{k,n}\}_{k=0}^{n} \subset D$ функции f другую, доопределенную по непрерывности в точках множества $\{x_{k,n}\}_{k=0}^{n}$ функцию вида

$$L_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{y_n(x)}{y_n'(x_{k,n})(x - x_{k,n})} f(x_{k,n}) = \sum_{k=0}^{n} l_{k,n}(x) f(x_{k,n}), \qquad (2.1)$$

интерполируют f в узлах $\{x_{k,n}\}_{k=0}^{n}$, то есть

$$L_n(f, x_{k,n}) = f(x_{k,n}), \quad 0 \le k \le n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Пусть $\rho_\lambda \ge 0, rho_\lambda = o(\lambda)$ при $\lambda \to= \infty, h(\lambda) \in \mathbb{R}$ и при каждом неотрицательно λ функция $q_\lambda(x)$ есть произвольный элемент из шара $V_{\rho\lambda}[0,\pi]$ радиуса ρ_λ в пространстве функций с ограниченным изменением, исчезающих в нуле, т.е.

$$V_0^{\pi}[q_\lambda] \le \rho_\lambda, \quad q_\lambda(0) = 0, \quad \rho_\lambda = o(\lambda). \qquad (2.2)$$

Для любого потенциала $q_\lambda \in V_{\rho\lambda}[0,\pi]$ при $\lambda \to= \infty$ нули решения задачи Коши

$$y'' + (\lambda - q_\lambda(x))y = 0, \quad y(0,\lambda) = 1, \quad y'(0,\lambda) = h(\lambda) \qquad (2.3)$$

или, при дополнительном условии $h(\lambda) \ne 0$, задачи Коши

$$y'' + (\lambda - q_\lambda(x))y = 0, \quad y(0,\lambda) = 0, \quad y'(0,\lambda) = h(\lambda), \qquad (2.4)$$

попадающие в $[0,\pi]$ и перенумерованные в порядке возрастания, обозначаются

$$0 \le x_{0,\lambda} < x_{1,\lambda} < \cdot < x_{n(\lambda),\lambda} \le \pi, \tag{2.5}$$

где $x_{-1,\lambda} < 0, \quad x_{n(\lambda+1,\lambda} > \pi$.

В настоящей работе исследуются аппроксимативные свойства операторов типа Лагранжа 2.1, построенных по решениям задачи Коши вида 2.3 или 2.4 и ставящих в соответствие любой определенной на отрезке $[0,\pi]$ функции f интерполирующую ее в узлах $\{x_{k,\lambda}\}_{k=0}^{n}$ непрерывную функцию таким образом:

$$S_\lambda(f,x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{y(x,\lambda)}{y'\left(x_{k,\lambda},\lambda\right)\left(x - x_{k,\lambda}\right)} f\left(x_{k,\lambda}\right) = \sum_{k=0}^{n} s_{k,\lambda}(x) f\left(x_{k,\lambda}\right). \tag{2.6}$$

Определим оператор, ставящий в соответствие любой заданной на отрезке $[0,\pi]$ функции f непрерывную функцию $T_\lambda(f,x)$ по правилу

$$\begin{aligned} T_\lambda(f,x) = &\sum_{k=0}^{n} \frac{y(x,\lambda)}{y'\left(x_{k,\lambda}\right)\left(x - x_{k,\lambda}\right)} \left[f\left(x_{k,\lambda}\right) - \frac{f(\pi)-f(0)}{\pi} x_{k,\lambda} - f(0) \right] \\ &+ \frac{f(\pi)-f(0)}{\pi} x + f(0) \end{aligned} \tag{2.7}$$

$C_0[0,\pi]$ — пространство непрерывных исчезающих на концах отрезка функций с чебышёвской нормой, т.е. $C_0[0,\pi] = \{f : f \in C[0,\pi],\ f(0) = f(\pi) = 0\}$. В предположении $\rho_\lambda \geqslant 0$ при каждом неотрицательном λ считается, что функция q_λ есть произвольный элемент из шара $V_{\rho_\lambda}[0,\pi]$ радиуса $\rho_\lambda = o(\sqrt{\lambda}/\ln\lambda)$ в пространстве функций с ограниченным изменением, исчезающих в нуле, т.е. такая, что

$$V_0^\pi\left[q_\lambda\right] \leqslant \rho_\lambda, \quad \rho_\lambda = o\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\ln\lambda}\right) \quad \text{при} \quad \lambda \to \infty, \quad q_\lambda(0) = 0. \tag{2.8}$$

В случае задачи Коши 2.4, кроме того, потребуется отличие от нуля функции $h(\lambda)$, т.е.

$$V_0^{\pi}\left[q_\lambda\right] \leqslant \rho_\lambda, \quad \rho_\lambda = o\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\ln\lambda}\right) \quad \text{при } \lambda \to \infty, \quad q_\lambda(0) = 0, \quad h(\lambda) \neq 0. \tag{2.9}$$

При каждом $\lambda > 0$ функция q доопределяется:

$$q_\lambda(x) = \begin{cases} q_\lambda(x) & \text{при } x \in [0,\pi] \\ q_\lambda(\pi) & \text{при } x > \pi, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases} \tag{2.10}$$

Через $x_{k,\lambda}, k \in \mathbb{Z}$, будут обозначаться нули решения $y(x,\lambda)$ задачи Коши 2.3 или 2.4, рассматриваемой на всей действительной оси, перенумерованные в порядке возрастания таким образом, чтобы выполнялись неравенства 2.5.

Исключив из рассмотрения тривиальный случай $f \equiv 0$, возьмем фиксированную положительнозначную функцию $\vartheta(\lambda)$, удовлетворяющую условиям

$$\vartheta(\lambda) = o(1), \quad \lim_{\lambda\to\infty} \frac{\vartheta(\lambda)}{\omega\left(f, \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}\right)} = \infty;$$

положим

$$\varepsilon(\lambda) = \exp\left\{-\frac{\vartheta(\lambda)}{\omega\left(f, \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}\right)}\right\}. \tag{2.11}$$

Например, в качестве $\vartheta(\lambda)$ можно взять $\vartheta(\lambda) = \sqrt{\omega(f, \pi/\sqrt{\lambda})}$, тогда

$$\varepsilon(\lambda) = \exp\left\{-\frac{1}{\sqrt{\omega\left(f, \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}\right)}}\right\}$$

Для любого положительного λ и $x \in [0,\pi]$ пусть p, m_1 и m_2 - такие целые числа, что

$$m_1 = \left[\frac{k_1}{2}\right] + 1, \quad m_2 = \left[\frac{k_2}{2}\right], \quad x_{p,\lambda} \leqslant x < x_{p+1,\lambda}, \tag{2.12}$$

где номера нулей k_1 и k_2 определяются из неравенств

$$x_{k_1-1,\lambda} < x - \varepsilon(\lambda) \leqslant x_{k_1,\lambda}, \quad x_{k_2,\lambda} \leqslant x + \varepsilon(\lambda) < x_{k_2+1,\lambda}.$$

Теперь сформулируем основные результаты работы.

Теорема 1 (критерий сходимости в точке). Пусть $f \in C_0[0,\pi]$ и функиии q_λ и $h(\lambda)$ удовлетворяют условию 2.8 в случае задачи Коши 2.3 или 2.9 в случае задачи 2.4. Доопределим функиию f :

$$f(x) = 0 \quad \text{для всех} \quad x \notin [0,\pi]. \tag{2.13}$$

Тогда для операторов вида 2.6, построенных с помощью решений задачи Коши 2.3, равномерно по x на $[0,\pi]$, а также равномерно по всем $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0,\pi]$ и $h(\lambda) \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda\to\infty} \Bigg| S_\lambda(f,x) - f(x) - \frac{\sqrt{\lambda}y(x,\lambda)}{2\pi\sqrt{\lambda + h^2(\lambda)}} \\ \times \sum_{m=m_1}^{m_2} \frac{f\left(x_{2m+1,n}\right) - 2f\left(x_{2m,n}\right) + f\left(x_{2m-1,n}\right)}{p-2m} \Bigg| = 0. \end{aligned} \tag{2.14}$$

А для операторов вида 2.6, построенных с помощью решений задачи Коши 2.4, равномерно по x на $[0,\pi]$, а также по $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0,\pi]$ и $h(\lambda) \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ справедливо равенство

$$\lim_{\lambda\to\infty} \left| S_\lambda(f,x) - f(x) - \frac{\sqrt{\lambda}y(x,\lambda)}{2\pi h(\lambda)} \sum_{m=m_1}^{m_2} \frac{f\left(x_{2m+1,\lambda}\right) - 2f\left(x_{2m,\lambda}\right) + f\left(x_{2m-1,\lambda}\right)}{p-2m} \right| = 0 \tag{2.15}$$

3 Критерии поточечной и равномерной схоимости синк-приближений непрерывных функций на отрезке

Теорема 1 (формула равносходимости в точке).

Пусть $f \in C[0,\pi]$ и последовательности положительных чисел γ_n и ϵ_n удовлетворяют соотношениям:

$$\gamma_n = o(1), \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\gamma_n}{\omega(f, \frac{\pi}{n})} = \infty, \quad \epsilon_n = \frac{1}{\pi} \exp\left(- \frac{\gamma_n}{\omega(f, \frac{\pi}{n})} - 1 \right). \tag{3.1}$$

Для любого натурального n и $x \in [0,\pi]$ обозначим через p, m_1, m_2 такие целые числа, что

$$m_1 = \left[\frac{k_1}{2}\right] + 1, \quad m_2 = \left[\frac{k_2}{2}\right], \quad \frac{\pi p}{n} \le x < \frac{\pi(p+1)}{n}, \tag{3.2}$$

где числа k_1 и k_2 определяются с помощью неравенств:

$$\frac{\pi(k_1-1)}{n} < x - \epsilon_n \le \frac{\pi k_1}{n}, \quad \frac{\pi k_2}{n} \le x + \epsilon_n < \frac{\pi(k_2+1)}{n}.$$

Тогда поточечно на отрезке $[0,\pi]$ и равномерно внутри интервала $(0,\pi)$ справедливо

$$\lim_{n\to\infty} \left| L_n(f,x) - f(x) - \frac{\sin nx}{2\pi} \sum_{m=m_1}^{m_2}{}' \frac{f(\frac{\pi(2m+1)}{n}) - 2f(\frac{\pi(2m)}{n}) + f(\frac{\pi(2m-1)}{n})}{p-2m} \right| = 0, \tag{3.3}$$

где «штрих» у суммы означает отсутствие слагаемого со знаменателем, равным нулю, а функция f доопределена следующим образом: $f(x) = 0$ при $x \notin [0,\pi]$. Если $m_2 < m_1$, то сумма в 3.3 равна нулю.

Теорема 2 (критерий равномерной сходимости).

Пусть $f \in C[0,\pi]$, $0 \le a < b \le \pi$, $0 < \epsilon < \frac{(b-a)}{2}$. Для любого натурального n обозначим через p_1, p_2, m_1, m_2 такие целые числа, что

$$\frac{\pi(k_1-1)}{n} \le a < \frac{\pi k_1}{n}, \quad \frac{\pi k_2}{n} < b \le \frac{\pi(k_2+1)}{n},$$

$$m_1 = \left[\frac{k_1}{2} + 1\right], \quad m_2 = \left[\frac{k_2}{2}\right], \tag{3.4}$$

$$\frac{\pi p_1}{n} \le a + \epsilon < \frac{\pi(p_1+1)}{n}, \quad \frac{\pi p_2}{n} \le b - \epsilon < \frac{\pi(p_2+1)}{n}.$$

Тогда для того, чтобы

$$\lim_{n\to\infty} \| L_n(f,\cdot) - f \|_{C[a+\epsilon,b-\epsilon]} = 0, \tag{3.5}$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{n\to\infty} \max_{p_1\le p\le p_2} \left| \sum_{m=m_1}^{m_2}{}' \frac{f(\frac{\pi(2m+1)}{n}) - 2f(\frac{\pi(2m)}{n}) + f(\frac{\pi(2m-1)}{n})}{p-2m} \right| = 0, \tag{3.6}$$

где «штрих» у суммы означает отсутствие слагаемого со знаменателем, равным нулю.

4 Аппроксимация линейными комбинациями синков функций из пространств $C[0,\pi]$ и $C_0[0,\pi]$

Введем понятие кардинальной функции и усеченной кардинальной функции, сужение на отрезок $[0,\pi]$ которых выглядит так:

$$L_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin(nx-k\pi)}{nx-k\pi}f(\frac{k\pi}{n})=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\sin nx}{nx-k\pi}f(\frac{k\pi}{n})=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}l_{k,n}(x)f(\frac{k\pi}{n}). \tag{4.1}$$

Поставим в соответствие каждой, принимающей конечные значения на множестве $x_{k,n}=\dfrac{\pi k}{n}, \quad n\in\mathbb{N}, \quad 0\le k\le n$, функции f целую функцию LT_n по следующему правилу

$$LT_n(f,x)=\sum_{k=1}^{n-1}\{f(x_{k,n}-\frac{(f(\pi)-f(0))k}{n}-f(0)\}\frac{\cos nx\sin nx}{nx-k\pi}-$$

$$-\sum_{k=1}^{n-1}\{\frac{f(x_{k+1,n})+f(x_{k,n})}{2}-\frac{(f(\pi)-f(0))(2k+1)}{2n}-f(0)\}\frac{\sin nx\cos nx}{nx-(k+\frac{1}{2})\pi}+$$

$$+\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x+f(0). \tag{4.2}$$

Теорема 1. Для любой непрерывной на отрезке $[0,\pi]$ функции f справедливо соотношение

$$\lim_{n\in\infty}\parallel f-LT_n(f,\cdot)\parallel_{C[0,\pi]}=0.$$

Будем обозначать $C_0[0,\pi]$ пространство непрерывных, исчезающих на концах отрезка, функций с чебышевской нормой, то есть $C_0[0,\pi]=\{f:f\in C[0,\pi], \quad f(0)=f(\pi)=0\}$.

Теорема 2. Линейные оболочки систем функций

$$\{l_{k,n}\}_{k=0}^{n}, \quad n\in\mathbb{N} \tag{4.3}$$

не плотны в $C[0,\pi]$.

5 Практические результаты

Прежде, чем перейти к практическим результатам, будут рассмотрены используемые технологии для реализации численного эксперимента.

Для реализации эксперимента будет использован язык программирования Python.

Результат программы представлен на рисунке 5.1, рисунке 5.2, рисунке 5.3, рисунке 5.4, рисунке 5.5.

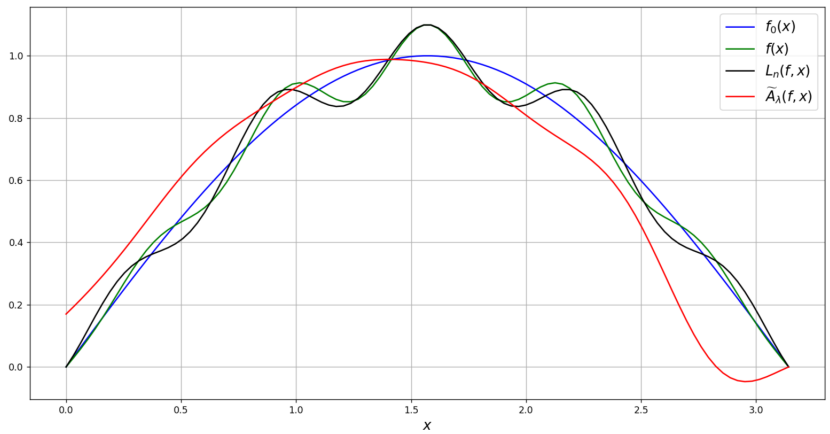

Рисунок 5.1 — Результат выполнения программы при $n = 10$

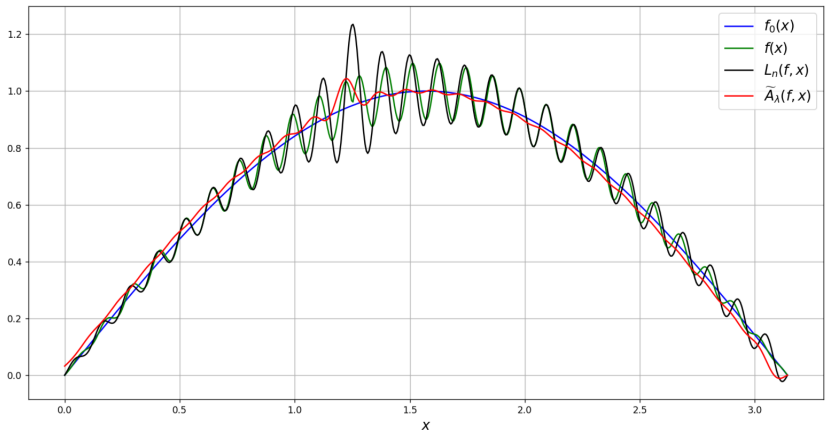

Рисунок 5.2 — Результат выполнения программы при $n = 54$

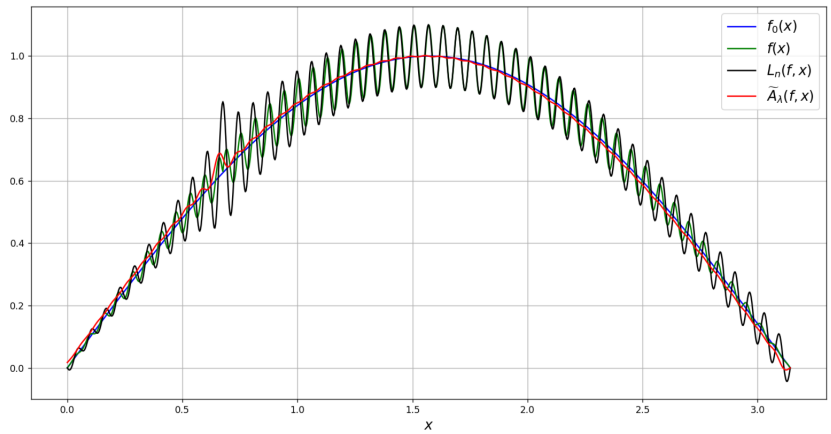

Рисунок 5.3 — Результат выполнения программы при $n = 100$

Проанализируем графики. Исходная функция $f(x)$: Зеленая линия $sin(x)$ представляет исходную функцию без изменений. Аппроксимация $L_n(f, x)$: Чёрная линия показывает аппроксимацию, которая очень близко следует за исходной функцией. Это указывает на высокую точность оператора L_n в воспроизведении функции $f(x)$. Аппроксимация $\tilde{A}_\lambda(f, x)$: Красная линия значительно отклоняется от исходной функции. Например, при $n = 10$ в области от 0 до 1.5 и от 1.5 до 3. Это может быть связано с характером оператора $\tilde{A}_\lambda$, который предназначен для сглаживания данных и имеет другие свойства, которые влияют на точность аппроксимации.

С увеличением количества узлов оператор $L_n(f, x)$ почти совпадает с исходной функцией, в то время как оператор $\tilde{A}_\lambda(f, x)$ на концах графика функции имеет отклонение.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Аппроксимативные свойства обобщений синк-аппроксимаций представляют собой важный аспект исследования этого метода аппроксимации функций. Изучение сходимости, устойчивости, точности, применимости и вычислительной эффективности обобщений синк-аппроксимаций позволяет оценить их эффективность и пригодность для различных практических задач.

В работе был выполнен численный эксперимент приближения непрерывной функции $f(x) = \sin x$. Оператор L_n демонстрирует высокую точность, соответствующую теореме Уиттекера-Котельникова-Шеннона о восстановлении сигнала, в то время как оператор $\tilde{A}_\lambda$ показывает, как сглаживание и другие аппроксимационные методы могут влиять на точность восстановления сигнала.