

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра математического анализа

Вариационное и параметрическое описание множества

однолистных функций

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 2 курса 227 группы

направление 02.04.01 — Математика и компьютерные науки

механико-математического факультета

Скрипниковой Екатерины Сергеевны

Научный руководитель

Профессор, д.ф.-м.н.,

профессор

Д. В. Прохоров

Зав. кафедрой

И.о.зав.кафедрой, к.ф.-м.н.,

доцент

Е. В. Разумовская

Введение. С точки зрения конформного отображения простейшим и наиболее важным классом аналитических функций является класс так называемых однолистных функций, т. е. функций, аналитических в данной области и принимающих в ней каждое значение не более одного раза, или, что то же, функций, отображающих эту область взаимно однозначно на другие плоские области. Требование однолистности, наряду с различными другими требованиями влияет на такие свойства функций рассматриваемого класса, как, например, на рост модуля функции, на рост модуля и аргумента производной, на коэффициенты разложений в ряды и другое.

Так, в 1923 г. Лёвнеру удалось дать параметрическое представление одного важного класса однолистных функций которым можно аппроксимировать любую функцию, отображающую $|z| < 1$, на область, лежащую в $|\omega| < 1$, и тем выдвинуть новый метод решения некоторых задач, относящихся к однолистным отображениям.

Целью работы является изучение метода параметрических представлений теории однолистных функций. Для достижения поставленной цели были поставлены следующие основные задачи:

- 1) Изучить теорию по данной теме;
- 2) Исследовать класс S однолистных функций.

Основное содержание работы. Функция $f(z)$, которая является регулярной в области D , называется однолистной в D , если $w = f(z)$ принимает разные значения w для разных z из D .

В этом случае уравнение $f(z) = w$ имеет не более одного корня в D при всяком комплексном w . Такие функции выполняют взаимно однозначное и конформное отображение круга $|z| < 1$ на область D плоскости w .

Функцию $w = f(z)$ можно представить в виде ряда

$$w = f(z) = z + a_2 z^2 + \dots,$$

однолистных в круге $|z| < 1$.

Будем говорить, что класс S' вложен в класс S , если S' есть подкласс класса S и если любая функция $f(z) \in S$ может быть приближена последовательностью функций $f_n(z) \in S'$ так, что $f_n(z) \rightarrow f(z)$ равномерно на

всяком компактном подмножестве круга $|z| < 1$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда и p -е производные в любой точке круга $|z| < 1$, и, в частности, коэффициенты $f_n(z)$ стремятся к соответствующим производным или коэффициентам $f(z)$ при $n \rightarrow \infty$. Поэтому оценки, полученные для класса S' , будут верны и для более широкого класса S .

Пусть γ - простая жорданова дуга, концевая точка B которой лежит на окружности $|\omega| = 1$, в то время как остальные точки этой дуги содержатся в круге $|\omega| < 1$. Предположим, далее, что γ не проходит через начало и состоит из конечного числа аналитических дуг $P_1P_2, P_2P_3, \dots, P_{n-1}B$. Такую дугу будем называть кусочно-аналитическим разрезом.

Точечное множество G , состоящее из всех точек круга $|\omega| < 1$, не принадлежащих γ , представляет собой односвязную область. Дополнение к G состоит из множества $|\omega| \geq 1$ и γ и потому связно и замкнуто. Таким образом, G — односвязная ограниченная область, содержащая $\omega = 0$, и поэтому, в силу теоремы Римана об отображении, существует единственное преобразование

$$\omega = f(z) = \beta(z + a_2z^2 + \dots), \quad (1)$$

отображающее круг $|z| < 1$ взаимно однозначно и конформно на G и такое, что $f(0) = 0$ и $f'(0) = \beta > 0$. Очевидно, $f(z)/\beta \in S$. Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. Функция вида $f(z)/\beta$, где $f(z)$ построена так же, как в (2.8), образует плотный в S подкласс S'' .

Теперь, следуя Лёвнеру, функции 1 могут быть получены из функции $\omega = z$ с помощью ряда последовательных бесконечно малых преобразований.

Пусть γ - к. а. разрез, заданный уравнением $\omega = \alpha(t)$ ($0 \leq t < t_0$), где $\alpha(t) \neq 0$, $|\alpha(t)| < 1$ ($0 \leq t < t_0$) и $|\alpha(t_0)| = 1$. Обозначим через $\gamma_{t't''}$ дугу на γ , соответствующую отрезку $t' \leq t \leq t''$, и через γ_t — дугу γ_{tt_i} . Пусть $G(t)$ — область, полученная из круга $|\omega| < 1$ удалением дуги γ_t . При возрастании t от 0 до t_0 область $G(t)$ расширяется от $G = G(0)$ до круга $|\omega| < 1$. Обозначим через

$$\omega = g_t(z) = \beta(t)(z + a_2(t)z^2 + \dots) \quad (\beta(t) > 0)$$

функцию, отображающую круг $|z| < 1$ на $G(t)$, и покажем, что $g_t(z)$ при возрастании t непрерывно изменяется от $g_0(z) = f(z)$ до $g_{t_0}(z) = z$.

Лемма 2. Если функция $\omega = g_t(z)$ определена, как выше, то обратная функция $z = g_t^{-1}(\omega)$ непрерывна в точке $\omega = \alpha(t)$. Поэтому z стремится к некоторой точке $\lambda(t)$, $|\lambda(t)| = 1$, когда $\omega = g_t(z)$ стремится любым образом к $\alpha(t)$, оставаясь в $G(t)$.

Лемма 3. Если $t'' - t' \rightarrow 0$, в то время как $t = t'$ или $t = t''$ фиксировано, то $S_{t't''}$ и $B_{t't''}$ стягиваются к точке $\lambda(t)$ в соответствующих плоскостях. Кроме того, $\lambda(t)$ - непрерывная функция.

Заметим, что при $0 \leq t' \leq t'' \leq t_0$ функция

$$h(z, t', t'') = \frac{\beta(t')}{\beta(t'')}z + \dots$$

удовлетворяет в круге $|z| < 1$ условиям леммы Шварца. Таким образом, $\beta(t)$ -строго возрастающая функция t в промежутке $0 \leq t \leq t_0$. Заключаем, что

$$\frac{\beta(t')}{\beta(t'')} \rightarrow 1 \quad (t'' - t' \rightarrow 0),$$

если t' или t'' остается неподвижной. Поэтому функция $\beta(t)$ непрерывна. Значит, $\tau = \log \left[\frac{\beta(t)}{\beta(0)} \right]$ - непрерывная строго возрастающая функция от t при $0 \leq t \leq t_0$, и можно τ взять в качестве параметра t , который до сих пор не был определен. После этой нормировки

$$g_t(z) = \beta e^t(z + a_2(t)z^2 + \dots) \quad (0 \leq t \leq t_0), \quad (2)$$

где $\beta = \beta(0) = f'(0)$, $t_0 = \log(1/\beta)$. Кроме того,

$$h(z, t', t'') = e^{t' - t''}z + \dots$$

Теперь докажем следующую лемму:

Лемма 4. Пусть при нормировке $2 t'' - t' \rightarrow 0$, а $t = t'$ или t'' остается неподвижным в промежутке $0 \leq t' < t'' \leq \log(1/\beta)$. Тогда равномерно при

$|z| \leq r$, где $0 < r < 1$,

$$\frac{h(z, t', t'') - z}{t'' - t'} \rightarrow -z \frac{1 + \chi(t)z}{1 - \chi(t)z},$$

где $\chi(t) = \lambda(t)^{-1}$.

Теорема 1. Если

$$f(z, t) = g_t^{-1}[f(z)] \quad (0 \leq t \leq t_0 = \log(1/\beta)),$$

то $f(z, t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -f \frac{1 + \chi(t)f}{1 - \chi(t)f},$$

с начальным условием $f(z, 0) = z$. Функция $\beta^{-1}(z, t_0)$ образует плотный подкласс класса S .

Основной результат Лёвнера можно сформулировать следующим образом.

Теорема 2. Предположим, что $t_0 > 0$, и пусть $\chi(t)$ - непрерывная комплекснозначная функция от t , заданная в промежутке $0 \leq t \leq t_0$, причем $|\chi(t)| = 1$.

Пусть $\omega = f(z, t)$ - решение дифференциального уравнения

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \omega \frac{1 + \chi(t)\omega}{1 - \chi(t)\omega} \quad (0 \leq t \leq t_0) \quad (3)$$

такое, что $f(z, 0) = z$. Тогда функция $e^{t_0}f(z, t_0)$ при всевозможных t_0 и $\chi(t)$ образуют плотный подкласс класса S .

Этот результат доказывается, убедившись в том, что:

1. если функция

$$w = f(z, t) = e^{-t}(z + a_2(t)z^2 + \dots)$$

отображает круг $|z| < 1$ на круг $|w| < 1$, разрезанный вдоль кусочно-аналитической кривой, то функции $e^t f(z, t)$ плотны в S ;

2. эти функции действительно являются решениями дифференциального уравнения 3 при надлежащем выборе функции $\kappa(t)$;
3. какова бы ни была непрерывная функция $\kappa(t)$, соответствующее решение $f(z, t)$ дифференциального уравнения существует и единственно и $e^t f(z, t) \in S$.

Для доказательства первой части теоремы необходимо убедиться в том, что, какова бы ни была непрерывная функция $\chi(t)$, удовлетворяющая условию $|\chi(t)| = 1$ ($0 \leq t \leq t_0$), существует единственное решение $\omega = f(z, t)$ дифференциального уравнения 3, удовлетворяющее условию $f(z, 0) = z$, причем $e^t f(z, t) \in S$.

Перейдем теперь к изложению некоторых применений теоремы 2 Пусть S обозначает, как обычно, класс функций

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots,$$

однолистных в круге $|z| < 1$.

Теорема 3. Если $f(z) \in S$, то $|a_3| \leq 3$.

Предположим снова, что $w = f(z) \in \mathcal{S}$, и пусть обратная функция

$$z = \varphi(w) = f^{-1}(w)$$

имеет в окрестности точки $w = 0$ разложение

$$\varphi(w) = w + \sum_{m=2}^{\infty} b_m w^m.$$

С помощью теоремы 2 Лёвнер получил точные оценки для всех коэффициентов b_m . Его результат формулируется следующим образом.

Теорема 4. Если

$$w = f(z) \in \mathcal{S} \text{ и } z = f^{-1}(w) = w + \sum_{m=2}^{\infty} b_m w^m,$$

то

$$|b_m| \leq \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2m-1) \cdot 2^m}{(m+1)!} \quad (m \geq 2).$$

Равенство имеет место, если

$$f(z) = \frac{z}{(1+z)^2}, \quad f^{-1}(w) = \left[1 - 2w - (1 - 4w)^{1/2}\right] / (2w).$$

Теорема 5. Предположим, что $f(z) \in S$. Тогда

$$-\log \frac{1+|z|}{1-|z|} \leq \arg \frac{f(z)}{z} \leq \log \frac{1+|z|}{1-|z|}. \quad (4)$$

Оба эти неравенства точны при любом фиксированном z из круга $|z| < 1$.

В работе также рассматривается задача построения образа окружности $|z| = r$ с радиусом $r = 0.8$, при отображении $w = e^{t_0} f(z, t_0)$, где $t_0 = 10$.

Исходная окружность задается в комплексной плоскости с помощью равномерного разбиения параметра $\varphi = \varphi_k = 0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, 2\pi$ на интервале $[0, 2\pi]$ с шагом $\frac{2\pi}{n}$, где n - число точек, выбранное экспериментально для достижения необходимой точности. Каждая точка окружности задается в виде комплексного числа

$$z = re^{i\varphi} = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение Лёвнера в комплексной плоскости:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -w \frac{1 + \kappa(t)w}{1 - \kappa(t)w},$$

при этом

$$\kappa(t) = \cos t + i \sin t, \quad \text{где } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Данное уравнение необходимо разбить на две части: для действительной и мнимой частей функции $f(z, t)$, т.е. $f(z, t) = \Re f(z, t) + i \Im f(z, t)$. При этом каждая точка на плоскости имеет две координаты, а именно $(u, v) = \Re f(z, t) + i \Im f(z, t)$. Соединяя эти точки, необходимо получить нужную линию.

Дифференциальное уравнение Лёвнера, как правило, трудно решить аналитически, поэтому для решения задачи применялся численный метод инте-

гирования для системы двух уравнений:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \Re \left(-w \frac{1 + \kappa(t)w}{1 - \kappa(t)w} \right), \\ \frac{dv}{dt} = \Im \left(-w \frac{1 + \kappa(t)w}{1 - \kappa(t)w} \right). \end{cases}$$

Для численного преобразования окружности в комплексной плоскости была написана программа с использованием языка программирования Python. Листинг программного кода приведен в приложении А.

Итак, при разных значениях параметра n получаются различные результаты отображения окружности, которые позволяют оценить динамику и влияние уравнения Лёвнера на форму и структуру образа.

Рассмотрим для сравнения два результата при различных значениях n :

1. Начнем с $n = 20$ см.рис. 1. В этом случае окружность разбивается на небольшое количество точек, что приводит к отображению с заметными угловатыми участками.



Рисунок 1

2. Теперь увеличим значение n до 300 см.рис. 2. Заметно, что отображение становится значительно более плавным и аккуратным, а линии, соединяющие точки, начинают следовать более четкому контуру.

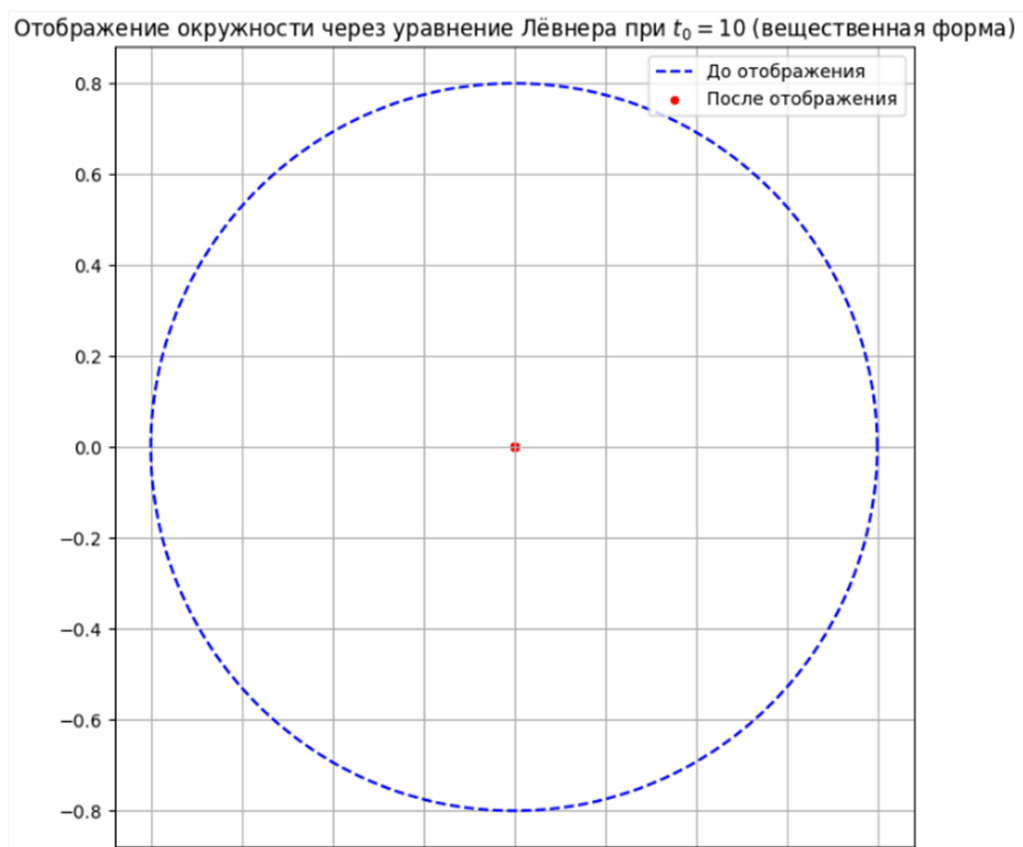


Рисунок 2

В результате исследования, можно прийти к выводу, что данная работа демонстрирует метод численного интегрирования уравнения Лёвнера и визуализацию результатов при разных значениях параметра, что позволяет глубже понять динамику отображений в комплексной плоскости.

Заключение. Исследования, проведенные в данной работе, относятся к дифференциальному уравнению Лёвнера, которое задает однопараметрическое семейство конформных отображений канонических областей в себя и служит мощным инструментом исследования свойств однолистных функций.

Таким образом, с помощью теории Лёвнера решены многие задачи, ранее считавшиеся не поддающимися исследованию.