

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра математического анализа

Параметрические и вариационные методы в теории конформных

отображений

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 2 курса 227 группы

направление 02.04.01 — Математика и компьютерные науки

механико-математического факультета

Пахомовой Валерии Сергеевны

Научный руководитель

Профессор, д.ф.-м.н.,

профессор

Д. В. Прохоров

Зав. кафедрой

И.о.зав.кафедрой, к.ф.-м.н.,

доцент

Е. В. Разумовская

Введение. Дипломная работа посвящена «динамике» конформных отображений. В ней излагаются качественные и количественные предложения, позволяющие судить о том, как изменяются отображения при изменении границ отображаемых областей. Такого рода предложения представляют собой интерес для практики, ибо они дают простые методы пересчета при переходе от данной конструкции к конструкции близкой. Предположим, что при расчете запроектированной конструкции оказалось, что некоторые величины превышают допустимые размеры. Тогда, естественно, возникает вопрос о том, где и насколько надо изменить конструкцию. В некоторых случаях ответ на этот вопрос можно получить на основании излагаемых здесь вариационных принципов.

Цели работы:

- изучить теорию по данной теме;
- дать определения терминам, которые будут встречаться в работе;
- посмотреть практическое применение вариационных принципов;
- решить задачу на построение линий уровня с помощью формулы для конформного отображения на круг области, близкой к кругу и численных методов.

Основное содержание работы. Принцип Линделёфа, ключевой в вариационном анализе, описывает поведение конформных отображений областей, содержащих фиксированную точку z_0 , на единичный круг (при условии, что z_0 отображается в 0). Если граница области подвергается "вдавливанию" внутрь, то: 1) линии уровня отображения сжимаются; 2) коэффициент растяжения отображения в точке z_0 увеличивается; 3) коэффициент растяжения в точках границы, сохраняющих свое положение, уменьшается (вместе с длиной образа недеформированной части границы); 4) в точках, где растяжение максимально, оно увеличивается более чем в $1/\lambda$ раз. Иными словами, имеет место

Теорема 1.1 Если область $D(\tilde{C})$ содержится в $D(C)$, то:

1) при любом $\rho (0 < \rho \leq 1)$ область $D(\tilde{C}_\rho)$ содержится в $D(C_\rho)$, при этом соприкосновение $\tilde{C}_\rho$ и C_ρ возможно лишь при совпадении $\tilde{C}$ и C ;

2) в точке z_0

$$\left| f'(z_0, \tilde{C}) \right| \geq |f'(z_0, C)|, \quad (1)$$

при этом знак равенства возможен лишь при совпадении $\tilde{C}$ и C ;

3) если контуры $\tilde{C}$ и C имеют общую точку z_1 , то в этой точке

$$\left| f'(z_1, \tilde{C}) \right| \leq |f'(z_1, C)|, \quad (2)$$

при этом знак равенства возможен лишь при совпадении $\tilde{C}$ и C ;

4) если области звездны относительно z_0 , то в точках наибольшей деформации

$$\left| f'(z_2, \tilde{C}) \right| \geq \frac{1}{\lambda} |f'(z_2, C)|, \quad (3)$$

где $\lambda \leq 1$ — наибольшая деформация контура.

Доказательство. Предлагаемое геометрическое доказательство принципа является прямым и дает понимание его внутренней сути, а также возможности для количественной оценки. Для простоты и без потери общности, достаточно рассмотреть случай, когда контур $\tilde{C}$ отличается от C только на небольшом участке (a, b) . На этом участке $\tilde{C}$ является контуром, чья кривизна незначительно отличается от кривизны C . В этом случае, область $D(\tilde{C})$ получается из $D(C)$ путем вырезания малой площади σ , как это изображено на рисунке 1.

В самом деле, любую вариацию C можно получить последовательным применением этой простейшей вариации, поэтому, достаточно доказать теорему для этого простого случая, чтобы она была верна и для всех возможных изменений C .

Введем теперь вспомогательную плоскость ζ и отображим конформно область $D(C)$ на единичный круг $|\zeta| < 1$:

$$\zeta = f(z, C), \quad f(z_0, C) = 0.$$

Пусть при этом $\tilde{C}$ переходит в кривую $\tilde{C}'$ и площадь, заключенная между $\tilde{C}'$ и окружностью $|\zeta| = 1$, равна σ в соответствии с рисунком 1.1.

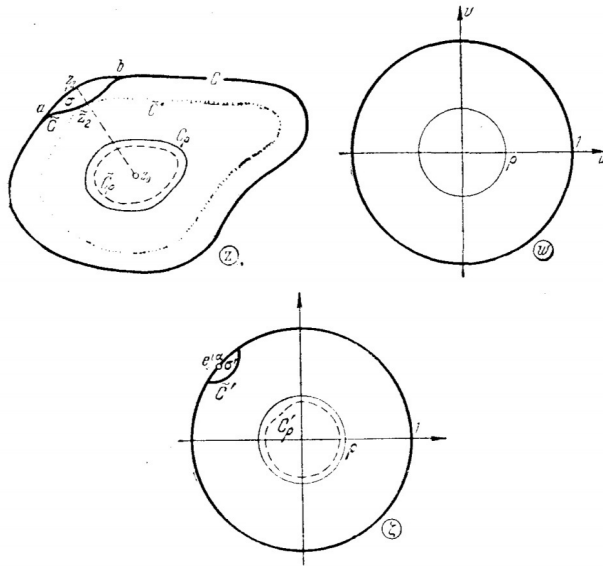


Рисунок 1.1

Отобразим конформно область $D(\tilde{C}')$ на единичный круг плоскости ω :

$$\omega = g(\zeta), \quad g(0) = 0.$$

С точностью до малых высших порядков площадку σ' можно считать круговой луночкой, следовательно, в качестве g можно взять отображение:

$$\omega = g(\zeta) = \zeta \left\{ 1 + \frac{\sigma' 1 + \zeta e^{-i\alpha}}{2\pi 1 - \zeta e^{-i\alpha}} \right\}, \quad (4)$$

где α — аргумент какой-либо точки площадки σ' . Найдем отображение, обратное g . Для этой цели перепишем формулу (1.5) в виде

$$\zeta \approx \omega \left\{ 1 - \frac{\sigma' 1 + \zeta e^{-i\alpha}}{2\pi 1 - \zeta e^{-i\alpha}} \right\}$$

При малых значениях η можно пренебречь членами высшего порядка малости. Поскольку ω и ζ отличаются на величину порядка σ' , можно заменить ζ через ω в членах, умноженных на σ' , не ухудшая точность вычислений, так что:

$$\zeta \approx \omega \left\{ 1 - \frac{\sigma' 1 + \omega e^{-i\alpha}}{2\pi 1 - \omega e^{-i\alpha}} \right\}. \quad (5)$$

Обозначим через C'_ρ кривую плоскости ζ , соответствующую окружности $|\omega| = \rho$ при отображении $\omega = g(\zeta)$. Чтобы получить параметрические уравнения C'_ρ мы положим $\zeta = re^{i\varphi}$, $\omega = \rho e^{i\theta}$, прологарифмируем выражение (1.6):

$$\ln \frac{\zeta}{\omega} = \ln \frac{r}{\rho} + i(\varphi - \theta) \approx -\frac{\sigma'}{2\pi} \frac{1 + \rho e^{i(\theta-\alpha)}}{1 - \rho e^{i(\theta-\alpha)}}$$

и разделим затем действительные и мнимые части:

$$\left. \begin{aligned} &\approx \rho \left(1 - \frac{\sigma'}{2\pi} \frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\theta-\alpha)+\rho^2} \right) \\ &\varphi \approx \theta - \frac{\sigma'}{2\pi} \frac{2\rho\sin(\theta-\alpha)}{1-2\rho\cos(\theta-\alpha)+\rho^2} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Используя эти уравнения, можно доказать все утверждения теоремы. Имеем:

$$\omega = f(z, \tilde{C}) = g[f(z, C)]; \quad (7)$$

следовательно, при отображении $\zeta = f(z, C)$ область $D(\tilde{C}_\rho)$ переходит в $D(C'_\rho)$. Так как $D(C_\rho)$ переходит при этом в круг $|\zeta| < \rho$, то для доказательства первой части теоремы достаточно показать, что $D(C'_\rho)$ содержится в круге $|\zeta| < \rho$. Но так как $1 - 2\rho\cos(\theta - \alpha) + \rho^2 \leq (1 + \rho)^2$, то по формуле (1.7) для всех точек контура C'_ρ имеем:

$$|\zeta| = r \leq \rho \left(1 - \frac{\sigma'}{2\pi} \frac{1 - \rho}{1 + \rho} \right) < \rho \quad (8)$$

Итак, первое утверждение теоремы полностью доказано.

Деля неравенство (1.9) на ρ и устремляя ρ к нулю, получим в пределе

$$\left| \frac{d\zeta}{d\omega} \right|_\omega = 0 \leq 1 - \frac{\sigma'}{2\pi} < 1.$$

Но тогда $|g'(0)| > 1$, и согласно формуле (1.8)

$$|f'(z_0, \tilde{C})| = |g'(0)| \cdot |f'(z_0, C)| > |f'(z_0, C)|,$$

это и доказывает второе утверждение.

Пусть теперь точка $\zeta = re^{i\varphi}$ приближается к точке $e^{i\varphi}$ окружности $|\zeta| = 1$ по радиусу этой окружности, причем $e^{i\varphi}$ расположена вне σ' . Тогда в силу конформности отображения соответствующая точка $\omega = \rho e^{i\theta}$ приближается к точке $e^{i\theta}$ по направлению, также касательному к радиусу окружности $|\omega| = 1$, и имеем: $|\Delta\zeta| = |\zeta - e^{i\varphi}| = 1 - r$, $|\Delta\omega| = |\omega - e^{i\theta}|$.

Но из неравенства (1.9) следует:

$$\left| \frac{d\omega}{d\zeta} \right|_{\zeta=e^{i\varphi}} = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1 - \rho}{1 - r} \leq 1 - \frac{\sigma'}{4\pi}.$$

Отсюда вытекает утверждение 3) теоремы.

Для доказательства последнего утверждения обозначим через $\tilde{C}^*$ контур, который получается из C преобразованием подобия $\zeta = z_0 + \lambda(z - z_0)$. Очевидно, функция

$$\omega = f(\zeta, \tilde{C}^*) = f\left(z_0 + \frac{\zeta - z_0}{\lambda}, C\right) \quad (9)$$

реализует конформное отображение области $D(\tilde{C}^*)$ на единичный круг. Но $D(\tilde{C}^*)$ содержится в $D(\tilde{C})$ и точка $\tilde{z}_0$, принадлежит как $\tilde{C}$, так и $\tilde{C}^*$. Поэтому согласно утверждению 3) теоремы

$$|f'(\tilde{z}_2, \tilde{C}^*)| < |f'(\tilde{z}_2, \tilde{C})|.$$

Но так как из (1.10) имеем $f'(\tilde{z}_2, \tilde{C}^*) = \frac{1}{\lambda} f'(z_2, C)$, то

$$|f'(\tilde{z}_2, \tilde{C})| \geq \frac{1}{\lambda} |f'(z_2, C)|.$$

и теорема доказана полностью. □

Простым следствием доказанной теоремы является так называемый принцип Монтеля:

Теорема 1.2 Пусть области $D(C)$ и $D(\tilde{C})$ содержат точку z_0 и $C = C_1 + C_2$, $\tilde{C} = \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2$, причем $\tilde{C}_1$ лежит в $D(C)$, $\tilde{C}_2$ - вне $D(C)$, C_1 - вне $D\tilde{C}$ и C_2 - в $D(\tilde{C})$ (рис. 1.2).

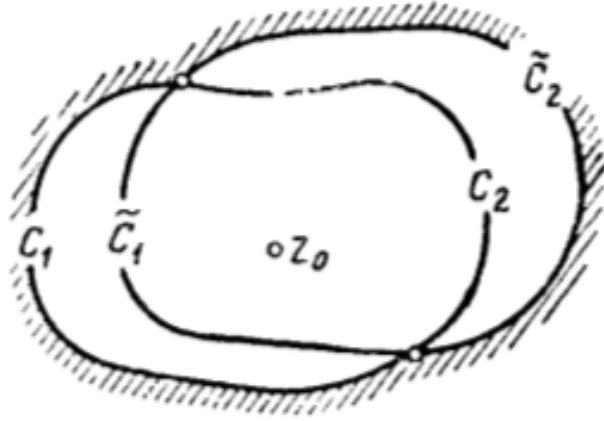


Рисунок 1.2

Пусть, кроме того, при отображениях

$$w = f(z, C), \quad w = f(z, \tilde{C})$$

дуги C_1 и $\tilde{C}_1$ переходят соответственно в дуги ϑ_1 и $\tilde{\vartheta}_1$, тогда длины этих дуг связаны соотношением

$$\tilde{\vartheta}_1 \geq \vartheta_1, \quad (10)$$

причем знак равенства достигается лишь при совпадении C и $\tilde{C}$. Изложенные ранее вариационные принципы можно применять для более точных количественных расчетов. Однако, прежде чем углубляться в детали, рассмотрим простой пример использования этих принципов для оценки производной на границе области. В частности, обратимся к задаче отображения односвязных областей $D(C)$ на единичный круг $|w| < 1$, при условии, что заданная точка z_0 в области $D(C)$ отображается в центр круга, то есть в точку $w = 0$. Пусть z_1 — произвольная правильная точка C ; проведем через точку z_1 два замкнутых контура C_1 и C_2 , касающихся C в точке z_1 и таких, что область $D(C_1)$ содержит точку z_0 и содержится в области $D(C)$, а область $D(C_2)$ содержит область $D(C)$.

$$|f'(z_1, C_1)| \leq |f'(z_1, C)| \leq |f'(z_1, C_2)|$$

Если за $D(C_1)$ и $D(C_2)$ принять области, отображаемые на единичный круг с помощью известных функций, то полученные неравенства дадут конкретные числовые оценки сверху и снизу для $|f'(z, C)|$.

Применим это общее соображение к оценке $|f'(z, C)|$ для случая, когда кривая C близка к единичной окружности.

Теорема 1.3 Пусть линия C удовлетворяет следующим условиям:

1. C принадлежит кольцу $1 - \epsilon < |z| < 1 + \epsilon$;
2. углы между касательной к C и касательной к окружности $|z| = 1$ в точках с одинаковым аргументом не более μ ;
3. кривизна k линии C отличается от единичной не более чем на ϵ_1 .

Теорема 1.4 В условиях предыдущей теоремы и при дополнительном условии $f'(0, C) > 0$ в любой точке $z = re^{i\varphi}$ границы C имеем:

$$|\arg f(z, C) - \arg z| < \pi (3\epsilon + \epsilon_1 + \eta), \quad (2.7)$$

где η — малая второго порядка по отношению к $\sqrt{\epsilon^2 + \epsilon_1^2 + \mu^2}$.

Доказательство двух теорем в выпускной работе позволило получить важные оценки для вариации модуля производной и аргумента отображающей функции. Эти оценки связаны с изменениями границы области. Важно отметить, что, хотя теоремы были доказаны для граничных точек, принцип максимума позволяет расширить их применение и на внутренние точки области. Также в дипломной работе была дано практическое задание:

Построить линии уровня для функции $f(z, c)$ с помощью формулы для конформного отображения на круг области, близкой к кругу:

$$f(z, C) \approx z \left\{ 1 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \delta(t) \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} dt \right\}$$

где взять $z = re^{i\phi}$, положив, например $r = 0.8$. Параметр ϕ задавать точками $\phi = 0, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, 2\pi$ с шагом $\frac{2\pi}{n}$. Число n задать экспериментально, $\delta(t)$ взять из формулы

$$|\delta(\phi)| < \epsilon, \quad |\delta'(\phi)| < \epsilon, \quad |\delta''(\phi)| < \epsilon$$

,

положив $\delta(t) = \epsilon|\pi - t| + \epsilon^3(\pi - t)^2$, $0 \leq t \leq 2\pi$, для $\epsilon = 1, 0.1, 0.01$.

Получится 3 размытых кривых для трех разных ϵ .

Интеграл (1 формула подставить) разбить на две части для $Re f(z, c)$ и $Im f(z, c)$

$$z = r(\cos \phi + i \sin \phi), \quad f(z, c) = u(z) + iv(z) = Re f(z, c) + i Im f(z, c).$$

Каждая точка на плоскости $f(z)$ имеет две координаты (u, v) . Соединяя эти точки, получим нижнюю линию. Уравнение (1 формула прописать) можно интегрировать численными методами.

В данной дипломной работе реализован численный метод построения линий уровня комплексной функции $f(z, c)$, которая задаётся приближенно через конформное отображение области, близкой к кругу.

Ключевые этапы реализации:

1. **Дискретизация по углам φ :** Для построения линий уровня выберем радиус $r = 0.8$. Углы φ разбиваются на n равных частей:

$$\varphi_k = \frac{2\pi k}{n}, k = 0, 1, \dots, n$$

что обеспечивает равномерную дискретизацию по области.

2. Определение функции $\delta(t)$:

Для учета погрешности вводится функция:

$$\delta(t) = \varepsilon|\pi - t| + \varepsilon^3(\pi - t)^2,$$

где ε принимает значения 1, 0.1, 0.01. Эти параметры позволяют наблюдать, как точность вычислений влияет на итоговые линии, делая их более гладкими и точными.

3. Численное вычисление интеграла:

Интеграл по t разбивается на 2 части - действительную и мнимую часть функции $f(z, c)$. Используя метод трапеций или другой численный метод, с дискретизацией по точкам t_j :

$$t_j = \frac{2\pi j}{n}$$

Результат сводится к сумме по точкам, что позволяет получить приближенное значение интеграла.

4. Построение линий уровня:

Для каждого ε на плоскости строятся кривые, соединяющие точки (u, v) , где

$$u = \Re f(z, c), \quad v = \Im f(z, c)$$

что даёт визуализацию областей с одинаковым значением функции. Эти кривые помогают понять, как изменяется функция при различных погрешностях. [11]

Анализы и выводы.

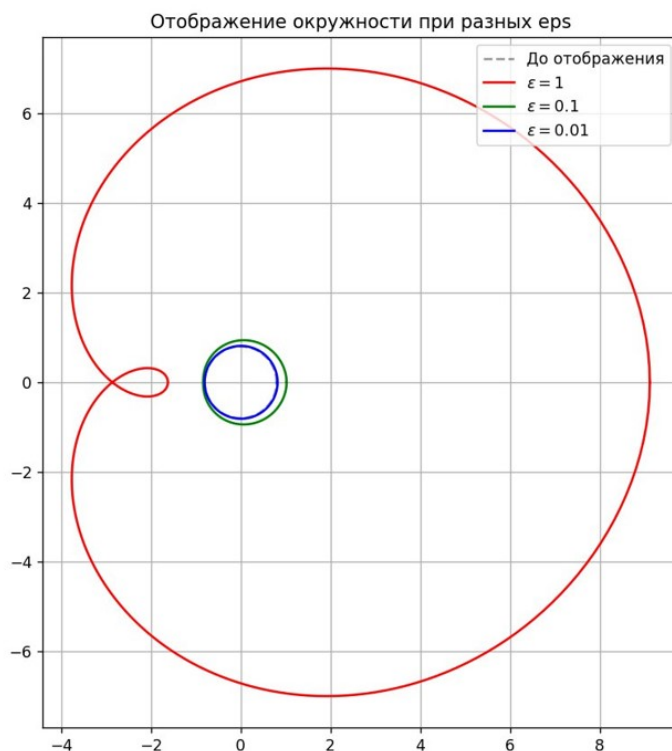


Рисунок 6.1

Задача реализована на языке программирования python(см. приложение А)[12] На графиках (рис.6.1), полученных в результате численных методов, заметно, что:

При $\epsilon = 1$:

Линии уровня получаются довольно размытыми, области выглядят более "размазанными" что связано с высокой погрешностью и сильным искажением. Это даёт понять, насколько чувствительна функция $f(z, c)$ к погрешностям приближения.

При $\epsilon = 0.1$:

Линии становятся более четкими, области приобретают гладкий вид, это говорит о том, что точность вычислений существенно влияет на качество визуализации.

При $\epsilon = 0.01$:

Линии уровня максимально сглажены, области хорошо различимы, что свидетельствует о высокой стабильности и точности метода. Однако стоит

учитывать, что при очень малых ε увеличиваются вычислительные затраты и риск накопления ошибок.

Итак, метод численного построения линий уровня с помощью приближенного конформного отображения хорошо работает при достаточно высокой точности ε .

Влияние погрешностей выражается в размытости и искажениях линий, что важно учитывать при практическом использовании таких методов.

Использование функции $\delta(t)$ позволяет управлять степенью точности и гибко моделировать реальные условия вычислений.

Дальнейшие исследования могут быть направлены на оптимизацию численных методов интегрирования, уменьшение вычислительных затрат и повышение точности отображения. **Заключение.** В ходе выполнения научной исследовательской работы были рассмотрены основные вариационные принципы Линделёфа и Монтеля, которые являются важным инструментом в различных областях физики, математики и техники.

Таким образом, вариационные принципы представляют собой мощный инструмент для анализа поведения физических систем и разработки эффективных методов оптимизации. Они позволяют получить решения задач, которые не всегда могут быть найдены с использованием традиционных методов. Для детального изучения этой темы, также были рассмотрены следующие аспекты:

- Граничные производные;
- Отображение близких областей;
- Приложение принципов к граничным производным;
- Задача обтекание со срывом струй.