МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Исследование свойств нулей и построение факторизационных представлений некоторых классов аналитических в круге функций

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 227 группы
направление 02.04.01 — Математика и компьютерные науки

механико-математического факультета

Морозова Кирилла Максимовича

Научный руководитель
Профессор, д.ф.-м.н., профессор Ф.А. Шамоян

Зав. кафедрой
И.о.зав.кафедрой, к.ф.-м.н.,
доцент Е. В. Разумовская

Саратов 2025

Введение. Известно, что изучение свойств корневых множеств и построение факторизационных представлений различных классов аналитических функций имеют ключевое значение в общей теории функций комплексного переменного и ее приложениях.

Исследование распределения нулей аналитических функций имеет фундаментальное значение для понимания структуры пространств голоморфных функций. Классические результаты, полученные для ограниченных аналитических функций, требуют обобщения на более широкие классы функций с различными ограничениями на рост. Это особенно важно в связи с развитием теории весовых пространств аналитических функций.

Цель работы: исследование свойств корневых множеств аналитических функций в весовых классах с заданными ограничениями на рост модуля вблизи границы области определения.

Данная работа разделена на несколько разделов.

В первом разделе рассматриваются бесконечные произведения, включая общий случай их сходимости, логарифм бесконечного произведения, условия равномерной сходимости. Особое внимание уделено произведениям Бляшке, играющим фундаментальную роль в теории аналитических функций в единичном круге.

Во втором разделе изложена формула Йенсена и ее обобщение - формула Пуассона-Йенсена. Эти результаты позволяют связать модуль аналитической функции с расположением ее нулей и полюсов, что является важным инструментом для дальнейших исследований.

В третьем разделе исследуется условие Бляшке для нулей аналитических функций, допускающих рост вблизи бесконечно удаленной точки. Рассматривается вопрос о том, при каких условиях на весовую функцию корневые множества функций из соответствующего весового класса удовлетворяют условию Бляшке.

В четвертом разделе изучаются нули целых функций с мажорантой бесконечного порядка. Исследуются классы $H(\lambda,\infty)$ и $\tilde{H}(\lambda,\infty)$, доказывается, что при определенных условиях на весовую функцию λ эти классы обладают свойством Линделёфа.

В пятом разделе рассматриваются нули аналитических в круге функций с мажорантой конечного порядка. Получены необходимые и достаточные условия для представления последовательности точек в виде множества нулей функции из соответствующего весового класса.

В шестом разделе представлено численное моделирование распределения нулей в весовых классах. Разработана программа, реализующая алгоритмы генерации нулей на основе метода обратного преобразования для классов $X_\varphi^\infty(D)$ и $H(\lambda,\infty)$. Численные эксперименты демонстрируют влияние параметров весовой функции $\varphi(x) = x^\alpha$ на концентрацию нулей у границы единичного круга и подтверждают теоретические результаты о распределении корневых множеств.

Основное содержание работы.

Определение 1.1. Бесконечным произведеним называется выражение вида

$$(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\ldots, \tag{1.1}$$

которое содержит бесконечно много сомножителей.

Определение 1.6. Произведение $\prod(1+a_n)$ называется абсолютно сходящимся если произведение $\prod(1+|a_n|)$ сходится.

Определение 1.8. Если $0<|z_n|<1, n=1,2,3,\ldots,$ и бесконечное произведение

$$\prod_1^\infty \frac{|z_n|}{z_n}\frac{z_n-z}{1-\overline{z_n}z} \tag{1.3}$$

сходится для $|z|<1$, то оно представляет некоторую функцию, аналитическую в единичном круге. Эта функция называется произведением Бляшке.

Лемма 1.9. Произведение Бляшке сходится в $\{|z|<1\}$ тогда и только тогда, когда $\sum\limits_n(1-|z_n|)<\infty$.

Теорема 2.1. Пусть $f(z)$ - функция, аналитическая в $\{|z|<R\}$ Предположим, что $f(0)\neq 0$ и пусть $r_1, r_2\ldots$ - модули нулей функции $f(z)$ в круге $|z|<R$, расположенные в неубывающем порядке. Тогда при $r_n\le r\le r_{n+1}$

$$\log \frac{r^n|f(0)|}{r_1 r_2 \dots r_n} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \log|f(re)^{i\theta}|d\theta. \tag{2.1}$$

В данном случае нуль порядка р считается р раз. Данная формула может связывать модуль функции с модулями нулей этой функции.

Теорема 2.2. Пусть функция $f(z)$ имеет внутри круга $|z| < R$ нули в точках $a_1, a_2, \dots, a_m$ и полюсы в точках $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$, и пусть она аналитична и не обращается в нуль во всех остальных внутренних и граничных точках круга. Тогда

$$\log|f(re^{i\theta})| = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos\theta - \varphi + r^2} \log|f(Re^{i\varphi})|d\varphi -$$
$$- \sum_{\mu=1}^{m} \log\left|\frac{R^2 - \overline{a_\mu} re^{i\theta}}{R(re^{i\theta} - a_\mu)}\right| + \sum_{\nu=1}^{n} \log\left|\frac{R^2 - \overline{b_\nu} re^{i\theta}}{R(re^{i\theta} - b_\nu)}\right|.$$

Определение 3.1. Пусть даны единичный круг $D = \{|z| < 1\}$ и функция φ- монотонно возрастающая на множестве $[1; \infty)$.

Обозначим через $X_\varphi^\infty(D)$ - класс функций:

$$X_\varphi^\infty(D) = \left\{ f \in H(D) : \ln|f(z)| \le C_f \cdot \varphi\left(\frac{1}{1 - |z|}\right), z \in D \right\},$$

где C_f - положительная константа, которая зависит от f, если $f \in X_\varphi^\infty(D)$, то $Z_f = \{z \in D : f(z) = 0\}$.

Лемма 3.3. Пусть φ - монотонно возрастающая положительная функция на $(1; \infty)$ такая, что $\int\limits_1^\infty \sqrt{\frac{\varphi(x)}{x^3}} dx < \infty$, тогда $\int\limits_1^\infty \frac{\varphi(x)}{x^2} dx < \infty$.

Теорема 3.7. Обозначим через $X_\varphi^\infty(\mathbb{C}_+)$ - класс функций, аналитических в $\mathbb{C}_+$, для которых $\ln|(f(z)| \le C_f \cdot \varphi(|z|)$, где C_f - положительная константа, зависящая только от функции f, при этом $\varphi \in \mathbb{C}_+(1; \infty)$ и $\alpha_\varphi = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\varphi'(x)x}{\varphi(x)}$, где $0 < \alpha_\varphi < \infty$. Тогда для того, чтобы $f \in X_\varphi^\infty(\mathbb{C}_+), f(iy_k) = 0$, $k = 1, 2, 3, \dots, f \not\equiv 0$ следовала $\sum\limits_{k=1}^\infty \frac{1}{y_k} < \infty$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_1^\infty \frac{\varphi(x)}{x^2}dx < \infty.$$

Рассмотрим два класса функций

$$H(\lambda, +\infty) = \{f \in H(\mathbb{C}) : \ln|f(z)| \le C_f \cdot \lambda(|z|), z \in \mathbb{C}\} \tag{4.1}$$

и

$$\tilde{H}(\lambda, +\infty) = \{f \in H(\mathbb{C}) : \ln|f(z)| \le A_f \cdot \lambda(B_f \cdot |z|), z \in \mathbb{C}\} \tag{4.2}$$

Где $H(\mathbb{C})$ - множество всех целых функций, λ - монотонно растущая, положительная функция на $\mathbb{R}_+ = (0; +\infty)$, $\varphi(x) = \ln\lambda(x), x \in \mathbb{R}_+$. A_f, B_f, C_f произвольные положительные числа, которые зависят только от функции f.

Определение 4.3. Если функция f принадлежит множеству целых функций $H(\mathbb{C})$, то множество нулей обозначим через $Z_f = \{z \in \mathbb{C} : f(z) = 0\}$.

Для корней функций из класса $H(\rho, +\infty)$ можно представить последовательность $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ в виде $Z = Z_f, f \in H(\rho, +\infty), f \not\equiv 0, \rho \notin \mathbb{N}, \rho > 0$ тогда и только тогда, когда

$$n(r) = \mathrm{card}\{z_k : |z_k| \le r\} \le C_f r^\rho \tag{4.3}$$

Если же взять $\rho \in \mathbb{N}$, то помимо условия (4.3) возникает условие существования $M > 0$ такого, что

$$\left|\sum_{|z_k| \le r} \frac{1}{z_k^\rho}\right| \le M, \quad r \in \mathbb{R}_+. \tag{4.4}$$

Определение 4.4. Некоторое множество X целых функций удовлетворяет условию Линделефа, если существует функция $f \in X, f \not\equiv 0, Z_f = \{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что из условия $g \in X, Z_g \supseteq \tilde{Z}_f$, где $\tilde{Z}_f = \{|z_k|\}_{k=1}^{\infty}$, следует, что $g(z) = 0$ при всех $z \in \mathbb{C}$.

Теорема 4.5. Пусть λ - весовая функция, причем $\lambda \in C^{(2)}(\mathbb{R}_+)$, функция $\psi(x) = \ln \lambda(e^x)$ выпукла вниз на множестве $\mathbb{R}_+$, причем

$$\frac{\psi''(x)}{(\psi'(x))^{2-\delta}} = O(1), \quad x \to \infty, \tag{4.5}$$

при некотором $0 < \delta < 1$. Тогда класс функция $H(\lambda, \infty)$ обладает условием Линделефа.

Теорема 4.6. Пусть λ - весовая функция, причем $\lambda \in C^{(1)}(\mathbb{R}_+)$, функция $\varphi(x) = \ln \lambda(x)$ выпукла вниз на множестве $\mathbb{R}_+$. Тогда следующие утверждение равносильны:

1. последовательность комплексных чисел $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ можно представить в виде Z_f для некоторой $f \in \tilde{H}(\lambda, \infty), f \not\equiv 0$;
2. существует такое положительное число C, для которого

$$\sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\varphi(C|z_k|)) < \infty.$$

Лемма 4.7. Пусть z_n - последовательность комплексных чисел, сходящихся к бесконечности, такая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^{p_n+1}} < \infty.$$

Тогда произведение Вейерштрасса

$$B(z, z_n, p_n) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) \cdot \exp\left(\frac{z}{z_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)^{p_n}\right)$$

сходится в C удовлетворяет оценке

$$\ln|B(z, z_n, p_n)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{z}{z_n}\right|^{p_n+1}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Лемма 4.8. Пусть $\lambda \in C^1(\mathbb{R}_+), \lambda(x) > 0, x \in \mathbb{R}_+$, и при этом $x\frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} \nearrow \infty$ при $x \to \infty$. Тогда существует функция $f \in H(\lambda, \infty)$, для которой выполняются следующие условия

1. $\lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{\ln M(r,f)}{\lambda(r)} = 1,$

2. $\lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{T(r,f)}{\lambda(r)} = 1,$

3. $\lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{N(r,f)}{\lambda(r)} = 1,$

где $M(r,f) = \max\limits_{|z|\le r} |f(z)|$,

$$T(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln^+ |f(re^{i\varphi})| d\varphi,$$

$$N(r,f) = \int_0^r \frac{n(t)-n(0)}{t} dt,$$

$n(0)$ - порядок нуля функции f в точке $z = 0$.

Пусть $D = \{z : |z| < 1\}$ - единичный круг на комплексной плоскости, $H(D)$ - множество всех голоморфных функций в D, λ - монотонно растущая положительная непрерывная функция на $[0;1)$. Положим

$$A(\lambda) = \{f \in H(D) : \ln |f(z)| \le C_f \cdot \lambda(|z|), z \in D\},$$

где C_f - положительное число, которое зависит только от f.

Теорема 5.1. Пусть λ - логарифмическая выпуклая функция на $[0,1)$, т.е. функция $\lambda(e^x)$ выпукла на $(-\infty, 0)$, при чем $\lambda(r) \to \infty$ при $r \to 1-0$. Тогда можно построить функцию $f \in A(\lambda)$, удовлетворяющую следующим условиям:

1. $\lim\limits_{r\to 1-0} \ln M(r,f)/\lambda(r) = 1,$

2. $\lim\limits_{r\to 1-0} T(r,f)/\lambda(r) = 1,$

3. $\lim\limits_{r\to 1-0} N(r,f)/\lambda(r) \geq 1/3$,
где $M(r,f) = \max\limits_{|z|\leq 1}|f(z)|$, $0 < r < 1$, $T(r,f)$ - характеристика Неванлинны функции f,

$$N(r,f) = \int\limits_0^r \frac{n(r,f)-n(0,f)}{t}dt,$$

$n(t,f)$ - число нулей функции f в круге $D_t = \{z : |z| < t\}$.
Если $\varphi(R) = R^\alpha$, то в условиях леммы 5.2 справедлива оценка

$$\tilde{n}(R) \leqslant C_f \begin{cases} R^\alpha, & \text{если } \alpha > 1, \\ R\ln R, & \text{если } \alpha = 1, \\ R, & \text{если } \alpha < 1. \end{cases}$$

Теорема 5.6. Пусть $\lim\limits_{x\to\infty} \psi'(x) = \alpha_\lambda < +\infty$. Тогда

1. если $1 < \alpha_\lambda < \infty$, то последовательность $\{z_k\}_{k=1}^\infty \in D$ можно представить в виде $Z_f(D)$, $f \in A(\lambda)$ тогда и только тогда, когда $n_{k,l} = \mathrm{card}\{z_m : z_m \in \Delta_{k,l}\}$ удовлетворяет оценке

$$n_{k,l} \leq c \cdot \varphi(2^k), \tag{5.14}$$

где $k, l \in \mathbb{Z}_+, -2^k \leq l \leq 2^k - 1$, где $\varphi(x) = \exp\psi(\ln x), x > 1$;

2. если $0 < \alpha_\lambda < \infty$, а последовательность $\{z_k\}_{k=1}^\infty$ удовлетворяет оценке 5.14, то при $\beta > \alpha + 1$ бесконечное произведение Джрбашяна

$$\pi_\beta(z, z_k) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{z_k}\right) \cdot \exp\left(\frac{\beta+1}{\pi}\int_D \frac{\ln|1 - \frac{\zeta}{z_k}|(1-|\zeta^2|)^\beta}{(1-\overline{\zeta}z)^{\beta+2}}dm_2(\zeta)\right)$$

сходится равномерно внутри D, при этом $\pi_\beta(z, z_k) \in A(\lambda)$.

Теорема 5.7. Пусть λ - монотонно растущая и непрерывная функция на $[0;1)$, причем $\lambda(e^x)$ выпукла на $(-\infty, 0), \psi(x) = \ln\lambda(1-e^{-x}), x \in \mathbb{R}_+, \psi \in C^1(\mathbb{R}_+)$, при этом существует предел $\lim\limits_{x\to+\infty} \psi'(x) = \alpha_\lambda$. Если $\alpha_\lambda = +\infty$, то будем предполагать, что ψ - выпуклая функция из $C^2(\mathbb{R}_+)$ и существует $\beta \in (0,1)$ такое, что

$$\frac{\psi''(x)}{(\psi'(x))^{2-\beta}} = O(1), \quad x \to +\infty.$$

Тогда существует функция $f \in A(\lambda)$ и последовательность $\{z_k\}_{k=1}^{\infty} \subset D$ такие, что $f(z_k) = 0, k = 1, 2, 3, \ldots, f(z) \neq 0, z \neq z_k$, в то же время для произвольной $g \in A(\lambda)$ удовлетворяет условию $g(|z_k|) = 0, k = 1, 2, 3, \ldots n, \ldots$ выполнено $g(z) = 0, z \in D$.

Для иллюстрации полученных теоретических результатов была разработана программа численного моделирования, демонстрирующая влияние параметров весовой функции на распределение нулей в классах $X_\varphi^\infty(D)$ и $H(\lambda, \infty)$.

Генерация нулей для класса $X_\varphi^\infty(D)$. Для получения распределения нулей, соответствующего весовой функции $\varphi(x) = x^\alpha$, используется метод обратного преобразования. Если U – случайная величина, равномерно распределенная на $[0, 1]$, то модули нулей генерируются по формуле:

$$|z_k| = \begin{cases} U^{1/(\alpha+1)}, & \text{при } \alpha \leq 1, \\ U^{1/(2\alpha)}, & \text{при } \alpha > 1. \end{cases}$$

Моделирование класса $H(\lambda, \infty)$. Для целых функций с мажорантой $\lambda(|z|) = |z|^\alpha$ нули генерируются в области $|z| \leq 3$ с плотностью:

$$|z_k| = 3 \cdot U^{1/(\alpha+0.5)}.$$

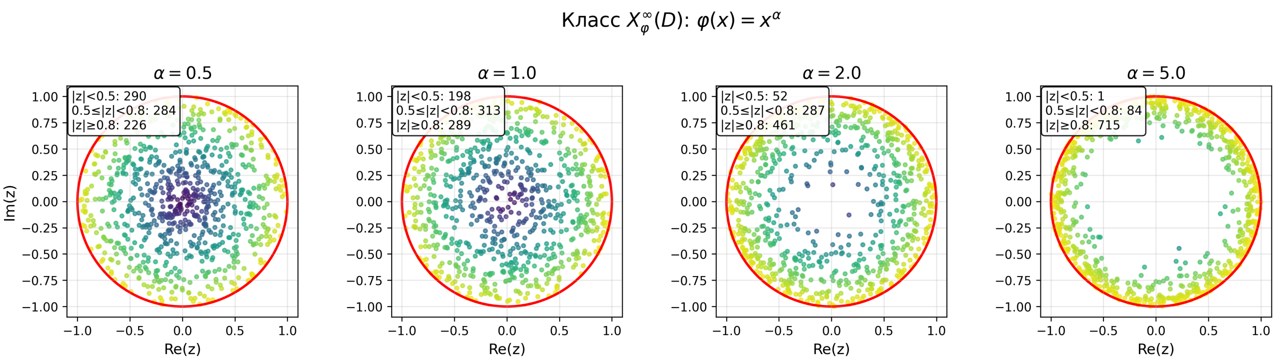

Рисунок 1 — Распределение нулей в классе $X_\varphi^\infty(D)$ при различных значениях параметра весовой функции $\varphi(x) = x^\alpha$

Из рисунка 1 отчетливо видно влияние параметра α на концентрацию нулей:

- При $\alpha = 0.5$ нули распределены относительно равномерно по всему единичному кругу;
- При $\alpha = 1.0$ наблюдается умеренная концентрация нулей в области $|z| > 0.7$;
- При $\alpha = 2.0$ происходит заметная концентрация нулей у границы;
- При $\alpha = 5.0$ подавляющее большинство нулей сосредоточено в узком кольце вблизи единичной окружности.

Рисунок 2 демонстрирует распределение нулей в классе $H(\lambda, \infty)$ целых функций с экспоненциальным ростом. Показана область $|z| \leq 3$ с концентрическими окружностями для ориентира.

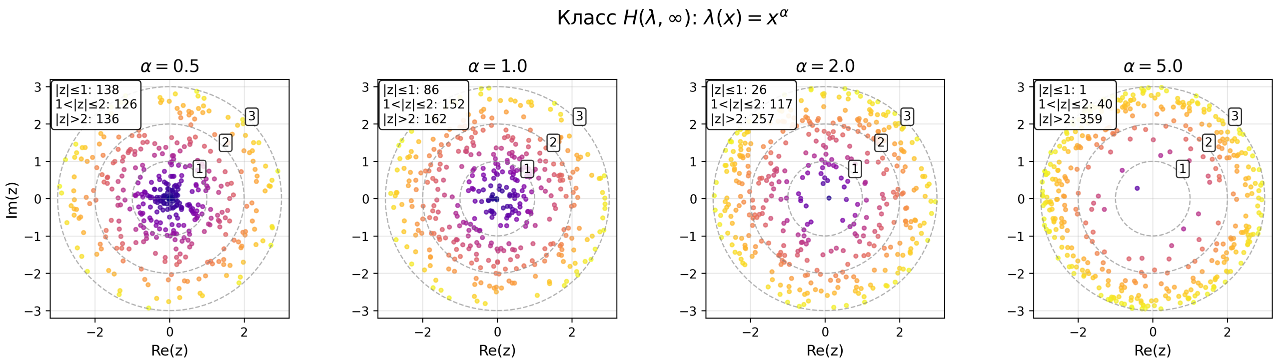

Рисунок 2 — Распределение нулей в классе $H(\lambda, \infty)$ при различных значениях мажоранты $\lambda(x) = x^{\alpha}$

Для класса целых функций наблюдается следующая закономерность:

- При малых значениях α нули распределены более равномерно по всей области;
- С ростом α увеличивается плотность нулей в центральной части, что соответствует экспоненциальному росту мажоранты;
- Статистические данные в углах графиков показывают количественное распределение нулей по концентрическим кольцам.

Заключение. В дипломной работе были исследованы свойства корневых множеств аналитических функций в единичном круге и целых функций, модуль которых допускает заданный рост вблизи границы области определения или на бесконечности.

Получено полное описание условий Бляшке для нулей аналитических функций из весовых классов $X^{\infty}_{\varphi}(D)$. Установлено, что для функций φ с условием $\int_1^{\infty}\varphi(x)/x^2\,dx<\infty$ корневые множества функций из соответствующего весового класса удовлетворяют условию Бляшке. Доказано условие Линделёфа для классов целых функций $H(\lambda,\infty)$ и $\tilde{H}(\lambda,\infty)$ с мажорантой бесконечного порядка. Установлены необходимые и достаточные условия представимости последовательности комплексных чисел в виде множества нулей функции из класса $\tilde{H}(\lambda,\infty)$ в терминах сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\exp(-\varphi(C|z_k|))<\infty$. Получена характеризация корневых множеств для аналитических в круге функций с мажорантой конечного порядка через условия на считающую функцию в криволинейных квадратах.

Разработана программа численного моделирования распределения нулей в весовых классах аналитических функций. Проведенные численные эксперименты: - подтвердили корректность полученных теоретических результатов; - продемонстрировали влияние параметров весовой функции на концентрацию нулей у границы области; - обеспечили наглядную визуализацию распределения нулей для различных значений параметра α в классах $X^{\infty}_{\varphi}(D)$ и $H(\infty,\lambda)$; - показали практическую значимость установленных условий на весовые функции.