

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра _____ математического анализа _____

Анизотропные пространства С. Л. Соболева и теоремы вложения

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 421 группы

направления 02.03.01 Математика и компьютерные науки

механико-математического факультета

Шеиной Любви Михайловны

Научный руководитель
к.ф. – м.н., доцент

подпись, дата

Л. В. Сахно

Заведующий кафедрой
к.ф. – м.н., доцент

подпись, дата

Е. В. Разумовская

Саратов 2025

Введение. Теория вложения пространств дифференцируемых функций многих переменных оформилась как самостоятельное направление математики в 1930-х годах благодаря фундаментальным работам советского учёного Сергея Львовича Соболева. Впоследствии это направление получило активное развитие в трудах многих математиков, что привело к появлению разнообразных подходов и методов. В рамках данной теории исследуются важные взаимосвязи между дифференциальными свойствами функций в различных метриках, устанавливаются неравенства для производных, а также изучаются вопросы продолжения функций за пределы исходных областей определения с сохранением их аналитических характеристик. Основным инструментарием служат интегральные представления функций и оценки для различных типов интегральных операторов. Эта теория находит широкое применение в исследовании дифференциальных уравнений в частных производных, а её методы и результаты играют ключевую роль в математической физике. Целями данной работы являются рассмотрение основных понятий об обобщенной производной в смысле С.Л. Соболева и рассмотрение вывода некоторых теорем вложения.

Дипломная работа содержит в себе несколько разделов. Первый раздел посвящен основной информации об пространствах L_p , а также содержит в себе основные интегральные неравенства. В следующих разделах рассмотрим усреднение функций, обобщенные производные в смысле С. Л. Соболева и их свойства, интегральные представления дифференцируемых функций через их производные, а также введем область определения функций с условиями l -рога. На основании введенных понятий исследуются анизотропные пространства $W_p^l(G)$ (где $l = (l_1, \dots, l_n)$) и их свойства. В последнем разделе доказывается теорема вложения анизотропных пространств $W_p^l(G)$ в $L_q(G)$, обобщающая классическую теорему вложения С.Л. Соболева. Также рассмотрим вложение пространства $W_p^l(G)$ при несоответствии l типу области G , сформулированное в виде теоремы и покажем необходимость неравенства в условии данной теоремы.

Основное содержание работы. Для начала сформулируем основные свойства пространств $L_p(G)$, элементами которых являются вещественные функции $f(x)$, определенные на измеримом множестве $G \in E^n$, где E^n n -мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, \dots, x_n)$. Измеримость множеств будем понимать в смысле Лебега.

Определение 1.1 Пусть p - вещественное число, $1 \leq p < \infty$. Обозначим через $L_p(G)$ - пространство измеримых на G функций $f(x)$, для которых функция $|f(x)|^p$ интегрируема в смысле Лебега на G .

Число

$$\|f\|_{L_p(G)} = \|f\|_{p,G} = \left(\int_G |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

называется нормой элемента $f \in L_p(G)$. Для пространства $L_p(G)$ выполняются следующие свойства:

- 1) $\|f\|_{p,G} = 0$ эквивалентно $f(x) = 0$ для почти всех $x \in G$,
- 2) $\|cf\|_{p,G} = |c| \|f\|_{p,G}$,
- 3) $\|f_1 + f_2\|_{p,G} \leq \|f_1\|_{p,G} + \|f_2\|_{p,G}$

Определение 1.2 $L_\infty(G)$ - пространство измеримых и существенно ограниченных функций с нормой

$$\|f\|_{L_\infty(G)} = \|f\|_{\infty,G} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in G} |f(x)|,$$

где

$$\operatorname{ess\,sup} f = \inf \{a \in \mathbb{R} : M(\{x : f(x) > a\}) = 0\}, \quad M - \text{мера на множестве } X.$$

Теорема 1.1 Пространство $L_p(G)$ является полным, то есть если $f_k \in L_p(G)$ ($k = 1, 2, \dots$), $\|f_k - f_l\|_{p,G} \rightarrow 0$ ($k, l \rightarrow \infty$), то существует функция $f \in L_p(G)$ такая, что $\|f_k - f\|_{p,G} \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$).

Определение 1.5 Функция $f \in L_p(G)$ называется непрерывной (в целом) в $L_p(G)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что

$$\|f(\cdot + y) - f\|_{p,E^n} < \varepsilon,$$

как только $|y| < \delta$, где $|y| = \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

Теорема 1.2 Всякая функция $f \in L_p(G)$, $1 \leq p < \infty$, непрерывна в целом $L_p(G)$.

Определение 1.10 Пусть G - открытое множество в E^n . Если функция $f(x)$, заданная на G , $f \in L_p(F)$ на любом компакте $F \subset G$, то будем говорить, что $f(x)$ принадлежит классу $L_p^{loc}(G)$. Если $p = 1 = (1, \dots, 1)$, то будем обозначать такой класс $L^{loc}(G)$.

Далее рассмотрим основные интегральные неравенства для векторных $p = (p_1, \dots, p_n)$.

Неравенство Гёльдера.

При $1 \leq p \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

$$\int_{E^n} |f_1(x)f_2(x)| dx \leq \|f_1\|_p \|f_2\|_{p'},$$

Неравенство Минковского.

Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $f_i \in L_p(E^n)$ ($i = 1, \dots, m$).

$$\left\| \sum_{i=1}^m f_i \right\|_p \leq \sum_{i=1}^m \|f_i\|_p,$$

Обобщенное неравенство Минковского.

Если $1 \leq p \leq \infty$, $\varphi(x, y)$ - измеримая функция, заданная на $E_x \times E_y$, то имеет место неравенство

$$\left\| \int_{E_y} \varphi(\cdot, y) dy \right\|_{p, E_x} \leq \int_{E_y} \left\| \varphi(\cdot, y) \right\|_{p, E_x} dy.$$

Здесь $E_x \times E_y$ прямое произведение E_x (n -мерного пространства точек x) и E_y (m -мерного пространства точек y).

Неравенство Юнга.

Пусть p, q, r - вещественные числа, удовлетворяющие условиям

$$1 \leq p \leq q \leq \infty, \quad 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r},$$

и пусть $f(x)$ и $K(x)$ - функции одной переменной, заданные на E^1 , $f \in L_p(E^1)$, $K \in L_r(E^1)$,

$$J(x) = \int_{E^1} f(y) K(y - x) dy.$$

Тогда

$$\|J\|_q \leq \|K\|_r \|f\|_p.$$

Пусть $K(x)$ - бесконечно дифференцируемая, финитная в E^n ($K \in C_0^\infty$) функция, удовлетворяющая условию

$$\int_{E^n} K(x) dx = 1. \quad (1)$$

Пусть $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_i > 0$ ($i = 1, \dots, n$), $v > 0$. Построим для $K(x)$ среднюю функцию, которая будет бесконечно дифференцируемой на E^n , следующим образом:

$$K_{v^\lambda}(x) = v^{-|\lambda|} K(x : v^\lambda).$$

Носителем этой функции является множество

$$S_{v^\lambda}(K) = \{x : (x : v^\lambda) \in S(K)\}, S_{v^\lambda}(K) \subset I_{v^\lambda} \quad (2)$$

Пусть G - измеримое множество пространства E^n , а f - функция, определенная на G . Положим, $f = 0$ на $E^n \setminus G$ и предположим, что таким образом определенная на E^n функция $f \in L^{loc}(E^n)$.

Определим среднюю функцию для функции f с ядром усреднения K и параметром v^λ по формуле

$$\begin{aligned} f_{v^\lambda}(x) &= v^{-|\lambda|} \int_{E^n} f(x+y) K(y : v^\lambda) dy = \\ &= v^{-|\lambda|} \int_{E^n} f(y) (K((y-x) : v^\lambda)) dy. \end{aligned}$$

Функция $f_{v^\lambda}(x)$ непрерывна и имеет непрерывные производные любого порядка на E^n и для любого $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ($\alpha_i \geq 0$ – целые)

$$D_x^\alpha f_{v^\lambda}(x) = (-1)^{|\alpha|} v^{-|\lambda| - (\alpha, \lambda)} \int_{E^n} f(y) D^\alpha K((y-x) : v^\lambda) dy,$$

Лемма 2.1 Если $f \in L_p(G)$ ($p = (p_1, \dots, p_n)$), то

$$\|f_{v^\lambda}\|_p \leq v^{-|\lambda|} \|K\|_1 \|f\|_p \quad (1 \leq p \leq \infty),$$

$$\lim_{v \rightarrow 0} \|f_{v^\lambda} - f\| = 0 \quad (1 \leq p < \infty).$$

Замечание 2.1 Если $f \in L_p^{loc}$, $1 \leq p < \infty$, то $f_{v^\lambda} \rightarrow f$ в смысле $L_p^{loc}(G)$.

Лемма 2.2 Если G – открытое множество пространства E^n , $f \in L_p^{loc}(G)$, $p \geq 1$, то

$$\lim_{v \rightarrow 0} f_{v^\lambda}(x) = f(x)$$

для почти всех $x \in G$.

Определение 2.1 Пусть функции f и g локально суммируемы на открытом множестве $G \subset E^n$. Если для любой бесконечно дифференцируемой финитной в G функции φ выполняется равенство

$$\int_G g(x) \varphi(x) dx = (-1)^{|k|} \int_G f(x) \varphi^{(k)}(x) dx, \quad (3)$$

где $k = (k_1, \dots, k_n)$ ($k_i \geq 0$ – целые), то g называется обобщенной производной функции f вида $f^{(k)} = D^k f = \frac{\partial^{|k|} f}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}$ в G .

Лемма 2.3 Пусть в области G заданы функция $f \in L_p^{loc}(G)$, последовательность функций $f_j \in L_p^{loc}(G)$ ($j = 1, \dots$), имеющих обобщенные производные $f_j^{(k)} \in L_q^{loc}(G)$ ($j = 1, \dots$), где $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$.

Если $f_j \rightarrow f$ ($j \rightarrow \infty$) в смысле $L_p^{loc}(G)$ и $(f_j^{(k)} - f_i^{(k)}) \rightarrow 0$ ($j, i \rightarrow \infty$) в смысле $L_q^{loc}(G)$, то функция f имеет на G обобщенную производную $f^{(k)} \in L_q^{loc}(G)$ и $f_j^{(k)} \rightarrow f^{(k)}$ ($j \rightarrow \infty$) в смысле $L_q^{loc}(G)$.

Замечание 2.5 Если в условиях леммы $f_j^{(k)} \in L_q(G)$ ($j = 1, \dots$) и $\|f_j^{(k)} - f_i^{(k)}\|_{q,G} \rightarrow 0$ ($i, j \rightarrow \infty$), то $f^{(k)} \in L_q(G)$ и $\|f_j^{(k)} - f^{(k)}\|_{q,G} \rightarrow 0$ ($j \rightarrow \infty$).

Приведем вывод интегральных представлений дифференцируемых функций. Построим для локально суммируемой функции f её среднюю функцию $f_{v^\lambda} = f(x, v)$ с некоторым ядром K' и параметром усреднения v^λ , где $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ - фиксированный вектор. Такую функцию можно рассматривать как функцию параметра v , непрерывно дифференцируемую по v при $v > 0$.

Имеем интегральное представление

$$f(x) = f_{h^\lambda}(x) + \int_0^h \sum_{i=1}^n v^{-1-|\lambda|+l_i\lambda_i} dv \int_{E^n} D_i^{l_i} f(x+y) \tilde{\mathfrak{S}}_i(y : v^\lambda) dy, \quad (4)$$

справедливое для почти каждого $x \in U$, где U -множество, для которого имеет смысл правая часть формулы (4).

Рассмотрим подробнее, каков смысл представления (4). Перед этим заметим, что $\text{supp} \mathfrak{S}_i \subset S(K)$, поэтому фактическое интегрирование правой части этой формулы проводится по точкам $y \in S(K, \lambda, h)$, где

$$S(K, \lambda, h) = \bigcup_{0 < v \leq h} S_{v^\lambda}(K)$$

- теоретико-множественная сумма множеств $S_{v^\lambda}(K)$ вида

$$S_{v^\lambda}(K) = \{x : (x : v^\lambda) \in S(K)\}.$$

Следовательно, в правой части (4) используются значения функции f и её производных в точках множества $x + S(K, \lambda, h)$, которое назовем носителем представления (4).

Пусть G - область задания функции f . Положим

$$U = \{x : x \in G, x + S(K, \lambda, h) \subset G\}.$$

Тогда правая часть (4) имеет смысл для всех x из множества U . Так как предполагаем, что $f \in L^{loc}(G)$, то на основании леммы в случае $p = 1$, можно утверждать, что $f_{\varepsilon^\lambda} \rightarrow f(x)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ почти везде на G , а следовательно, почти везде на U . Это означает, что тождество (4), справедливо для почти всех точек x множества U .

Пусть $b > 0$, $a_i \neq 0$ ($i = 1, \dots, n$),

$$S(K) \subset \left\{ x : \frac{x_i}{a_i} > 0, 1 < \left(\frac{x_i}{a_i} \right)^{1/\lambda_i} < 1 + b \quad (i = 1, \dots, n) \right\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} S(K, \lambda, h) &= V\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \\ &= \bigcup_{0 < v \leq h} \left\{ x : \frac{x_i}{a_i} > 0, 1 < \left(\frac{x_i}{a_i} \right)^{1/\lambda_i} < (1 + b)v \quad (i = 1, \dots, n) \right\} \end{aligned}$$

Область $V\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ называется $\frac{1}{\lambda}$ -рогом радиуса h и раствора b .

В случаях применения интегрального представления (4) считаем, что $\lambda = \frac{1}{l}$ ($\lambda_i = \frac{1}{l_i}, i = 1, \dots, n$). В этом случае носителем данного представления будет сдвинутый l -рог $x + V(l)$. И в случае $l_1 = \dots = l_n$ l -рог $V(L)$ является конусом.

Также отметим, что правая часть (4) для всех эквивалентных функций $f(x)$ одна и та же в каждой точке x . Поэтому ее можно рассматривать в качестве представителя всего класса эквивалентных функций.

Определение 4.1 Открытое множество $G \in E^n$ удовлетворяет слабому условию l -рога ($G \in \underline{A}(l, h)$), если существует конечное число K открытых множеств $G(k)$ и l -рогов $V_k(l) = V_k(l, h)$, так что справедливо выражение

$$G = \bigcup_{k=1}^K G_k = \bigcup_{k=1}^K (G_k + V_k(l, h)) \quad (5)$$

Определение 4.2 Открытое множество G удовлетворяет сильному условию l -рога ($G \in \bar{A}(l, h)$), если для G выполнено условие (5) и

$$G = \bigcup_{k=1}^K G_k^{|\delta|} \quad \text{при некотором } \delta > 0, \quad (6)$$

где

$$G_k^{|\delta|} = \{x : x \in G_{k,p}(x, G \setminus G_k) > \delta\}.$$

Определение 4.3 Открытое множество G удовлетворяет условию l -рога ($G \in A(l, h)$), если для G выполнено условие (5) и

$$G = \bigcup_{k=1}^K G_k^{(\delta)} \quad \text{при некотором } \delta > 0, \quad (7)$$

где

$$G_k^{(\delta)} = \{x : x \in G_{k,p}(x, \partial G_k \setminus \partial G) > \delta\}.$$

Определение 5.1 Пусть G - открытое множество n -мерного евклидова пространства E^n , $l = (l_1, \dots, l_n)$ - вектор с натуральными компонентами $1 \leq p \leq \infty$. Обозначим через $W_p^l(G)$ пространство локально суммируемых на G функций f , имеющих на G обобщенные производные $D_i^{l_i} f(x) (i = 1, \dots, n)$ и конечную норму

$$\|f\|_{W_p^l(G)} = \|f\|_{p,G} + \sum_{i=1}^n \|D_i^{l_i} f\|_{p,G} = \|f\|_{p,G} + \|f\|_{L_p^l(G)}.$$

Здесь $L_p^l(G)$ - множество, элементами которого являются классы элементов из $W_p^l(G)$, имеющих все одинаковые производные порядка l .

Сформулируем некоторые основные свойства пространства $W_p^l(G)$ в виде теорем.

Теорема 5.1 Пространство $W_p^l(G)$, $1 \leq p \leq \infty$, является банаховым пространством (то есть полным нормированным).

Теорема 5.2 Пространство $W_p^l(G)$, $1 \leq p \leq \infty$ сепарабельно.

Пусть $U \subset E^n$ - открытое множество и функция f определена на множестве $U + V(l)$, где $V(l) = V(l, h) = V$ - это l -рог; и имеет на этом множестве обобщенные производные $D_i^{l_i} f$ ($i = 1, \dots, n$), $\lambda = \frac{1}{l} = \left(\frac{1}{l_1}, \dots, \frac{1}{l_n}\right)$, и $\chi(G) = \chi(G, x)$ - характеристическая функция множества G .

На основании интегрального представления (4) почти всюду на U

$$f(x) = f_{h^\lambda}(x) + \int_0^h \sum_{i=1}^n v^{-|\lambda|} dv \int D_i^{l_i} f(x+y) \mathcal{L}_i(y : v^\lambda) dy,$$

где ядро усреднения и $\mathcal{L}_i$ принадлежат $C_0^\infty(E^n)$, а носителем данного представления является рог $x + V(l)$. Рассмотрим функцию $\tilde{f}(x)$, которая является распространением функции f за пределы U на E^n . Она имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &= (\chi(U + V)f)_{h^\lambda}(x) + \\ &+ \int_0^h \sum_{i=1}^n v^{-|\lambda|} dv \int \chi(U + V; x+y) D_i^{l_i} f(x+y) \mathcal{L}_i(y : v^\lambda) dy. \end{aligned}$$

Заметим, что $\tilde{f}(x)$ не обязана совпадать с $f(x)$ на $(U + V) \setminus U$. В этом случае естественно считать, что функции $f(x)$ определены на различных экземплярах евклидова n -мерного пространства, склеенных по множеству U .

Рассмотрим теоремы вложения анизотропных пространств $W_p^l(G)$, $l = (l_1, \dots, l_n)$ в пространства $L_q(G)$ и $C(G)$, которые являются обобщением классических теорем вложения С.Л. Соболева.

Введем вспомогательный параметр

$$\varkappa = \left| \left(\alpha + \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) : l \right|.$$

Интерпретируем его с геометрической точки зрения:

- 1) При $\varkappa = 1$ точка $\alpha + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ в n -мерном пространстве находится на гиперплоскости, проходящие через n точек $(l_1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, l_n)$.
- 2) При $\varkappa \leq 1$ величина $1 - \varkappa$ пропорциональна расстоянию от точки $\alpha + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ до этой гиперплоскости.

Пусть $U \subset E^n$ - открытое множество, и функция $f(x)$ определена на множестве $U + V(l)$, где $V(l) = V(l, h) = V(l) - l$ -рог, и имеет на этом множестве обобщенные производные $D_i^{l_i} f$ ($i = 1, \dots, n$).

Лемма 6.1 Пусть $1 \leq p \leq q \leq \infty$, $\varkappa \leq 1$ и при $\varkappa = 1$ либо $1 < p = q < \infty$, либо $1 < p_n < q_n < \infty$, либо $1 = p_n < q_n = \infty$. Тогда $D^\alpha W_p^l(U + V) \rightarrow L_q(U)$ и для $f \in W_p^l(U + V)$

$$\|D^\alpha f\|_{q,U} \leq C_1 h^{1-\varkappa} \sum_{i=1}^n \|D_i^{l_i} f\|_{p,U+V} + C_2 h^{-\varkappa} \|f\|_{p,U+V}, \quad (8)$$

причем C_1 и C_2 не зависят от f и h , а C_2 не зависит также от q . В левой части (8) $D^\alpha f$ можно заменить на $D^\alpha f_\varepsilon$ при любом $\varepsilon \in (0, h]$. При $\varkappa < 1$

$$C_1 = C'_1 \left(\frac{1}{1-\varkappa} \right)^{1-\frac{1}{p_n}+\frac{1}{q_n}} \left(\frac{1}{q_n} \right)^{\frac{1}{q_n}},$$

где C'_1 не зависит от q .

Теорема 6.1 Пусть открытое множество G удовлетворяет слабому условию l -рога, $1 \leq p \leq q \leq \infty$, $\varkappa = \left| \left(\alpha + \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) : l \right| \leq 1$ и при $\varkappa = 1$ либо $1 < p = q < \infty$, либо $1 < p_n < q_n < \infty$, либо $1 = p_n < q_n = \infty$. Тогда $D^\alpha W_p^l(G) \rightarrow L_q$; точнее говоря, для $f \in W_p^l(G)$ существует на G обобщенная производная $D^\alpha f \in L_q(G)$ и существуют числа $h_0 > 0$, $C > 0$ такие, что

$$\|D^\alpha f\|_{q,G} \leq C h^{1-\varkappa} \sum_{i=1}^n \|D_i^{l_i} f\|_{p,G} + C h^{-\varkappa} \|f\|_{p,G},$$

где постоянная C не зависит от f и $h \in (0, h_0)$. В частности, при $\alpha = 0$ $W_p^l(G) \rightarrow L_q(G)$.

Теорема 6.2 Пусть открытое множество G удовлетворяет слабому условию l -рога, $1 \leq p \leq \infty$, $\varkappa = \left| \left(\alpha + \frac{1}{p} \right) : l \right| < 1$ либо $\varkappa = 1$, $p_n = 1$.

Тогда $D^\alpha W_p^l(G) \rightarrow C(G)$, точнее говоря, для $f \in W_p^l(G)$ производная $D^\alpha f$

непрерывна в G и

$$\sup_G |D^\alpha f| \leq Ch^{1-\varkappa} \sum_{i=1}^n \|D_i^{l_i} f\|_{p,G} + Ch^{-\varkappa} |f|_{p,G},$$

где $0 < h < h_0$ и постоянная C не зависит от f и h .

Заключение. В начале данной работы были сформулированы понятия пространства $L_p(G)$ и основные интегральные неравенства. Также были рассмотрены усреднение функций и основные понятия обобщенной производной в смысле С.Л. Соболева. Далее привели вывод интегрального представления дифференцируемых через производные и изучили область определения функций с l -рогом. На основании ранее введенных определений привели теорему вложения анизотропных пространств $W_p^l(G)$ в $L_q(G)$ и $C(G)$.