

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра математического анализа

**АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ С
СИММЕТРИЕЙ ПЕРЕНОСА**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 421 группы

направления 02.03.01 Математика и компьютерные науки

механико-математического факультета

Тепловой Ольги Вячеславовны

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.н., доцент

Е.В. Разумовская

подпись, дата

Заведующей кафедрой
и.о. зав. кафедрой,
к.ф.-м.н., доцент

Е.В. Разумовская

подпись, дата

Саратов 2025

Введение. Интеграл Кристоффеля-Шварца, названный в честь немецких математиков Эльвина Кристоффеля и Карла Шварца, является важным инструментом в теории функций комплексного переменного. Он находит широкое применение при решении задач, связанных с конформными отображениями плоскости. В таких задачах ключевую роль играет также принцип симметрии Римана-Шварца.

Актуальность данной темы обусловлена тем, что интеграл Кристоффеля-Шварца является одним из фундаментальных понятий теории функций комплексной переменной и имеет приложения в различных областях математики. Его изучение имеет как теоретическое, так и практическое значение, особенно в задачах конформного отображения областей с различными видами границ.

Целью данной работы является изучение интеграла Кристоффеля-Шварца и его применения для решения задач конформного отображения. Для достижения этой цели поставлены следующие задачи:

1. Исследовать теоретические основы интеграла Кристоффеля-Шварца;
2. Рассмотреть различные варианты конформных отображений, которые могут быть получены с его помощью;
3. Проанализировать примеры выбора констант в интеграле Кристоффеля-Шварца и их влияние на результирующие отображения;
4. Построить пример отображения на счетноугольник с двойной симметрией;
5. Разработать программу с помощью которой можно вычислить параметры отображения верхней полуплоскости на счетноугольник с двойной симметрией.

В работе использованы теоретические материалы из учебных пособий и монографий по теории функций комплексного переменного, а также научные статьи, посвящённые интегралу Кристоффеля-Шварца и его приложениям. Основное внимание уделено анализу классических результатов и их применению к конкретным задачам конформного отображения.

Работа состоит из двух глав.

В первой главе «Вспомогательные теоремы» в параграфах «Принцип симметрии Римана-Шварца», «Конформное отображение на многоугольники с

границей из прямолинейных отрезков. Теорема Кристоффеля-Шварца» и «Конформное отображение на круговые многоугольники» вводятся основные для работы понятия, связанные с интегралом Кристоффеля-Шварца и конформные отображения областей на другие плоскости. В параграфе «Определение акцессорных параметров в интеграле Кристоффеля-Шварца» рассматриваются примеры отображений в некоторых случаях, таких как

- Отображение полуплоскости на треугольник;
- Отображение полуплоскости на прямоугольник;
- Отображение верхней полуплоскости на треугольник.

Во второй главе «Аналитическое продолжение отображения с симметрией переноса» в параграфе «Интеграл Кристоффеля-Шварца для отображения на счетноугольник с двойной симметрией» формулируется и доказывается теорема, которая будет использована для отображения верхней полуплоскости на счетноугольники с двойной симметрией, таких как

- Отображение верхней полуплоскости с исключенными равнобедренными треугольниками;
- Отображение верхней полуплоскости с исключенными прямоугольниками;
- Отображение верхней полуплоскости с исключенными треугольниками.

В параграфе «Вычисление параметров отображения верхней полуплоскости на счетноугольник с двойной симметрией» для примера 2.1.4 будет разработана программа для вычисления параметров.

Основное содержание работы. Введём необходимые определения и теоремы, а также рассмотрим примеры.

Теорема 1.2.4 (Теорема Кристоффеля-Шварца). Если функция $w = f(z)$ реализует конформное отображение верхней полуплоскости $Im z > 0$ на внутренность ограниченного многоугольника Δ с углами $\alpha_k \pi$ ($0 < \alpha_k \leq 2$, $k = 1, 2, \dots, n$) при вершинах, причем известны точки a_k действительной оси ($-\infty < a_1 < a_2 < \dots < a_n < \infty$), соответствующие вершинам этого многоугольника, то $f(z)$ представляется интегралом

$$f(z) = C \int_{z_0}^z (z - a_1)^{\alpha_1 - 1} (z - a_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (z - a_n)^{\alpha_n - 1} dz + C_1 \quad (1.2)$$

или

$$f(z) = C \int \prod_{k=1}^n (z - a_k)^{\alpha_k - 1} dz + C_1,$$

где z_0 , C и C_1 - некоторые постоянные, a_1, \dots, a_n - прообразы вершин A_1, \dots, A_n .

Интеграл Кристоффеля-Шварца получен в предложении, что точки a_k , соответствующие вершинам многоугольника, известны.

Воспользуемся данной теоремой и рассмотрим следующий пример, предварительно введя следствие.

Следствие 1.4.1. Пусть функция $w = f(z)$ конформно отображает полуплоскость $Im z > 0$ на ограниченный многоугольник так, что $a_k \neq \infty$ ($k = 1, 2, \dots, n - 1$), $a_n = \infty$. Тогда имеет место формула

$$f(z) = C \int_{z_0}^z (\zeta - a_1)^{\alpha_1 - 1} (\zeta - a_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (\zeta - a_{n-1})^{\alpha_{n-1} - 1} d\zeta + C_1. \quad (1.20)$$

Пример 1.4.3 (Отображение полуплоскости на треугольник). Найдём конформное отображение $w = f(z)$ полуплоскости $Im z > 0$ на ограниченный треугольник с вершинами в точках A_1, A_2, A_3 , где $A_1 = 0, A_2 = 1, Im A_3 > 0$. Здесь $0 < \alpha_k < 1$ ($k = 1, 2, 3$), $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$.

Положим $a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = \infty$. По формуле (1.20) имеем

$$f(z) = C \int_0^z \zeta^{\alpha_1 - 1} (\zeta - 1)^{\alpha_2 - 1} d\zeta = A \int_0^z (1 - \zeta)^{\alpha_2 - 1} d\zeta,$$

где $A = Ce^{\pi(\alpha_2 - 1)i}$, а подынтегральная функция принимает положительные значения на интервале $(0, 1)$. Из равенства

$$A_2 - A_1 = 1 = A \int_0^1 (1 - t)^{\alpha_2 - 1} dt = A * B(\alpha_1, \alpha_2)$$

находим $A = \frac{1}{B(\alpha_1, \alpha_2)}$, где $B(\alpha_1, \alpha_2)$ - бета-функция. Таким образом, функция

$$w = \frac{1}{B(\alpha_1, \alpha_2)} \int_0^z \zeta^{\alpha_1-1} (1-\zeta)^{\alpha_2-1} d\zeta, \quad (1.21)$$

конформно отображает полуплоскость $Im z > 0$ на треугольник.

Определение 1.5.2. Эллиптическим интегралом третьего рода в нормальной тригонометрической форме называется интеграл

$$\int_0^\phi \frac{d\phi}{(1+n\sin^2\phi)\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}. \quad (1.24)$$

Будем использовать для эллиптических интегралов в форме Лежандра специальные обозначения

$$\Pi(n, k, z) = \int_0^z \frac{d\xi}{(1+n\xi^2)\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}}. \quad (1.26)$$

Для дальнейшей работы с отображением счетноугольника нам понадобится следующее определение.

Определение 2.1.1 Назовем односвязную область D типа полуплоскости счетноугольником с двойной симметрией, если она обладает свойством симметрии переноса вдоль вещественной оси на 2π , симметрией относительно прямой $w = \pi + iv, v \in \mathbb{R}$, и такую, что часть границы области D от точки w_0 до точки $w_0 + 2\pi$ состоит из конечного числа прямолинейных отрезков и лучей.

Приведём пример отображения верхней полуплоскости на счётноугольник с двойной симметрией

Пример 2.1.4 Пусть область D - верхняя полуплоскость с исключенными треугольниками E_m и T_m , где $E_m = E_0 + 2\pi m, T_m = T_0 + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$. Вершины треугольника E_0 находятся в точках $-b, ib, b$, вершины треугольника T_0 находятся в точках $b, \pi + i(\pi - b), 2\pi - b, 0 < b < \pi$. В области проведены разрезы по отрезкам вертикальных прямых $w = 2\pi m + iv, b \leq v \leq h$, разрезы по отрезкам вертикальных прямых $w = \pi(2m + 1) + iv, \pi - b \leq v \leq g, m \in \mathbb{Z}$.

Вершинам счетноугольника $ih, ib, b, \pi + i(\pi - b), \pi + ig$ соответствуют углы $\alpha_1\pi = 2\pi, \alpha_2\pi = \frac{3\pi}{4}, \alpha_3\pi = \frac{\pi}{2}, \alpha_4\pi = \frac{3\pi}{4}, \alpha_5\pi = 2\pi$ (рисунок 2.3). Преобразами этих вершин будут точки $0 = z_1^0 \leq z_2^0 \leq z_3^0 \leq z_4^0 \leq z_5^0 = \pi$.

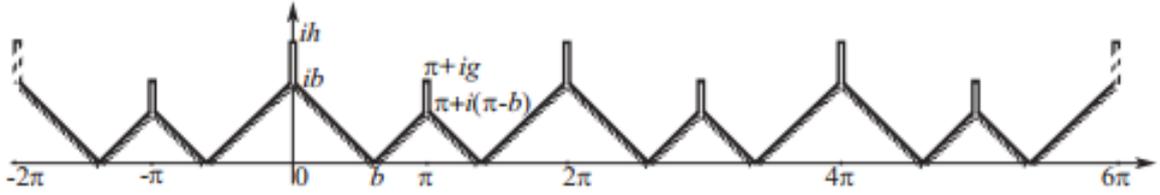


Рисунок 2.3

Пусть Δ — счетноугольник с двойной симметрией. Конечную точку ih_1 , где $h_1 = \max\{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w = 0, w \in \partial\Delta\}$, будем считать вершиной счетноугольника Δ и обозначим ее A_1^0 . Если точка $-i\infty$ — единственная вершина счетноугольника Δ на мнимой оси, то обозначим ее A_1^0 . Аналогично выберем вершину на прямой $\{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w = \pi\}$ и обозначим ее через A_n^0 . Если вершины A_1^0 и A_n^0 являются внутренними точками отрезков прямых границы счетноугольника $\partial\Delta$, то угол при этих вершинах равен π .

Обозначим через $A_1^0, A_2^0, \dots, A_{2n-1}^0, A_1^1$, где $A_1^1 = A_1^0 + 2\pi$, вершины счетноугольника Δ , лежащие в полосе $P_{2\pi} = \{w \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re} w \leq 2\pi\}$, возрастание нижнего индекса соответствует движению вдоль границы счетноугольника Δ в положительном направлении. Углы при этих вершинах обозначим соответственно $\alpha_1\pi, \alpha_2\pi, \dots, \alpha_{2n-2}\pi, \alpha_1\pi$. Остальные вершины A_k^m определяются сдвигом вершин A_k^0 вдоль вещественной оси: $A_k^m = A_k^0 + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}, k = \overline{1, 2n-2}$. Вершина A_{n-s}^0 симметрична вершине $A_{n+s}^0, s = \overline{1, n-2}$, относительно прямой $\{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w = \pi\}$, причем $\alpha_{n-s} = \alpha_{n+s}, s = \overline{1, n-2}$. Некоторые из вершин $A_k^m, k = \overline{2, n-1}, m \in \mathbb{Z}$, могут находиться в бесконечно удаленной точке, значение угла при вершине в бесконечно удаленной точке равняется нулю и не может принимать других значений.

Для отображения f верхней полуплоскости \mathbb{P}^+ на счетноугольник с двойной симметрией получаем следующую теорему.

Теорема 2.1.5 Функция f , однолистно и конформно отображающая верхнюю полуплоскость \mathbb{P}^+ на счетноугольник с двойной симметрией, представ-

ляется интегралом

$$f(z) = c_1 \int_0^z (1 - \cos \xi)^{\frac{\alpha_1 - 1}{2}} (1 + \cos \xi)^{\frac{\alpha_n - 1}{2}} \prod_{k=2}^{n-1} (a_k - \cos \xi)^{\alpha_k - 1} d\xi + A_1^0, \quad (2.1)$$

где $a_k = \cos z_k^0$, z_k^0 — прообразы вершин A_k^0 , $k = \overline{1, n}$, счетноугольника Δ , лежащих в полосе $P_\pi = \{w \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re} w \leq \pi\}$, $z_1^0 = 0$, $z_n^0 = \pi$; $\alpha_k \pi$, $\alpha_k \in [0, 2]$, $k = \overline{1, n}$, — углы при этих вершинах; c_1 — константа.

Вернемся к примеру 2.1.4. Согласно теореме 2.1.5, отображение представим интегралом

$$f(z) = c_1 \int_0^z (a_2 - \cos \xi)^{-\frac{1}{4}} (a_3 - \cos \xi)^{-\frac{1}{2}} (a_4 - \cos \xi)^{-\frac{1}{4}} \sin \xi d\xi + ih.$$

Выполним замену $s(\xi) = \sqrt[4]{\frac{a_4 - \cos \xi}{a_2 - \cos \xi}}$. Тогда

$$w(z) = 4c_1 \sqrt{\frac{a_2 - a_4}{a_2 - a_3}} \int_{s(0)}^{s(z)} \frac{s^2}{(s^4 - 1) \sqrt{s^4 + \frac{a_3 - a_4}{a_2 - a_3}}} ds + ih.$$

Интеграл является псевдоэллиптическим, если $a_3 - a_4 = a_2 - a_3$. Предположим, что это условие не выполняется. Обозначим $-\frac{a_3 - a_4}{a_2 - a_3} = \lambda$, выполним

замену $s(\xi) = \frac{\sqrt[4]{\lambda}}{\cos \psi(\xi)}$, получим сумму эллиптических интегралов третьего рода в форме (1.24)

$$f(z) = c_1 \sqrt[4]{\lambda} \sqrt{2 \frac{a_2 - a_4}{a_2 - a_3}} \left(\frac{1}{1 - \sqrt{\lambda}} \int_{\varphi(0)}^{\varphi(z)} \frac{d\psi}{\left(1 - \frac{1}{1 - \sqrt{\lambda}} \sin^2 \psi\right) \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \psi}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{1 + \sqrt{\lambda}} \int_{\varphi(0)}^{\varphi(z)} \frac{d\psi}{\left(1 - \frac{1}{1 + \sqrt{\lambda}} \sin^2 \psi\right) \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \psi}} \right) + ih,$$

где

$$\varphi(z) = \arccos \sqrt[4]{\lambda \frac{a_2 - \cos z}{a_4 - \cos z}}.$$

Замена $\sin \psi = \zeta$ преобразует интегралы к канонической форме Лежандра. Используя специальные обозначения для эллиптических интегралов в форме Лежандра 1.26, запишем

$$f(z) = C_1 \left(u_1 \Pi \left(u_1, \frac{1}{\sqrt{2}}, v(z) \right) + u_2 \Pi \left(u_2, \frac{1}{\sqrt{2}}, v(z) \right) - C_2 \right) + ih,$$

где

$$v(z) = \sin \arccos \sqrt[4]{\lambda \frac{a_2 - \cos z}{a_4 - \cos z}},$$

$$C_1 = -c_1 \sqrt[4]{\lambda} \sqrt{2 \frac{a_2 - a_4}{a_2 - a_3}},$$

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda} - 1}, u_2 = -\frac{1}{1 + \sqrt{\lambda}},$$

$$C_2 = u_1 \Pi \left(u_1, \frac{1}{\sqrt{2}}, v(0) \right) + u_2 \Pi \left(u_2, \frac{1}{\sqrt{2}}, v(0) \right).$$

На основе полученных формул составим таблицу с результатами вычислений параметров отображения.

z_2, z_4, z_4	a_2, a_3, a_4	λ	C_1	u_1	u_2	$v(0)$
$0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}$	$1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$	0	0	-1	-1	1
$0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}$	$1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$	-1,19	$-1,54 - 1,54i$	$-0,46 - 0,5i$	$-0,46 + 0,5i$	1
$0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$	$1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}$	-2,73	$-2,48 - 2,48i$	$-0,27 - 0,44i$	$-0,27 + 0,44i$	1
$0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}$	$1, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0$	-6,46	$-4,36 - 4,36i$	$-0,13 - 0,34i$	$-0,13 + 0,34i$	1
$0, \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}$	$1, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}$	-10,19	$-5,98 - 5,98i$	$-0,09 - 0,29i$	$-0,09 + 0,29i$	1
$0, \frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}$	$1, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}$	-11,74	$-6,61 - 6,61i$	$-0,08 - 0,27i$	$-0,08 + 0,27i$	1
$0, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$	$1, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$	-12,93	$-7,08 - 7,08i$	$-0,07 - 0,26i$	$-0,07 + 0,26i$	1
$0, \frac{\pi}{6}, \pi$	$1, \frac{\sqrt{3}}{2}, -1$	-13,93	$-7,46 - 7,46i$	$-0,07 - 0,25i$	$-0,07 + 0,25i$	1
$0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$	$1, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$	0	0	-1	-1	1
$0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$	$1, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}$	-0,71	$-1,2 - 1,2i$	$-0,59 - 0,49i$	$-0,59 + 0,49i$	1
$0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$	$1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0$	-2,41	$-2,3 - 2,3i$	$-0,29 - 0,46i$	$-0,29 + 0,46i$	1
$0, \frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}$	$1, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}$	-4,12	$-3,22 - 3,22i$	$-0,2 - 0,4i$	$-0,2 + 0,4i$	1

z_2, z_4, z_4	a_2, a_3, a_4	λ	C_1	u_1	u_2	$v(0)$
$0, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$	$1, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}$	-4,83	$-3,58 - 3,58i$	$-0,17 - 0,38i$	$-0,17 + 0,38i$	1
$0, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}$	$1, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$	-5,37	$-3,84 - 3,84i$	$-0,16 - 0,36i$	$-0,16 + 0,36i$	1
$0, \frac{\pi}{4}, \pi$	$1, \frac{\sqrt{2}}{2}, -1$	-5,83	$-4,06 - 4,06i$	$-0,15 - 0,35i$	$-0,15 + 0,35i$	1
$0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	0	0	-1	-1	1
$0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$	$1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$	-2	$-2,06 - 2,06i$	$-0,33 - 0,47i$	$-0,33 + 0,47i$	1
$0, \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}$	$1, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}$	-2,41	$-2,3 - 2,3i$	$-0,29 - 0,46i$	$-0,29 + 0,46i$	1
$0, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}$	$1, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$	-2,73	$-2,48 - 2,48i$	$-0,27 - 0,44i$	$-0,27 + 0,44i$	1
$0, \frac{\pi}{3}, \pi$	$1, \frac{1}{2}, -1$	-3	$-2,63 - 2,63i$	$-0,25 - 0,43i$	$-0,25 + 0,43i$	1
$0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$	1,0,0	0	0	-1	-1	1
$0, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}$	$1, 0, -\frac{1}{2}$	-0,5	$-1,03 - 1,03i$	$-0,67 - 0,47i$	$-0,67 + 0,47i$	1
$0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$	$1, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}$	-0,71	$-1,2 - 1,2i$	$-0,59 - 0,49i$	$-0,59 + 0,49i$	1
$0, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$	$1, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}$	-0,87	$-1,32 - 1,32i$	$-0,54 - 0,5i$	$-0,54 + 0,5i$	1
$0, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$	$1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$	0	0	-1	-1	1
$0, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}$	$1, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}$	-0,14	$-0,65 - 0,65i$	$-0,88 - 0,33i$	$-0,88 + 0,33i$	1
$0, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}$	$1, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$	-0,24	$-0,78 - 0,78i$	$-0,8 - 0,4i$	$-0,8 + 0,4i$	1
$0, \frac{2\pi}{3}, \pi$	$1, -\frac{1}{2}, -1$	-0,33	$-0,88 - 0,88i$	$-0,75 - 0,43i$	$-0,75 + 0,43i$	1
$0, \frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$	$1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	0	-1	-1	1
$0, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}$	$1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$	-0,09	$-0,58 - 0,58i$	$-0,91 - 0,28i$	$-0,91 + 0,28i$	1
$0, \frac{3\pi}{4}, \pi$	$1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1$	-0,17	$-0,7 - 0,7i$	$-0,85 - 0,35i$	$-0,85 + 0,35i$	1
$0, \frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$	$1, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	0	-1	-1	1
$0, \frac{5\pi}{6}, \pi$	$1, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -1$	-0,07	$-0,54 - 0,54i$	$-0,93 - 0,25i$	$-0,93 + 0,25i$	1
$0, \pi, \pi$	1, -1, -1	0	0	-1	-1	1
$\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$	0	0	-1	-1	1
$\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}$	-1,3	$-1,62 - 1,62i$	$-0,43 - 0,5i$	$-0,43 + 0,5i$	$1,04 - 0,28i$
$\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0$	-4,45	$-3,4 - 3,4i$	$-0,18 - 0,39i$	$-0,18 + 0,39i$	$1,06 - 0,36i$
$\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}$	-7,6	$-4,87 - 4,87i$	$-0,12 - 0,32i$	$-0,12 + 0,32i$	$1,07 - 0,38i$
$\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}$	-8,9	$-5,43 - 5,43i$	$-0,1 - 0,3i$	$-0,1 + 0,3i$	$1,07 - 0,39i$
$\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$	-9,9	$-5,86 - 5,86i$	$-0,09 - 0,29i$	$-0,09 + 0,29i$	$1,07 - 0,39i$
$\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -1$	-10,74	$-6,2 - 6,2i$	$-0,09 - 0,28i$	$-0,09 + 0,28i$	$1,08 - 0,39i$
$\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	0	0	-1	-1	1
$\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0$	-1,37	$-1,66 - 1,66i$	$-0,42 - 0,49i$	$-0,42 + 0,49i$	$1,02 - 0,21i$
$\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$	-2,73	$-2,48 - 2,48i$	$-0,27 - 0,44i$	$-0,27 + 0,44i$	$1,03 - 0,24i$
$\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}$	-3,3	$-2,79 - 2,79i$	$-0,23 - 0,42i$	$-0,23 + 0,42i$	$1,03 - 0,25i$
$\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$	-3,73	$-3,02 - 3,02i$	$-0,21 - 0,41i$	$-0,21 + 0,41i$	$1,03 - 0,25i$
$\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, -1$	-4,1	$-3,21 - 3,21i$	$-0,2 - 0,4i$	$-0,2 + 0,4i$	$1,03 - 0,25i$
$\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, 0$	0	0	-1	-1	1
$\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{1}{2}$	-0,58	$-1,09 - 1,09i$	$-0,63 - 0,48i$	$-0,63 + 0,48i$	$1,01 - 0,11i$
$\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}$	-0,82	$-1,28 - 1,28i$	$-0,55 - 0,5i$	$-0,55 + 0,5i$	$1,01 - 0,13i$
$\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -1$	-1,15	$-1,52 - 1,52i$	$-0,46 - 0,5i$	$-0,46 + 0,5i$	$1,01 - 0,14i$

z_2, z_4, z_4	a_2, a_3, a_4	λ	C_1	u_1	u_2	$v(0)$
$\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$	0	0	-1	-1	1
$\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}$	-0,15	$-0,67 - 0,67i$	$-0,87 - 0,34i$	$-0,87 + 0,34i$	$1 - 0,05i$
$\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$	-0,27	$-0,81 - 0,81i$	$-0,79 - 0,41i$	$-0,79 + 0,41i$	$1 - 0,07i$
$\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}, \pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, -1$	-0,37	$-0,91 - 0,91i$	$-0,73 - 0,44i$	$-0,73 + 0,44i$	$1 - 0,08i$
$\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	0	-1	-1	1
$\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$	-0,1	$-0,59 - 0,59i$	$-0,91 - 0,29i$	$-0,91 + 0,29i$	$1 - 0,04i$
$\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}, \pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1$	-0,19	$-0,71 - 0,71i$	$-0,84 - 0,36i$	$-0,84 + 0,36i$	$1 - 0,06i$
$\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	0	-1	-1	1
$\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -1$	-0,08	$-0,55 - 0,55i$	$-0,93 - 0,26i$	$-0,93 + 0,26i$	$1 - 0,04i$
$\frac{\pi}{6}, \pi, \pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}, -1, -1$	0	0	-1	-1	1
$\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	0	0	-1	-1	1
$\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, 0$	-2,41	$-2,3 - 2,3i$	$-0,29 - 0,46i$	$-0,29 + 0,46i$	$1,07 - 0,39i$
$\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$	-4,83	$-3,58 - 3,58i$	$-0,17 - 0,38i$	$-0,17 + 0,38i$	$1,09 - 0,44i$
$\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}$	-5,83	$-4,06 - 4,06i$	$-0,15 - 0,35i$	$-0,15 + 0,35i$	$1,1 - 0,46i$
$\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$	-6,6	$-4,42 - 4,42i$	$-0,13 - 0,34i$	$-0,13 + 0,34i$	$1,1 - 0,46i$
$\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \pi$	$\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, -1$	-7,24	$-4,71 - 4,71i$	$-0,12 - 0,33i$	$-0,12 + 0,33i$	$1,1 - 0,47i$
$\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0$	0	0	-1	-1	1
$\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{1}{2}$	-0,71	$-1,2 - 1,2i$	$-0,59 - 0,49i$	$-0,59 + 0,49i$	$1,02 - 0,18i$
$\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1,22	$-1,57 - 1,57i$	$-0,45 - 0,5i$	$-0,45 + 0,5i$	$1,02 - 0,21i$
$\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi$	$\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -1$	-1,41	$-1,69 - 1,69i$	$-0,41 - 0,49i$	$-0,41 + 0,49i$	$1,02 - 0,22i$
$\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$	0	0	-1	-1	1
$\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}$	-0,17	$-0,7 - 0,7i$	$-0,85 - 0,35i$	$-0,85 + 0,35i$	$1 - 0,09i$
$\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$	-0,3	$-0,85 - 0,85i$	$-0,77 - 0,42i$	$-0,77 + 0,42i$	$1 - 0,11i$
$\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}, \pi$	$\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}, -1$	-0,41	$-0,95 - 0,95i$	$-0,71 - 0,46i$	$-0,71 + 0,46i$	$1 - 0,12i$
$\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	0	-1	-1	1
$\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$	-0,11	$-0,61 - 0,61i$	$-0,9 - 0,3i$	$-0,9 + 0,3i$	$1 - 0,07i$
$\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \pi$	$\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1$	-0,21	$-0,74 - 0,74i$	$-0,83 - 0,38i$	$-0,83 + 0,38i$	$1 - 0,09i$
$\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	0	-1	-1	1
$\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \pi$	$\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -1$	-0,09	$-0,56 - 0,56i$	$-0,92 - 0,27i$	$-0,92 + 0,27i$	$1 - 0,06i$
$\frac{\pi}{4}, \pi, \pi$	$\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, -1$	0	0	-1	-1	1
$\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$	$\frac{1}{2}, 0, 0$	0	0	-1	-1	1
$\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$	$\frac{1}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1,41	$-1,69 - 1,69i$	$-0,41 - 0,49i$	$-0,41 + 0,49i$	$1,05 - 0,31i$
$\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1,73	$-1,9 - 1,9i$	$-0,37 - 0,48i$	$-0,37 + 0,48i$	$1,05 - 0,32i$
$\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi$	$\frac{1}{2}, 0, -1$	-2	$-2,06 - 2,06i$	$-0,33 - 0,47i$	$-0,33 + 0,47i$	$1,05 - 0,34i$
$\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$	$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$	0	0	-1	-1	1
$\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}$	$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}$	-0,21	$-0,74 - 0,74i$	$-0,83 - 0,38i$	$-0,83 + 0,38i$	$1,01 - 0,12i$
$\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$	-0,37	$-0,91 - 0,91i$	$-0,73 - 0,44i$	$-0,73 + 0,44i$	$1,01 - 0,15i$
$\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi$	$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1$	-0,5	$-1,03 - 1,03i$	$-0,67 - 0,47i$	$-0,67 + 0,47i$	$1,02 - 0,17i$

z_2, z_4, z_4	a_2, a_3, a_4	λ	C_1	u_1	u_2	$v(0)$
$\frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$	$\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	0	-1	-1	1
$\frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$	-0,13	$-0,64 - 0,64i$	$-0,88 - 0,32i$	$-0,88 + 0,32i$	$1 - 0,09i$
$\frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \pi$	$\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1$	-0,24	$-0,78 - 0,78i$	$-0,8 - 0,4i$	$-0,8 + 0,4i$	$1,01 - 0,12i$
$\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	0	-1	-1	1
$\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \pi$	$\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -1$	-0,1	$-0,59 - 0,59i$	$-0,91 - 0,29i$	$-0,91 + 0,29i$	$1 - 0,08i$
$\frac{\pi}{3}, \pi, \pi$	$\frac{1}{2}, -1, -1$	0	0	-1	-1	1
$\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$	$0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$	0	0	-1	-1	1
$\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}$	$0, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}$	-0,41	$-0,95 - 0,95i$	$-0,71 - 0,46i$	$-0,71 + 0,46i$	$1,03 - 0,24i$
$\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}$	$0, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$	-0,73	$-1,22 - 1,22i$	$-0,58 - 0,49i$	$-0,58 + 0,49i$	$1,04 - 0,3i$
$\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$	$0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	0	-1	-1	1
$\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}$	$0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$	-0,22	$-0,76 - 0,76i$	$-0,82 - 0,39i$	$-0,82 + 0,39i$	$1,01 - 0,17i$
$\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi$	$0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1$	-0,41	$-0,95 - 0,95i$	$-0,71 - 0,46i$	$-0,71 + 0,46i$	$1,02 - 0,22i$
$\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$	$0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	0	-1	-1	1
$\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \pi$	$0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -1$	-0,15	$-0,67 - 0,67i$	$-0,87 - 0,34i$	$-0,87 + 0,34i$	$1,01 - 0,14i$
$\frac{\pi}{2}, \pi, \pi$	$0, -1, -1$	0	0	-1	-1	1
$\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$	$-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	0	-1	-1	1
$\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$	-0,77	$-1,24 - 1,24i$	$0,57 - 0,5i$	$0,57 + 0,5i$	$1,07 - 0,37i$
$\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \pi$	$-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1$	-1,41	$-1,69 - 1,69i$	$0,41 - 0,49i$	$0,41 + 0,49i$	$1,1 - 0,47i$
$\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	0	-1	-1	1
$\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \pi$	$-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -1$	-0,37	$-0,91 - 0,91i$	$-0,73 - 0,44i$	$-0,73 + 0,44i$	$1,03 - 0,25i$
$\frac{2\pi}{3}, \pi, \pi$	$-\frac{1}{2}, -1, -1$	0	0	-1	-1	1
$\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	0	-1	-1	1
$\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \pi$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -1$	-0,84	$-1,3 - 1,3i$	$-0,54 - 0,5i$	$-0,54 + 0,5i$	$1,08 - 0,39i$
$\frac{3\pi}{4}, \pi, \pi$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, -1$	0	0	-1	-1	1
$\frac{5\pi}{6}, \pi, \pi$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}, -1, -1$	0	0	-1	-1	1

Заключение. В рамках проделанной работы были рассмотрены случаи применения интеграла Кристоффеля-Шварца для построения отображений верхней полуплоскости на заданные области. В ходе выполнения бакалаврской работы были достигнуты поставленные цели: изучены интеграл Кристоффеля-Шварца, рассмотрены его приложения в теории конформных отображений, а также приведены примеры практического использования этого важного математического инструмента для стандартных и особых случаев исходных многоугольников.

Был разработан код на языке программирования Python, для вычисления параметров отображения верхней полуплоскости на счетноугольник с двойной симметрией. Таблицы параметров приведены в работе.