

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра математического анализа

**СЕМЕЙСТВА ЛЕВЫХ И ПРАВЫХ ЛЕВНЕРОВСКИХ  
ХАЛЛОВ**

**АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ**

студентки 4 курса 421 группы

направления 02.03.01 Математика и компьютерные науки

механико-математического факультета

Соловьевой Елены Александровны

Научный руководитель  
доцент, к.ф.-м.н., доцент

\_\_\_\_\_  
подпись, дата

Ю.В. Матвеева

Заведующей кафедрой  
и.о. зав. кафедрой,  
к.ф.-м.н., доцент

\_\_\_\_\_  
подпись, дата

Е.В. Разумовская

Саратов 2025

**Введение.** На протяжении многих лет дифференциальное уравнение Левнера служило средством изучения свойств однолистных функций в единичном круге. Обнаруженные связи теории Левнера со многими разделами математики объясняют растущий интерес к ней в современных исследованиях. За это время появилось несколько видов этого уравнения, в частности: хордовое, радиальное и другие.

Основной объект исследования бакалаврской работы – это дифференциальное уравнение Левнера, которое было открыто Карлом Левнером в 1923 году, оно задает однопараметрическое семейство конформных отображений канонических областей в себя и содержит произвольную измеримую функцию, которая играет роль управления.

В первой главе «Хордовое уравнение Левнера» вводятся понятия как управляющая функция, емкость, приводится хордовое дифференциальное уравнение Левнера, рассматриваются теорема (LMR).

Во второй главе «Уравнение Левнера с комплекснозначным управлением» в параграфе «Особенности комплекснозначного управления» вводятся понятия левых и правых халлов, описываются отличия от случаев вещественного управления.

В параграфе «Свойства семейств левых и правых халлов» доказываются свойства халлов для хордового уравнения Левнера.

В параграфе «Семейство левых халлов при управлении функции  $c\sqrt{1-t}$ » изучены левые халлы, управляемые функциями вида  $\lambda(t) = c\sqrt{1-t}$  для  $c \in \mathbb{C}$ .

В подпункте этого параграфа «Неявное решение» происходят вычисления неявного решения уравнения Левнера, управляемого  $\lambda$ .

В следующем подпункте «Простые кривые до момента времени 1» будет приведено доказательство что левые халлы  $L_s$  для  $s < 1$ , порожденные  $c\sqrt{1-t}$ , являются простыми кривыми, когда  $c$  не находится на кривой перехода  $Re(\alpha) = 0$ .

В другом подпункте «Поведение кривой при приближении  $t$  к 1» рассмотрим поведение простой кривой при приближении  $t$  к 1.

В другом параграфе «Компьютерная реализация изображения халло» будет сделана задача на построения рисунков халлов с управлением  $\lambda(t) = 3\sqrt{2}\sqrt{1-t}$  для  $t \in [0, 1]$  с помощью программных средств *Python*.

### Основное содержание работы.

Предположим, что  $\gamma(t), t \geq 0$ , является простой кривой в  $\mathbb{H}$ , выходящей из вещественной прямой. Тогда согласно теореме о конформных отображениях, существует единственное отображение вида,  $w = g(t, z)$ , которое отображает верхнюю полуплоскость в  $\mathbb{H}$  с разрезом по кривой  $\gamma$ ,  $t \in [0, t]$ , на верхнюю половину  $w$ -плоскости таким образом, что в окрестности бесконечности это отображение имеет разложение:

$$g(t, z) = z + \frac{c(t)}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right). \quad (1.1)$$

Схематическое изображение отображения приведено на рисунке 1.2. Коэффициент  $c(t)$ , называемый константой, непрерывно возрастает с увеличением  $t$ . Поэтому параметризация кривой может быть выбрана такой, что  $c(t) = 2t$ , и в дальнейшем будем допускать это.

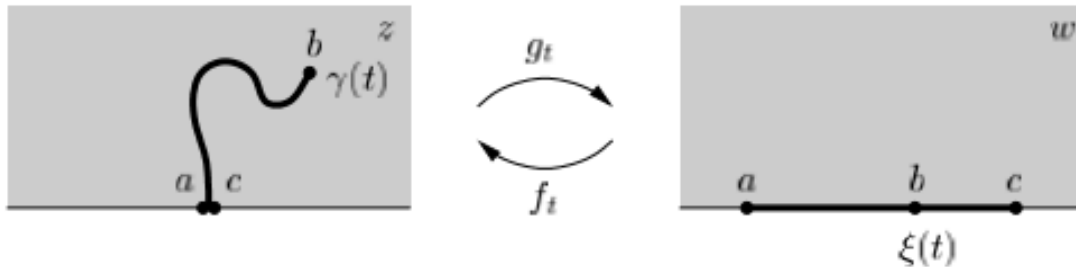


Рисунок 1.1

Конформные отображения  $g_t$  удовлетворяют дифференциальному уравнению, которым является уравнение Левнера:

$$\frac{\partial g(t, z)}{\partial t} = \frac{2}{g(t, z) - \xi(t)}, \quad g(0, z) = z, \quad (1.2)$$

для всех  $z$  в  $\mathbb{H}$ . Здесь значение  $\xi$  в момент времени  $t$  - это прообраз точки  $\gamma(t)$  при отображении  $g_t$ . Будем называть  $\xi(t)$  управляющей функцией уравнения Левнера. Она непрерывна и вещественнозначна.

Уравнение Левнера (1.2) имеет решение для любой заданной непрерывной вещественной функции  $\xi(t)$ . Оно порождает функцию  $g_t(z)$ . Для каждого значения  $t$  функцию можно представить в виде отображения вида  $w = g_t(z)$ , которая отображает некоторое связное подмножество верхней  $z$ -полуплоскости,  $\mathbb{R}$ , на всю область  $\mathbb{H}$   $w$ -плоскости. Соответственно, существует обратная функция  $f_t(w)$ , которая подчиняется следующему условию  $g_t(f_t(w)) = w$  для всех  $w$  в верхней полуплоскости. Эта функция отображает область  $\mathbb{H}$   $w$ -плоскости в область  $\mathbb{R}$   $z$ -плоскости. Она подчиняется дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial f(w)}{\partial t} = -\frac{2}{w - \xi(t)} \frac{\partial f(w)}{\partial w} \quad (1.3)$$

Уравнение Левнера постоянно порождает новые сингулярные точки  $g_t$ , которые отображаются с помощью нее на соответствующие точки  $\xi(t)$  в  $w$ -плоскости. Таким образом, с течением времени точки постоянно удаляются из  $\mathbb{R}$ . Если  $\xi(t)$  достаточно гладкая, то эти сингулярные точки образуют простую кривую  $z_c(t)$ , где точки этой кривой подчиняются:

$$g_t(z_c(t)) = \xi(t). \quad (1.4)$$

Эта кривая называется следом Левнера, но также ее можно назвать линией сингулярностей. Также, если принять управляющую функцию  $\xi(t)$ , соответствующую данной кривой  $\gamma(t)$ , то  $z_c(t)$  будет совпадать с  $\gamma(t)$ .

**Определение 1.1.** Говорим, что функция  $\lambda : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  обладает  $1/2$ -липшицевой нормой меньше или равной  $c$ , если  $\exists \delta \in (0, 1)$  такое, что

$$|\lambda(t) - \lambda(t')| < c\sqrt{t' - t}, \quad \forall 0 \leq t < t' < T, \quad |t - t'| < \delta(T - t).$$

**Теорема 1.1 (LMR).** Пусть  $\lambda$  локально равно  $1/2$ -липшицевой нормой  $C < 4$  на  $[0, T]$ , тогда

1. Если

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \frac{\lambda(T) - \lambda(t)}{\sqrt{T - t}} = k < 4$$

тогда процесс описывается простой кривой  $\gamma : [0, T] \rightarrow \overline{\mathbb{H}}$ , где  $\gamma(T) \in \mathbb{H}$ .

2. Если

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \frac{\lambda(T) - \lambda(t)}{\sqrt{T - t}} = k > 4$$

тогда процесс описывается кривой  $\gamma : [0, T] \rightarrow \overline{\mathbb{H}}$ , где  $\gamma(T) \in \mathbb{R}$  либо  $\gamma(T) \in \gamma([0, T))$ .

**Теорема 1.2.** Пусть  $\lambda : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  - непрерывная функция, так что этот процесс описывается кривой  $\gamma$ . При  $t > 0$  определим

$$a(t) = \lim_{s \rightarrow t^-} \frac{|\lambda(t) - \lambda(s)|}{\sqrt{t - s}}, \quad b(t) = \overline{\lim}_{s \rightarrow t^-} \frac{|\lambda(t) - \lambda(s)|}{\sqrt{t - s}}.$$

Если  $b(t) < f(a(t)), \forall t \in (0, T]$ , то

$$f(a) = \begin{cases} 4, & 2 \leq a < 4 \\ a + \frac{4}{a}, & 0 < a < 2 \\ +\infty, & a = 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

тогда кривая  $\gamma$  проста, а  $f(a(t))$  - оптимальная граница  $b(t)$ .

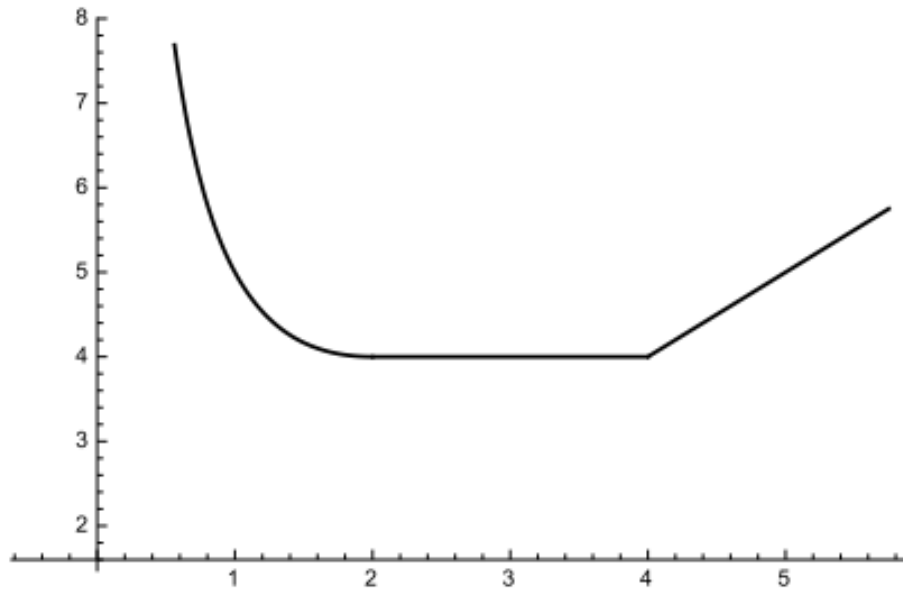


Рисунок 1.2 — график функции  $f$

Эта теорема является обобщением теоремы LMR, где рассматривается только случай  $a(t) = b(t) < 4$ .

**Теорема 2.1.** Существует  $\sigma > 0$  такое, что, когда  $\lambda : [0, T] \rightarrow \mathbb{C}$  имеет  $1/2$ -липшицеву норму, меньшую, чем  $\sigma$ , тогда  $L_t = \gamma[-t, t]$  для квазидуги  $\gamma : [-T, T] \rightarrow \mathbb{C}$ . Более того,

$$\gamma(t) = \lim_{y \rightarrow 0^+} g_t^{-1}(\lambda(t) + iy), \quad \gamma(-t) = \lim_{y \rightarrow 0^-} g_t^{-1}(\lambda(t) + iy). \quad (2.1)$$

Оптимальное значение  $\sigma$  в этой теореме неизвестно. Работа Трана показывает, что  $\sigma \geq 1/3$  и также знаем, что  $\sigma \leq 4$  из действительного случая. Это предполагает следующее вопрос:

Соответствует ли  $\sigma = 4$  оптимальной норме в случае действительной управляющей функции?

Ответом на этот вопрос является "нет" и  $\sigma < 3.723$ . Это достигается путем детального изучения халлов, сгенерированных с  $c\sqrt{1-t}$  для  $c \in \mathbb{C}$ , что расширяет действительный случай.

**Теорема 2.2.** Пусть  $c \in \mathbb{C} \setminus \{\pm 4\}$ , и пусть  $\lambda(t) = c\sqrt{1-t}$  - управляющая функция Левнера, и определим

$$\alpha = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{c}{\sqrt{c^2 - 16}} \right].$$

1. Когда значение  $Re(\alpha) > 0$ , левый халл  $L_t$  представляет собой простую кривую для всех значений  $t \leq 1$  (определяется как в 2.1). При  $c \notin i\mathbb{R}$  кривая бесконечно закручивается вокруг двух своих конечных точек  $\gamma(1)$ ,  $\gamma(-1)$  при  $t \rightarrow 1$ .

2. Когда значение  $Re(\alpha) < 0$ , левый халл  $L_t$  представляет собой простую кривую для всех значений  $t < 1$  (определяется как в 2.1), но  $L_1$  состоит из простой замкнутой кривой и ее внутренней части.

3. Когда значение  $Re(\alpha) = 0$ , наступает момент времени  $t_c < 1$ , так что левый халл  $L_t$  является простой кривой для  $t < t_c$  (определяется как в 2.1),  $L_t$  является непростой кривой для  $t_c \leq t < 1$ , а  $L_1$  состоит из кривой и ее внутренней части.

**Теорема 2.3.** Пусть  $c \in \mathbb{C} \setminus \{\pm 4i\}$ ,  $\tau \geq 0$ ,  $\lambda(t) = c\sqrt{\tau + t}$  - управляющая функция Левнера, и определим

$$\delta = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{c}{\sqrt{c^2 + 16}} \right].$$

1. Когда  $\tau = 0$  и  $Re(\delta) > 0$ , левый халл  $L_t$  представляет собой объединение двух отрезков прямой, исходящих из начала координат.
2. Когда  $\tau = 0$  и  $Re(\delta) \leq 0$ , левый халл  $L_t$  представляет собой один отрезок прямой, исходящий из начала координат.
3. Когда  $\tau > 0$  и  $Re(\delta) \neq 0$ , левый халл  $L_t$  представляет собой простую кривую (определенную как в 2.1).
4. Когда  $\tau > 0$  и  $Re(\delta) = 0$ , при достаточно большом  $t$  левый халл  $L_t$  представляет собой непростую кривую.

Четвертый случай представляет собой еще одно интересное различие между комплексным управлением и действительным управлением.

### Свойства уравнения Левнера

1. Если  $a \in \mathbb{C}$ , то

$$L_{t,\lambda+a} = a + L_{t,\lambda} \quad R_{t,\lambda+a} = a + R_{t,\lambda}.$$

2. Свойство масштабирования: Если значение  $a > 0$ , то

$$L_{t,a\lambda(\cdot/a^2)} = aL_{t/a^2,\lambda} \quad R_{t,a\lambda(\cdot/a^2)} = aR_{t/a^2,\lambda}$$

где обозначение  $\lambda(\cdot/a^2)$  указывает на отображение  $s \rightarrow \lambda(s/a^2)$ .

3. Свойство отражения: Пусть  $Ref_{\mathbb{R}}(K)$  - отражение множества  $K$  от действительной оси, а  $Ref_{i\mathbb{R}}(K)$  - отражение от мнимой оси. Затем

$$L_{t,\bar{\lambda}} = Ref_{\mathbb{R}}(L_{t,\lambda}), \quad L_{t,-\bar{\lambda}} = Ref_{i\mathbb{R}}(L_{t,\lambda}), \quad L_{t,\lambda} = -L_{t,\lambda}.$$

(Можно обратить внимание, что третье свойство является следствием первых двух.) Те же три свойства справедливы и для правого халла.

4. Свойство объединения:

$$L_{t+s,\lambda} = L_{t,\lambda} \cup g_t^{-1}(L_{s,\lambda(t+\cdot)} \setminus R_{t,\lambda}) \quad g_t(L_{t+s,\lambda} \setminus L_{t,\lambda}) = L_{s,\lambda(t+\cdot)} \setminus R_{t,\lambda}.$$

5. Свойство двойственности:

$$L_{t,\lambda} = iR_{t,-i\lambda(t-\cdot)} \quad R_{t,\lambda} = iL_{t,-i\lambda(t-\cdot)}.$$

**Утверждение 2.1.** Пусть  $c \in \mathbb{R}$ .

1. Когда  $|c| < 4$ , левый халл  $L_t$  движется по  $c\sqrt{1-t}$  - это простая кривая  $\gamma[-t, t]$  для всех  $t \leq 1$ . При  $t \rightarrow 1$  кривая бесконечно закручивается вокруг двух своих конечных точек.

2. Когда  $|c| \geq 4$ , левый халл  $L_t$  движется по  $c\sqrt{1-t}$  - это простая кривая для  $t < 1$ , но  $L_1$  состоит из простой замкнутой кривой и ее внутренней части.

3. Левый халл  $L_t$ , управляемый  $c\sqrt{t}$  - это объединение двух отрезков прямой, исходящих из начала координат.

**Лемма 2.1.** Для  $c \in \mathbb{C} \setminus \{\pm 4\}$ , пусть  $\lambda(t) = c\sqrt{1-t}$  управляющая функция. Затем для  $t \in [0, 1]$ , решение  $g_t(z)$  из 1.2 удовлетворяет

$$\alpha \ln(g_t(z) - A\sqrt{1-t}) + \beta \ln(g_t(z) - B\sqrt{1-t}) = \alpha \ln(z - A) + \beta \ln(z - B),$$

и  $z_t \in L_t \setminus \bigcup_{s \in [0, t)} L_s$  удовлетворяет

$$\alpha \ln B + \beta \ln A + \ln \sqrt{1-t} = \alpha \ln(z_t - A) + \beta \ln(z_t - B), \quad (2.2)$$

где

$$A = \frac{1}{2}[c + \sqrt{c^2 - 16}], \quad B = \frac{1}{2}[c - \sqrt{c^2 - 16}],$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{c}{\sqrt{c^2 - 16}} \right], \quad \beta = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{c}{\sqrt{c^2 - 16}} \right].$$

Из-за свойства отражения, можно ограничить  $c$  с помощью  $Arg(c) \in [0, \frac{\pi}{2}]$ . В соответствии с этим ограничением рассмотрим возможные значения для наших параметров  $A$ ,  $B$ ,  $\alpha$  и  $\beta$ .



**Лемма 2.2.** Пусть  $c \in \mathbb{C} \setminus \{\pm 4\}$  с  $Arg(c) \in [0, \frac{\pi}{2}]$ . Тогда параметры  $A$ ,  $B$ ,  $\alpha$  и  $\beta$ , определенные в лемме 2.1, удовлетворяют

$$A \in \{z : Re(z) \geq 0, Im(z) \geq 0, |z| \geq 2\},$$

$$B \in \{z : Re(z) \geq 0, Im(z) \leq 0, |z| \leq 2\},$$

$$\alpha \in \{z : Re(z) \leq \frac{1}{2}, Im(z) \geq 0\},$$

$$\beta \in \{z : Re(z) \geq \frac{1}{2}, Im(z) \leq 0\}.$$

Более того, если  $Arg(c) \in (0, \frac{\pi}{2})$ , то параметры будут находиться внутри заданных областей.

**Утверждение 2.2.** Пусть  $c \in \mathbb{C}$ ,

$$\alpha = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{c}{\sqrt{c^2 - 16}} \right], \quad \lambda(t) = c\sqrt{1-t}$$

и пусть  $s \in (0, 1)$ .

1. При повторном расчете  $Re(\alpha) \neq 0$  левый халл  $L_s$ , генерируемая  $\lambda|_{[0,s]}$ , представляет собой простую кривую. В частности,  $L_s = \gamma[-s, s]$  для простой кривой  $\gamma : [-s, s] \rightarrow \mathbb{C}$  с

$$\gamma(t) = \lim_{y \rightarrow 0^+} g_t^{-1}(\lambda(t) + iy), \quad \gamma(-t) = \lim_{y \rightarrow 0^-} g_t^{-1}(\lambda(t) + iy).$$

2. Когда  $Re(\alpha) = 0$  и  $Arg(c) \in (0, \frac{\pi}{2})$ , левый халл  $L_s$ , генерируемая  $\lambda|_{[0,s]}$ , может быть разложена на два набора, верхний левый халл  $L_s$  и нижний левый халл  $L_s^+ \cap L_s^- = \{c\}$ . Нижний левый халл представляет собой простую кривую с  $L_s^- = \gamma[-s, 0]$  для  $\gamma$ , определенного в пункте 1.

В доказательстве понадобятся следующие две леммы.

**Лемма 2.3.** Пусть  $c \in \mathbb{C}$  с  $Arg(c) \in (0, \frac{\pi}{2}]$ , и пусть  $\lambda(t) = c\sqrt{1-t}$ . Если существует некоторое время  $\tau \in [0, T_z \wedge 1)$  с

$$Im g_\tau(z) \geq Im \lambda(\tau),$$

затем получаем  $Im\ g_t(z) \geq Im\ \lambda(t)$  для всех  $t \in [\tau, T_z \wedge 1)$ .

**Лемма 2.4.** Пусть  $\lambda(t)$  - управляющая функция на замкнутом интервале  $[0, T]$ . Определим вертикальную полосу  $V_\lambda$  и горизонтальную полосу  $H_\lambda$  с помощью

$$V_\lambda = \{z \in \mathbb{C} : \min_{t \in [0, T]} Re\ \lambda(t) \leq Re(z) \leq \max_{t \in [0, T]} Re\ \lambda(t)\},$$

$$H_\lambda = \{z \in \mathbb{C} : \min_{t \in [0, T]} Im\ \lambda(t) \leq Im(z) \leq \max_{t \in [0, T]} Im\ \lambda(t)\}.$$

Тогда

$$L_{T, \lambda} \subset V_\lambda, \ R_{T, \lambda} \subset H_\lambda.$$

**Утверждение 2.3.** Пусть  $c \in \mathbb{C}$  с  $Arg(c) \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $\lambda(t) = c\sqrt{1-t}$  и пусть  $\gamma$  определяется также, как и в утверждении 2.2.

1. Когда значение  $Re(\alpha) > 0$ , кривая  $\gamma(t)$  приближается к  $A$  при  $t \rightarrow 1$ , а когда значение  $Re(\alpha) < 0$ , кривая  $\gamma(t)$  приближается к  $B$  при  $t \rightarrow 1$ .

2. При  $t \rightarrow 1$  кривая  $\gamma(-t)$  приближается к  $B$ .

Более того, когда  $Arg(c) \in (0, \frac{\pi}{2})$ , то  $\gamma(t), \gamma(-t)$  приближаются к своим предельным точкам по бесконечной спирали.

Сначала покажем, что пределы  $\gamma(t), \gamma(-t)$  четко определены по мере приближения  $t$  к 1.

**Лемма 2.5.** Пусть  $c \in \mathbb{C}$ ,  $\lambda(t) = c\sqrt{1-t}$  и пусть  $\gamma = \gamma_c$  определяется также, как и в утверждении 2.2.

1. Когда  $Re(\alpha) \neq 0$ , то существует ограничение  $\lim_{t \nearrow 1} \gamma_c(t)$ , которое непрерывно в  $c$ .

2. Если  $Re(\alpha) \neq 0$  или если  $Arg(c) \in (0, \frac{\pi}{2})$ , то  $\lim_{t \nearrow 1} \gamma_c(-t)$  существует и непрерывен в  $c$ .

**Теорема 2.4.** Если  $h : \mathbb{D} \times E$  - голоморфное движение, то  $h$  имеет продолжение на  $H : \mathbb{D} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , так что  $H$  - голоморфное движение  $\mathbb{C}$ , каждое отображение  $w \rightarrow H(\zeta, w)$  квазисимметрично, а  $H$  является совместно непрерывным в  $(\zeta, w)$ .

## Компьютерная реализация изображения халлов

В качестве иллюстрации примера построим изображения левого и правого халлов для случая, когда  $\lambda(t) = 3\sqrt{2}\sqrt{1-t}$  для  $t \in [0, 1]$ , используя программные средства языка *Python*.

### Решение

Вычисляем, что  $L_1$  - это замкнутая окружность радиуса  $\sqrt{2}$  с центром в точке  $2\sqrt{2}$ ,  $R_1$  - действительный интервал  $[0, 4\sqrt{2})$  и конформное отображение

$$g_1 : \mathbb{C} \setminus L_1 \rightarrow \mathbb{C} \setminus R_1, \quad g_1(z) = z + \frac{2}{z - 2\sqrt{2}}.$$

Управляющая функция  $\lambda(t + \cdot)$  со сдвигом по времени задается:

$$s \rightarrow \lambda(t + s) = 3\sqrt{2}\sqrt{1 - (t + s)} = \sqrt{1 - t} \cdot 3\sqrt{2}\sqrt{1 - \frac{s}{1 - t}}.$$

**Заключение.** В бакалаврской работе было рассмотрено следующее: хордовое уравнение Левнера с комплекснозначным управлением, более подробно были изучены различия между вещественнозначным и комплекснозначным управлениями, доказаны свойства левых и правых халлов для этого уравнения, также была сделана задача на построение рисунков халлов с управлением  $\lambda(t) = 3\sqrt{2}\sqrt{1-t}$  для  $t \in [0, 1]$  с помощью программных средств *Python*.