МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра Математического анализа

Оператор Лапласа и нули некоторых классов аналитических функций в круге.

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студента 4 курса 421 группы

Направления 02.03.01 «Математика и компьютерные науки»

механико-математического факультета

Светловой Ксении Алексеевны

Научный руководитель
профессор, д.ф.-м.н., профессор ______________ Ф. А. Шамоян
подпись, дата

Заведующей кафедрой
и. о. зав. кафедрой, ______________ Е.В. Разумовская
к.ф.-м.н., доцент
подпись, дата

Саратов 2025

Введение. Аналитические функции играют ключевую роль в комплексном анализе и имеют широкий спектр приложений в различных областях математики и физики. Одним из важных инструментов анализа таких функций является оператор Лапласа, который используется для исследования свойств функций и решения уравнений, связанных с дифференциальными операторами.

Оператор Лапласа получил своё название в честь Пьера-Симона де Лапласа, французского математика и астронома XVIII—XIX веков. Он впервые применил этот дифференциальный оператор в исследовании проблем небесной механики, способствуя развитию теорий гравитации и движения планет, имеет свои корни в физической теории диффузии при математическом моделировании равновесных состояний. С тех пор лапласиан стал фундаментальным инструментом в математическом анализе и физике.

Обозначение для оператора ввёл английский физик и математик Р. Мёрфи в 1833 году. Некоторые области применения оператора Лапласа:

1)Электростатика и электродинамика

2)Механика сплошных сред

3)Теплопроводность и диффузия

4)Обратные спектральные задачи

Оператор Лапласа дает возможность исследовать, как функции изменяются в пространстве или времени. Это играет ключевую роль при анализе гармонических колебаний, электромагнитных полей и различных физических процессов.

В настоящее время теория гармонических функций обширна и имеет важное значение как в комплексном анализе, так и в математической физике. Исследование нулей функций является важной задачей, которая помогает глубже понять структуру и свойства этих функций. Особое внимание уделяется изучению нулей в контексте круга, поскольку эта область является самой простой и удобной для применения методов комплексного анализа.

Цели и задачи работы. Целью данной работы заключается в исследовании оператора Лапласа. Средствами комплексного дифференцирования вывести основные свойства, рассмотреть, как оператор Лапласа воздействует на классические функции, особенно в контексте их нулей. Для достижения данной цели были сформированы и решены следующие задачи.

1. Изучить анилитические функции их определение, рассмотреть систему Коши-Римана.

2. Рассмотреть вывод оператора Лапласа в двумерной комплексной плоскости через вторые частные производные по действительной и мнимой переменным.

3. Вывести вторую формулу Грина.

4. Рассмотреть весовые L^p - классы аналитических и гармонических функций в круге.

5. Изучить классическую теорему Морера.

6. Доказать аналог теоремы Морера для гармонических функций.

7. Рассмотреть представление финитных функций в круге посредствам логарифмического потенциала и аналитических функций.

Содержание работы. Работа состоит из введения, четырех глав, списка литературы, содержащего 20 наименований. Объем работы составляет 43 страниц.

В первой главе введены ключевые определения и сформированы главные теоремы, которые будут использоваться в дальнейшем.

Во второй главе рассмотрены весовые L^p - классы аналитических и гармонических функций в круге.

В третей главе изучена классическая теорема Морера для гармонических функций. Она является важным результатом в математическом анализе, так как применяется в изучении аналитических функций, решений дифференциальных уравнений, функционального анализа и даже в некоторых прикладных задачах, связанных с физикой и инженерией. Самостоятельно доказан аналог теоремы Морера для гармонических функций.

В четвертой главе рассмотрено представление финитных функций в круге посредствам логарифмического потенциала и аналитических функций. Логарифмический потенциал помогает описать поведение функций с компактным носителем внутри круга через гармонические и аналитические компоненты, что является основой для представления и приближённого описания таких функций в круге.

Основное содержание работы.

Определение 1.1 Функция $f(z)$ назвается аналитической (регулярной), в точке z_0, если в некоторой окрестности точки z_0 существует производная $f'(z)$.

Определение 1.2 Область G называется односвязной, если она удовлетворяет следующему условию: какую бы замкнутую непрерывную кривую в этой области мы не взяли, часть плоскости, внутренняя по отношению кривой, также принадлежит этой области.

Определение 1.3 Нуль аналитичской функции $f(z)$ есть такое значение z, что $f(z) = 0$. Если функция $f(z)$ аналитична в окрестности точки $z = a$, то при достаточно малых значениях $|z - a|$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n,$$

и $z = a$ есть нуль тогда и только тогда, когда $a_0 = 0$.

Существует три эквивалентных определения регулярных(аналитических) функций:

1.Первое определение аналитических функций в точке по Риману: функция $f(z)$ назвается аналитична в z_0, если существует некоторый круг $K_\delta(z_0) = z : |z - z_0| < \delta$, где существует производная $f^{(1)}(z)$ для любого $z \in K_\delta(z)$. [?]

2. Второй определение аналитической функции - Карла Вейрштрасса. Функция $f(z)$ регулярна в точке z_0, если функция $f(z)$ представима в виде ряда Тейлора:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$

3. Можно ввести понятие аналитической функции также по Морера: пусть G односвязная область. $f(z) \in C(G)$ и для любого замкнутого кусночно гладкого контура $\gamma \subset G$

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

Тогда $f(z)$ является аналитчсекой функцией.

Определение 1.4 Функция $f(z)$ имеет предел A при $z \to a$, если $\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta > 0$, что $|f(z) - A| < \epsilon$ при всех $z \in O_\delta(a)$, т.е. при $0 < |z - a| < \delta$

$$\lim_{z \to a} f(z) = A.$$

Определение 1.5 Функция $f(z)$ называется непрерывной в точке a, если

$$\lim_{z \to a} f(z) = f(a).$$

Определение 1.6 Если функция является аналитической в каждой точке некоторой области D, то она называется аналитической в области D.

Определение 1.7 Производная функции определяется как предел отношения приращений независимой и зависимой переменных, т.е.

$$f'(a) = \lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}.$$

Определение 1.8 Однозначная функция называется аналитической в данной точке, если она дифференцируема не только в данной точке, но и в некоторой ее окрестности.

Теорема 1.1 Для дифференцируемости функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ в точке $z = x + iy$ в комплексном смысле необходимо и достаточно,чтобы функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ были дифференцируемы в точке (x, y) и чтобы в этой точке выполнялись условия:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial v}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1.3}$$

Определение 1.9 Если f непрерывно дифференцируема, как функция двух вещественных переменных $u(x, y)$ и $v(x, y)$, где $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ в области G, то введем следующее обозначение:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}), \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}).$$

Теорема 1.2 Если в точке z существует

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z), \tag{1.4}$$

тогда

$$f'(z) = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{\partial f}{\partial z}$$

при этом $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

Теорема 1.3 Условие Коши-Римана (1.3) эквивалентно равенству

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0. \tag{1.9}$$

Определение 1.10. Функция двух вещественных переменных называется гармонической в области D, если она обладает следующими свойствами:

1) имеет непрерывные частные пороизводные 2-го порядка в области D.

2) удовлетворяет уравнению Лапаласа

Теорема 1.4 Если функция $f(z)$ является аналитической в некоторой области G и $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, тогда функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ являются гармоническими в G.

Вторая формула Грина.

$$\iint\limits_D (u\Delta v - v\Delta u)d\sigma = -\int\limits_\Gamma (u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n})ds, \tag{1.10}$$

где $u = u(x,y)$ и $v = v(x,y)$ - функции, дважды непрерывно дифференцируемые в некоторой области, содержащей замыкание $\bar{D}$ области D, $d\sigma$ - элемент площади, ds - элемент длины дуги. Эту формулу принято называть второй формулой Грина.

Определение 1.11 Функцией Грина области D называется функция $G(\zeta, z)$, определенная при $\zeta \in \bar{D}$, $z \in \bar{D}$, $\zeta \neq z$ и удовлетворяющая условиям:

1) при любом фиксированном $z \in D$

$$G(\zeta, z) = ln\frac{1}{|\zeta - z|} + h_z(\zeta),$$

где $h_z(\zeta)$ - функция, гармоническая в D и непрерывная в $\bar{D}$,

2) при $\zeta \in \Gamma$, $z \in \bar{D}$ и $\zeta \in \bar{D}$, $z \in \Gamma$ справедливо

$$G(\zeta, z) = 0$$

Функция Грина существует и единственна.

Теорема 1.5 Пусть D - односвязная область с кусочно-аналитической границей Γ и пусть $u(z)$ - функция, дважды непрерывно дифференцируема относительно переменных x, y и $z = x + iy$ в некоторой области, содержащей $\bar{D}$, исключая конечное множество точек $c_1, c_2, ..., c_q$ из $\bar{D}$, в окрестности каждой из которых она имеет вид

$$u(z) = d_k ln|z - c_k| + u_k(z),$$

где d_k - постоянная, $u_k(z)$ - функция, дважды непрерывно дифференцируема в окрестности точки $c_k (k = 1, ..., q)$. Тогда при $z \in D$, $z \neq c_1, ..., c_q$ справедливо соотношение

$$u(z) + \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{D} G(\zeta, z) \Delta u(\zeta) d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma} u(\zeta) \frac{\partial G}{\partial n} ds - \sum_{c_k \in D} d_k G(c_k, z).$$

Теорема 1.6 Пусть D - односвязная область с кусочно аналитической границей Γ, а $f(z) \not\equiv 0$ - функция мероморфная в $\bar{D}$. Справедлива формула

$$ln|f(z)| = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma} ln|f(\zeta)| u(\zeta) \frac{\partial G}{\partial n} ds - \sum_{a_m \in D} G(a_m, z) + \sum_{b_n \in D} G(b_n, z),$$

где a_m - нули функции, b_n - ее полюсы (слагаемые, отвечающие кратным нулям или полюсам, повторяются в правой части соответствующее число раз.)

Теорема 1.7 Пусть функция $f(z) \not\equiv 0$ мероморфна в круге $\{|z| \leq R\}$ и ее разложение Лорана в окрестности точки $z = 0$ имеет вид

$$f(z) = c_\lambda z^\lambda + c_{\lambda+1} z^{\lambda+1} + ..., \quad c_\lambda \neq 0.$$

Справедлива формула Иенсена

$$ln|c_\lambda| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ln|f(Re^{i\theta})|d\theta - \sum_{0<|a_m|<R} ln\frac{R}{|a_m|} + \sum_{0<|b_n|<R} ln\frac{R}{|b_n|} - \lambda lnR,$$

где a_m - нули функции $f(z)$, b_n - ее полюсы.

Интегральная формула Коши

Теорема 1.8 Пусть $f(z)$ аналитична в односвязной области G, а γ простая замкнутая кривая, лежащая в G. Тогда для любой точки z, лежащей внутри γ, справедлива формула:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{f(t)dt}{t-z}$$

Три приведённые ниже теоремы являются ключевыми для обоснования главных результатов дипломной работы.

Теорема 1.9 Пусть f непрерывно дифференцируема функция в G, Γ- его граница, тогда

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi}\iint\limits_G \frac{\partial f}{\partial\bar{\zeta}}\frac{d\zeta d\eta}{\zeta - z},$$

где $\zeta = \zeta + i\eta, z \in G$, при этом последний интеграл понимается в несобственном смысле.

Теорема 1.10 В условиях теоремы 1.1 и теоремы 1.2 справедливо следующее равенство

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\bar{\zeta} - \frac{1}{\pi}\iint\limits_G \frac{\partial f}{\partial\bar{\zeta}}\frac{d\zeta d\eta}{\zeta - z}$$

Теорема 1.11. Если $\Phi(z) = \iint\limits_G \frac{d\xi d\eta}{\xi - z}$, причем $f \in C(\bar{G})$, то существует $\frac{\partial\Phi(z)}{\partial\bar{z}}$ при этом

$$\frac{\partial\Phi(z)}{\partial\bar{z}} = f(z).$$

Лемма 2.1. Если $f \in A^p_\omega$, то

$$|f(z)| \le \frac{||f||_{A^p_\omega}}{(\omega(1-|z|))^{\frac{1}{p}}(1-|z|)^{\frac{2}{p}}}, \quad z \in D.$$

Теорема 2.1. Пусть $F \in W^1_1(D)$, где W^1_1 - класс Соболева в D. Если при этом существует такое число $s > 0$, что $|F(z)|(1-|z|)^s \to 0$ и $\left|\frac{\partial F(z)}{\partial \bar{z}}\right|(1-|z|)^s \to 0$ при $|z| \to 1-0$, то при всех $z \in D$ справедливо представление

$$F(z) = \frac{s+1}{\pi}\int\limits_D F(\zeta)\frac{(1-|\zeta|^2)^s dm_2(\zeta)}{(1-\bar{\zeta}z)^{s+2}} -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_D \frac{\partial F}{\partial \bar{\zeta}}(\xi)\Big(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar{\zeta}z}\Big)^{s+1}\frac{dm_2(\zeta)}{z-\zeta}, \tag{2.2}$$

где, как обычно, $\frac{\partial F}{\partial \bar{\zeta}} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial F}{\partial \xi} + i\frac{\partial F}{\partial \eta}\Big)$, $\frac{\partial F}{\partial \zeta} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial F}{\partial \xi} + i\frac{\partial F}{\partial \eta}\Big), \zeta = \xi + i\eta$.

Теорема 2.2 Если $f \in A^p_\alpha(D)$ и $0 < p < +\infty$, $\omega \in \Omega$. Тогда, если $f \in A^p_\omega, \alpha > \frac{1+\alpha_\omega}{p} + \frac{1}{p}$, то f - допускает представление

$$f(z) = \frac{\alpha+1}{\pi}\int\limits_D \frac{(1-|\zeta|^2)^\alpha f(\zeta) dm_2(\zeta)}{(1-\bar{\zeta}z)^{\alpha+2}}, z \in D \tag{2.3}$$

Теорема 2.3 Пространство A^p_ω при $1 \le p \le +\infty$ относительно нормы

$$||f||_{A^p_\omega} = \Big(\int\limits_0^1 \omega(1-r)\Big(\int\limits_T |f(r\zeta)|^p dm(\zeta)\Big)^1\Big)^{\frac{1}{p}}$$

является банаховым, а при $p < 1$ - квазибанаховым пространством.

Теорема 2.4 Пусть $u = Ref$, $f \in A^p_\alpha$, $\beta > \frac{\alpha+2}{p}$, тогда справедливо представление

$$u(z) = \frac{\alpha+1}{\pi}\int\limits_D E_\alpha(\zeta, z)u(\zeta)(1-|\zeta|^2)^\alpha dm_2(\zeta), \tag{2.9}$$

где $E_\alpha(\zeta, z) = \left(\frac{1}{(1-\bar{\zeta}z)^{\alpha+2}} + \frac{1}{(1-\zeta\bar{z})^{\alpha+2}} - 1\right)(1-|\zeta|^2)^\alpha$; $z \in D$;

$$f(z) = \frac{2(\alpha+1)}{\pi} \int\limits_D \frac{(1-|\zeta|^2)^\alpha u(\zeta) dm_2(\zeta)}{(1-|\zeta|^2)^{\alpha+2}} - \overline{f(0)}. \tag{2.10}$$

Теорема 3.1. Пусть $f(z) \in A$, где $A(G)$ -класс аналитических или регулярных функций в области G, а G - односвязная область, тогда

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta) d\zeta = F_0(z), \tag{3.1}$$

взятый по любому контуру $\gamma \in G$ является первообразной функцией $f(z)$, то есть:

$$F_0^{(1)}(z) = f(z).$$

Теорема 3.2. Пусть $f(z) \in C(G)$ и непрерывна в области G и для любого кусочно гладкого контура

$$\int_\gamma f(z) dz = 0, \tag{3.2}$$

тогда интеграл (3.1) не зависит от пути интегрирования, а функция $F_0(z)$ является первоброзной функции $f(z)$.

Теорема 3.3 (Морера) Пусть $f(z) \in C(G)$, где $C(G)$ - класс непрерывных функций, G - односвязная область и для любого замкнутого кусочно гладкого контура

$$\int_\gamma f(z) dz = 0,$$

тогда $f(z)$ регулярна в области G.

Теорема 3.4 (Аналог теоремы Морера для гармонических функций.) Пусть u дважды непрерывно дифференцируема в односвязной области G, тогда для того, чтобы u была гармноческой функцией в G, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int\limits_\Gamma \frac{\partial u}{\partial z} dz = 0$$

для любого замкнутого контура Γ.

Лемма 3.1 Если функция $u \in C(G)$, произвольная непрерывная функция, и для любого круга K в G выполняется условие:

$$\iint\limits_K u(z)dxdy = 0,$$

тогда $u(z) \equiv 0$.

Теорема 4.1 Пусть f в замкнутом круге $D \cup T = \{z : |z| \leq 1\}$, где $D = \{z : |z| < 1\}$, а $T = \{z : |z| = 1\}$ имеет непрерывные частные производные 2-го порядка, причем $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y})$, $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y})$, выполняется равенство

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \iint_D \frac{\partial^2 f(\zeta)}{\partial z \partial \bar{z}} \ln \frac{1}{|\zeta - z|} d\zeta d\eta,$$

где $\zeta = \zeta + i\eta$, $z = x + iy$.

Лемма 4.1 В условиях теоремы справедлива следующая формула Коши-Грина

$$\int_T f(z)dz = 2i \iint_D \frac{\partial f(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} d\zeta d\eta \tag{4.1}$$

Лемма 4.2 В соответствии с теоремой, выполняется следующее равенство:

$$\int_T \frac{\partial g}{\partial \zeta} d\zeta = 2i \iint_D \frac{\partial^2 g}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} d\zeta d\eta \tag{4.2}$$

Лемма 4.3 Пусть $0 < \epsilon < 1$,тогда в условиях теоремы справедливы представления

$$\int_{T_\epsilon} \frac{\partial}{\partial \zeta}(f(\zeta) ln \frac{1}{|\zeta - z|}) d\zeta = 2i \iint_{D_\epsilon} \frac{\partial^2}{\partial \bar{\zeta} \partial \zeta}(f(\zeta) ln \frac{1}{|\zeta - z|}) d\zeta d\eta,$$

где

$$T_\epsilon = T \cup C_\epsilon(z), \quad C_\epsilon|z| = \{\zeta : |\zeta - z| = \epsilon\}$$

$$D_\epsilon = D \backslash \{\zeta : |\zeta - z| < \epsilon\}.$$

Лемма 4.4 Справедливо равенство

$$\frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} \Big(f(\zeta) ln \frac{1}{|\zeta - z|} \Big) = ln \frac{1}{|\zeta - z|} \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} - \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial \zeta} \tag{4.8}$$

при всех $\zeta, z \in D\epsilon$.

Лемма 4.5 В условиях теоремы справедливы следующие равенства:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_T \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{\pi}\iint\limits_D \frac{\partial f}{\partial\overline{\zeta}}\frac{\partial\zeta\partial\eta}{\zeta - z}, \tag{4.13}$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_T \frac{f(\zeta)}{\overline{\zeta} - \overline{z}}d\overline{\zeta} - \frac{1}{\pi}\iint\limits_D \frac{\partial f}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta\partial\eta}{\overline{\zeta} - \overline{z}}, \tag{4.14}$$

где $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_T \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \equiv 0$ и $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_T \frac{f(\zeta)}{\overline{\zeta}} \equiv 0$.

Теорема 4.2 Пусть $f \in H(D)$ и $f(z_k) = 0$, тогда $\forall g \in C^{(2)}D$, то

$$\sum_{k=0}^{n} g(z_k) = \iint\limits_D \Delta g(z) ln|f(z)|dm_2(z),$$

где $dm_2(z) = dxdy$ и $g(z)$ - финитная функция.

В ходе дипломной работы написана программа для визуализации действия оператора Лапласа на функции.

Заключение. В рамках проделанной работы были решены следующие задачи: установлена связь между оператором Лапласа и распределением нулей аналитичских функций в области, доказан аналог теоремы Морера для гармонических функций, рассмотрено представление финитных функций в круге по средствам логарифмического потенциала и нулей аналитических функций.

Полученные результаты подтверждают важность оператора Лапласа в теории функций комплексного переменного и теории потенциала, а также показывают его применимость в анализе поведения аналитических функций внутри круга. Работа способствует лучшему пониманию взаимосвязи между дифференциальными уравнениями и комплексным анализом, что может быть полезно для дальнейших исследований и приложений в математике и физике.