

МИНОБРНАУКИРОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра математического анализа

**О факторизационном представлении некоторых классов
аналитических функций**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 421 группы

направления 02.03.01 Математика и компьютерные науки

механико-математического факультета

Жусуповой Айжан Бериккызы

Научный руководитель
д.ф.-м.н., профессор

подпись, дата

Ф.А.Шамоян

Заведующей кафедрой
и. о. зав. кафедрой,
к.ф.-м.н., доцент

подпись, дата

Е.В. Разумовская

Саратов 2025

Введение. Аналитические функции играют ключевую роль в теоретической и прикладной математике. Их свойства и поведение часто требуют глубокого анализа и изучения различных представлений. Одним из важных инструментов исследования таких функций является факторизационное представление, которое позволяет разложить их на более простые составные части. Это, в свою очередь, способствует более удобному и полному пониманию их структуры и характеристик.

Факторизация аналитических функций полезна не только в чисто математических задачах, но и в прикладных областях, таких как физика и инженерия. Например, в задачах, связанных с решением дифференциальных уравнений, нередко возникает необходимость в представлении функций в удобной для анализа форме. Такой подход делает возможным использование известных свойств и теорем для решения сложных задач.

Цель данной дипломной работы заключается в исследовании различных классов аналитических функций, изучении их факторизационных представлений и приложений в математическом анализе и прикладной математике. В работе будут рассмотрены ключевые примеры, методы и техники, применяемые для изучения факторизационного представления, что позволит выявить их преимущества и ограничения.

В последующих главах мы рассмотрим основные принципы факторизации, проанализируем конкретные примеры и сделаем выводы о перспективах дальнейших исследований в этой области.

Основное содержание работы.

Определение 1.3. Функция $f(z)$ однозначная и дифференцируемая в каждой точке области D называется аналитической (иначе, регулярной или голоморфной) в этой области. Функция $f(z)$ называется аналитической в конечной точке z , если она является аналитической в некоторой окрестности точки z . Точки плоскости z , в которых функция $f(z)$ не является аналитической, называются особыми точками этой функции.

Определение 1.4. Бесконечное произведение есть выражение вида:

$$(1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3)..... \quad (1)$$

содержащее бесконечно много сомножителей. Обозначим его через

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n), a_n \neq -1$$

Рассмотрим частичное произведение

$$p_n = \prod_{m=1}^n (1 + a_m)$$

Бесконечное произведение сходится, если p_n стремится к некоторому пределу, отличному от нуля, когда $n \rightarrow \infty$.

Рассмотрим 2 простых случая.

1) Если $a_n \geq 0$, то произведение $\prod(1 + a_n)$ и ряд $\sum a_n$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. Т.к p_n -неубывающая функция от n , то p_n стремится либо к конечному пределу, либо к положительно бесконечности. Далее,

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq (1 + a_1) \dots (1 + a_n) \leq e^{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \quad (2)$$

Левое неравенство становится очевидным, если раскрыть скобки; правое неравенство следует из того, что $1 + a \leq e^a$ при любом положительном a . Вместе эти неравенства показывают, что p_n и $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ ограничены или не ограничены одновременно.

Если $a_n \leq 0 \forall n$, то $a_n = -b_n$ и рассматриваем произведение $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - b_n)$.

2) Если $b_n \geq 0, b_n \neq 1 \forall n$ и ряд $\sum b_n$ сходится, то произведение $\prod(1 - b_n)$ сходится.

Доказательство. Из сходимости ряда следует существование столь большого N , что

$b_N + b_{N+1} + \dots < \frac{1}{2}$ и, в частности, $b_n < 1$ при $n \geq N$. Очевидно,

$$(1 - b_N)(1 - b_{N+1}) \geq 1 - b_N - b_{N+1},$$

$$(1 - b_N)(1 - b_{N+1})(1 - b_{N+2}) \geq (1 - b_N - b_{N+1})(1 - b_{N+2}) \geq 1 - b_N - b_{N+1} - b_{N+2},$$

и вообще

$$(1 - b_N)(1 - b_{N+1}) \dots (1 - b_n) \geq 1 - b_N - \dots - b_n > \frac{1}{2}.$$

Таким образом, отношение $\frac{p_n}{p_{N-1}}$ монотонно убывает при $n > N$ и имеет положительную нижнюю грань. Следовательно, оно стремится к положительному пределу. Поскольку $p_{N-1} \neq 0$.

Если $0 \leq b_n < 1 \forall n$, но ряд $\sum b_n$ расходится, то произведение $\prod(1 - b_n)$

расходится к нулю. Таким образом, если $0 \leq b_n < 1$, то произведение $\prod(1 - b_n)$ и ряд $\sum b_n$ сходятся или расходятся одновременно.

Определение 1.6. Бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n(z))$, где сомножители-функции переменного z , вещественного или комплексного называется равномерно сходящимся в некоторой области значений z , если частичное произведение

$$p_n(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n(z))$$

равномерно сходится в этой области к некоторому пределу нигде не равному нулю.

Теорема 1.1. Произведение $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n(z))$ равномерно сходится в каждой области, в которой ряд $\sum |u_n(z)|$ равномерно сходится к ограниченной функции.

Определение 1.8. Если $0 < |z_n| < 1$, $n = 1, 2, 3, \dots$, и бесконечное произведение

$$\prod_1^{\infty} \frac{|z_n|}{z_n} \frac{z_n - z}{1 - z_n z} \quad (3)$$

сходится для $|z| < 1$, то оно представляет некоторую функцию, аналитическую в единичном круге; она называется **произведением Бляшке**. Можно даже допустить равенство конечного числа чисел z_n нулю-просто в этом случае множители, соответствующие $\frac{|z_n|}{z_n} \frac{z_n - z}{1 - z_n z}$, заменяются на z .

Определение 1.9. Классом Харди H^p ($p > 0$), называют множество всех функции f , аналитических в единичном круге D и таких, что

$$\sup_{0 \leq r < 1} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta < \infty \quad (4)$$

Определение 1.10. Обозначим через N -класс Неванлинны, аналитических функций f в D , для которых выполняется

$$N(f) = \sup_{0 \leq r < 1} \int_{-\pi}^{\pi} \ln^+ |f(re^{i\theta})|^p d\theta < \infty, \quad (5)$$

где $\ln^+ a = \max\{\ln a, 0\}$

Теорема 1.2. (Теорема о среднем для гармонической и аналитической функ-

ции.)

Пусть функция $f(z)$ дифференцирована в круге $K: |z - z_0| < R$ и непрерывна в замкнутом круге $\overline{K}$. Тогда значение этой функции в центре круга равно среднему арифметическому её значений на окружности, т.е:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\phi}) d\phi \quad (6)$$

Теорема 1.3. (теорема единственности.) Пусть функция $f(z)$ аналитическая и однозначная в области D и обращается в ноль на последовательности точек $z_1, z_2, \dots, z_n, z_n \in D, z_n \rightarrow z_0$ при $n \rightarrow \infty, z_0 \in D$. Тогда $f(z) \equiv 0$.

Равенство Йенсена. Пусть $u(z) = u(r, \theta)$ — однозначная функция, гармоническая в круге $r < R \leq \infty$, за исключением, быть может, логарифмических полюсов. Обозначим логарифмические полюсы, отличные от нуля, через $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n, \dots$, располагая их в порядке неубывающих модулей, и пусть $\mu_j \ln|z - \zeta_j|$ — главная часть, соответствующая ζ_j . Введем еще главную часть $\mu_0 \ln|z|$, соответствующая в точке $z=0$, полагая $\mu_0 = 0$ в случае когда, когда эта точка, на самом деле, не является логарифмическим полюсом для $u(z)$.

Рассмотрим дробно-линейную функцию

$$l_\zeta(z) = \rho^2 \frac{z - \zeta}{\rho^2 - \bar{\zeta}z} \quad (7)$$

, где $|\zeta| < \rho < R$. Эта функция конформно отображает круг $|z| \leq \rho$ сам на себя так, что точка ζ переходит в центр круга.

Так как $l_\zeta(z)$ -функция, аналитическая в круге $|z| < \frac{\rho^2}{|\zeta|}$, имеет в круге единственный простой нуль в точке $z = \zeta$ и модуль ее равен ρ во всех точках окружности $|z| = \rho$, то $u_\zeta(z) = \ln\left[\frac{1}{\rho} |l_\zeta(z)|\right]$ есть функция, гармоническая при $|z| < \frac{\rho^2}{|\zeta|}$, $z \neq \zeta$, имеющая логарифмический полюс в точке $z = \zeta$ с главной частью $\ln|z - \zeta|$ и обращающаяся в нуль на окружности $|z| = \rho$. Если точки $0, \zeta_1, \dots, \zeta_{\nu(\rho)}$ из числа логарифмических полюсов функции $u(z)$ лежат внутри этой окружности, а остальные-вне ее, то функция

$$\nu(z) = u(z) - \sum_{R=0}^{\nu(\rho)} \mu_R u_{\zeta_R}(z) = u(z) - \sum_{R=0}^{\nu(\rho)} \mu_R \ln \left| \frac{\rho(z - \zeta_R)}{\rho^2 - \bar{\zeta}_R z} \right| \quad (8)$$

является гармонической во всех точках некоторого круга, радиуса большего, чем ρ , причем на окружности $|z| = \rho$ она совпадает с функцией $u(z)$. Поэтому для всех $|z| = r < \rho$ имеем:

$$\nu(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \nu(\rho, \alpha) \frac{\rho^2 - r^2}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\theta - \alpha)} d\alpha \quad (9)$$

или

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \nu(\rho, \alpha) \frac{\rho^2 - r^2}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\theta - \alpha)} d\alpha = u(r, \theta) - \sum_{R=0}^{\nu(\rho)} \mu_R \ln \left| \frac{\rho(z - \zeta_R)}{\rho^2 - \overline{\zeta_R} z} \right| \quad (10)$$

Это и есть искомая формула. Она называется формулой **Пуассона-Йенсена**.

Критерий сходимости произведения Бляшке. Бесконечное произведение

$$\prod_1^{\infty} \frac{|z_n|}{z_n} \frac{z_n - z}{1 - \overline{z_n} z} \quad (11)$$

сходится тогда и только тогда, когда

$$\sum_n (1 - |z_n|) < \infty. \quad (12)$$

Доказательство. Имеем

$$\frac{|z_n|}{z_n} \frac{z_n - z}{1 - \overline{z_n} z} = |z_n| \frac{1 - (z/z_n)}{1 - \overline{z_n} z} = |z_n| + \frac{\overline{z_n} - (1/z_n)|z_n|z}{1 - \overline{z_n} z} = |z_n| + \frac{|z_n|^2 - 1}{1 - \overline{z_n} z} \frac{|z_n|z}{z_n} \quad (13)$$

откуда

$$\frac{|z_n|}{z_n} \frac{z_n - z}{1 - \overline{z_n} z} = 1 + (|z_n| - 1) \left(1 + \frac{(|z_n| + 1)|z_n|}{z_n(1 - \overline{z_n} z)} z \right); \quad (14)$$

следовательно, рассматриваемое бесконечное произведение сходится при $z=0$ тогда и только тогда, когда $\sum_n (1 - |z_n|) < \infty$. Но если $\sum_n (1 - |z_n|) < \infty$ по той же только что найденной формуле

$$\sum_n \left| 1 - \frac{|z_n|}{z_n} \frac{z_n - z}{1 - \overline{z_n} z} \right| = \sum_n \left[1 - |z_n| \right] \left| 1 + \frac{(|z_n| + 1)|z_n|}{z_n(1 - \overline{z_n} z)} z \right| < \infty \quad (15)$$

при $|z| < 1$; поэтому бесконечное произведение сходится в $|z| < 1$, если $\sum_n (1 - |z_n|) < \infty$. Таким образом $\prod_1^\infty \frac{|z_n|}{z_n} \frac{z_n - z}{1 - \bar{z}_n z}$ сходится в $|z| < 1$ тогда и только тогда, когда $\sum_n (1 - |z_n|) < \infty$.

По теор 1.1 бесконечное произведение сходится. Докажем обратное, если произведение 11 сходится, то ряд 13 тоже сходится. Действительно, если бесконечное произведение сходится, то модуль

$$|B(0)| = \prod_1^\infty \frac{|z_n|}{z_n} \frac{z_n - 0}{1 - \bar{z}_n 0} = \prod_1^\infty |z_n|, \quad (16)$$

т.е. $|B(0)| = M$, $0 < M < +\infty$.

Следовательно,

$$\sum_{n=1}^\infty \ln |z_n| \leq \sum_{n=1}^\infty \ln M \quad (17)$$

По теореме 1.1:

$$\sum_{n=1}^\infty \ln \frac{1}{|z_n|} < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^\infty (1 - |z_n|) < +\infty \quad (18)$$

Теорема 3.1. Бесконечное произведение $\prod_1^\infty \frac{|z_n|}{z_n} \frac{z_n - z}{1 - \bar{z}_n z}$ является аналитической и ограниченной в круге функцией в том и только в том случае, когда

$$\sum_{k=1}^\infty (1 - |z_k|) < \infty \quad (19)$$

Пример. Доказать $H^P \subset N$ исходя из неравенства $\ln(x) \leq \frac{|x|^p}{p}$

Доказательство. 1) Сначала докажем, что $\ln(x) \leq \frac{|x|^p}{p}$, при $x \geq 0$.

Пусть $F(x) = \ln(x) - \frac{x^p}{p}$.

Тогда производная будет равна $F'(x) = \frac{1}{x} - x^{p-1}$ при $p > 0$.

Производная $F'(x)$ будет меньше x , т.е. $F'(x) < x \Rightarrow \frac{1-x^p}{x} = 0 \Rightarrow$

$1 = x^p \Rightarrow x = 1 \Rightarrow F(x) < F(1) \Rightarrow \ln(x) \leq \frac{|x|^p}{p}$

2) Теперь докажем, что $H^P \subset N$.

$\sup_{-\pi}^{\pi} \int |fre^{i\phi}| d\phi \leq M < \infty \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \ln^+ |fre^{i\phi}| d\phi \leq M < \infty$, получаем, что $\int_{-\pi}^{\pi} \ln^+ |fre^{i\phi}| d\phi \leq c + \frac{1}{p} \int_{-\pi}^{\pi} |fre^{i\phi}|^p d\phi < \infty$ получаем, что $H^P \subset N$

Теорема 3.2. Пусть $F(z) \in H^p$, $p > 0$, и $B(z)$ -произведение Бляшке, построенное по нулям функции $F(z)$. Тогда существует сингулярная мера $\sigma \geq 0$ на $[-\pi, \pi]$, такая что

$$F(z) = B(z) e^{-\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\sigma(t)} e^{tc} * e^{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \ln |F(e^{it})| dt} \quad (20)$$

Введем описание корневых множеств следующих аналитических классов:
 $X_{\phi}^{\infty} = \{f \in H(D) : \ln |f(z)| < c_f \phi(\frac{1}{1-|z|}), z \in D\}$
Будем предполагать, что $\phi \in C^{(1)}(R_+)$ и при этом выполняются следующие условия

$$\beta_{\phi} = \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{x\phi'(x)}{\phi(x)}, \alpha_{\phi} = \underline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{x\phi'(x)}{\phi(x)}, 1 < \beta_{\phi} < \alpha_{\phi} < \infty \quad (21)$$

Теорема 4.1. Пусть функция ϕ удовлетворяет условиям (21). Тогда

- 1) Если $f \in X_{\phi}^{\infty}$, $f(0) = 1$, то количество нулей функции f в каждом прямоугольнике $\Delta_{k,l}$ не превосходит $c_f \phi(2^k)$, где c_f зависит только от f .
- 2) Обратно, если $0 < \beta_{\phi} \leq \alpha_{\phi} < +\infty$, $\{z_k\}^{\infty}$ – произвольная последовательность точек из единичного круга такая, что количество этих точек в каждом прямоугольнике $\Delta_{k,l}$ не превосходит $c_f \phi(2^k)$, то произведение π_{α} с указанными нулями принадлежит классу X_{ϕ}^{∞} при всех α , $\alpha > \alpha_{\phi} - 1$.

Теорема 4.3. Пусть ϕ -монотонно возрастающая положительная функция, $\phi \in C^{(1)}(1, +\infty)$ такая, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\phi(x)x}{\phi(x)} = \alpha_{\phi} \quad (22)$$

Если $f \in H_{\phi}(E)$ и $Z_f = \{z_n\}_{n=1}^{+\infty}$, $f(0) = 1$, то для любого $R > 1$ справедлива оценка

$$\sum_{\frac{1}{R} \leq \rho(z_n, E) \leq 2} (1 - |z_n|^2) \leq c_F \left(\frac{\phi(R)}{R} + \int_1^R \frac{\phi(x)}{x^2} dx \right). \quad (23)$$

Обратно,

а) если $\alpha_\phi \notin Z_+, \{z_n\}_{n=1}^{+\infty}$, – произвольная последовательность точек из D , удовлетворяющая условию (23);

б) если $\alpha_\phi \in Z_+/\{1\}, \{z_n\}_{n=1}^{+\infty}$, – произвольная последовательность точек из D , удовлетворяющая, наряду с условием (23), условию

$$\sup_{0 \leq k \leq m-1} \left| \sum_{\frac{1}{R} \leq \rho(z_n, E) \leq 2} \operatorname{Im} \left(i \frac{e^{i\tau_k} + z_n}{e^{i\tau_k} - z_n} \right)^{-\alpha_\phi} \right| \leq M, M > 0, \quad (24)$$

$\sup_{x>1} \frac{x^{\alpha_\phi}}{\phi(x)} < \infty$, то можно построить функцию $g \in H_\phi(E)$ нули которой совпадают с точками последовательности $\{z_n\}_{n=1}^{+\infty}$

Теорема 4.4. Пусть ϕ -монотонно возрастающая неотрицательная функция на R_+ , $\phi \in C^{(1)}(R_+)$ такая, что $1 < \beta_\phi \leq \alpha_\phi < \infty$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) функция f принадлежит классу X_ϕ^∞

2) функция f допускает следующее представление

$$f(z) = C(m, a) z^m \pi_\alpha(z, z_k) \exp \left\{ \int_D \frac{(1-|w|^2)^\alpha}{(1-z\bar{w})^{2+\alpha}} d\mu(w) \right\}, z \in D, \text{ где}$$

$\alpha > \alpha_\phi - 1, m$ – неотрицательное целое число, $\{z_k\}_0^\infty$ – последовательность точек из D таких, что

$$n_{kl} \leq \phi(2^k), k \geq 0, -2^k \leq l \leq 2^k - 1, \quad (25)$$

и $n_{k,l}$ – количество точек z_k из $\Delta_{k,l}$, и наконец, μ -комплексная мера, удовлетворяющая условию

$$|\mu(\Delta_l(w))| \leq l^2 \phi\left(\frac{1}{l}\right), 0 < l < 1, w \in T,$$

для любого прямоугольника Карлесона $\Delta_l, 0 < l < 1$:

$$\Delta_l(w) = \left\{ z : 1 - l < |z| < 1 - \frac{l}{2}, |\arg z - \arg w| < \frac{l}{2} \right\}, w \in T \quad (26)$$

Лемма 4.5. Пусть $f \in X_\phi^\infty, f(0) \neq 0, 1 + \alpha_\phi < \alpha < \infty$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-r^2)^{\alpha-2}}{(1-(1-r)^\alpha)^2} (ar-1+(1-r)^\alpha) \ln|f(re^\theta)| r dr d\theta = \\ = \ln|f(0)| + \alpha \int_0^1 \frac{(1-r)^{\alpha-1} n(r) dr}{1-(1-r)^\alpha} \end{aligned} \quad (27)$$

Теорема 4.5. Пусть $f \in X_\phi^\infty, f(0) \neq 0, 1 + \alpha_\phi < \alpha < \infty$ и $f(z_k) = 0, k \geq 1$. Предположим также, что Н-произведение с нулями $\{z_k\}_1^\infty, \alpha = 3$. Тогда $g(z) = \frac{f(z)}{H(z)} \in X_\phi^\infty$,

т.е функция f представима в виде $f(z) = c_m z^m H(z) g(z), g \in X_\phi^\infty, z \in D$ при некотором $c_m \in C, m \in Z$

Заключение. В процессе работы над темой дипломной работы о факторизационном представлении некоторых классов аналитических функций было проведено глубокое исследование ключевых понятий и методов, связанных с данной темой. Установлено, что факторизационные представления позволяют существенно упростить анализ сложных аналитических функций, разлагая их на произведения более простых и понятных элементов.

Использование факторизационных методов не только упрощает вычисления, но и способствует лучшему пониманию поведения функций в различных условиях. Результаты исследования могут быть полезны как для теоретической математики, так и для практических применений в смежных дисциплинах.

В заключение, можно сказать, что факторизационное представление аналитических функций является мощным инструментом, открывающим новые перспективы для дальнейших исследований и практического использования в различных областях науки. Если продолжить изучение и развитие данной тематики, это может привести к значительным достижениям и инновациям.