

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

**Гипотеза Хажинского-Тамми в классе ограниченных однолистных
функций**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студента 4 курса 421 группы

Направления 02.03.01 «Математика и компьютерные науки»

механико-математического факультета

Ермашевского Даниила Денисовича

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.н.

подпись, дата

В.Г. Гордиенко

Заведующий кафедрой
и. о. зав. кафедрой,
к.ф.-м.н., доцент

подпись, дата

Е.В. Разумовская

Саратов 2025

Введение. Теория однолистных функций, то есть функций, осуществляющих взаимно однозначное отображение одной области комплексной плоскости на другую, занимает важное место в комплексном анализе. Однолистные функции широко используются в различных областях, например, таких как гидродинамика, теория упругости и теория управления.

Одним из ключевых вопросов, изучаемых в теории однолистных функций, является оценка коэффициентов разложения однолистной функции в ряд Тейлора. Оценки коэффициентов функции $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ на классе S однолистных в единичном круге функций, в настоящее время получены. Сложнее обстоит дело с оценками тейлоровских коэффициентов в классе $S(M)$, $M > 1$ ограниченных однолистных в единичном круге функций. Здесь, до настоящего времени, известны точные оценки только начальных коэффициентов, причём эти оценки различаются для M близких к 1 и достаточно больших M .

В своей выпускной работе я рассматриваю два метода решения задач, связанных с оценкой начальных коэффициентов в классе $S(M)$ ограниченных однолистных в единичном круге функций.

В главе «Определения» вводятся основные для дипломной работы определения и теоремы, в том числе определения класса S и его подклассов, принцип площадей и принцип максимума Понтрягина.

В главе «Неравенство Грунскогo в гипотезе Хажинского-Тамми» рассматривается оценка коэффициентов a_n в разложении Тейлора для функций класса S и его подклассов, таких как $S(M)$, для частного случая a_7 .

В главе «Оптимальное управление в локальной гипотезе Хажинского-Тамми» вводятся гипотеза Хажинского-Тамми об общей оценке коэффициентов в классе $S(M)$, а также основная теорема дипломной работы об оценке 4-го тейлоровского коэффициента.

В главе «Формализация экстремальной задачи и предварительные расчеты» используется обобщенное уравнение Лёвнера, полученное из интегрального уравнения Лёвнера, из которого выводятся системы дифференциальных уравнений, формулируется экстремальная задача Хажинского-Тамми о максимуме $\Re a_4$ в классе $S(M)$ для M близких к 1.

В главе «Дифференциальные уравнения экстремальной задачи» формулируются системы дифференциальных уравнений, а также уравнения и отношения, которые используются для решения экстремальной задачи.

В главе «Доказательство теоремы» приведено доказательство основной теоремы дипломной работы об оценке 4-го тейлоровского коэффициента, на основании которого написан программный код для практической части

В приложении А «Константы и предварительные вычисления» вычислены тригонометрические функции от координат (4) и объявлены как константы для дальнейшего использования.

В приложении Б «Системы дифференциальных уравнений» программно реализованы системы дифференциальных уравнений, необходимые для решения экстремальной задачи.

В приложении В «Решение систем дифференциальных уравнений» на основе результатов компиляции кода из приложения Б, составляются и решаются системы дифференциальных уравнений, из решений .

В приложении Г «Основной алгоритм решения экстремальной задачи» реализован алгоритм, проверяющий критерий Сильвестра для матриц составленных из решений систем дифференциальных уравнений из приложения В.

Основное содержание работы.

Определение 2. Пусть функция $f(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots$ регулярна и однолистка в круге $|z| < 1$. Тогда регулярны и однолистки в круге также функции $f(z) - a_0$ и $a_1^{-1}(f(z) - a_0)$ (отметим, что $a_1 = f'(0) \neq 0$). Это приводит к рассмотрению класса S функций

$$f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots$$

однолистных и регулярных в круге $|z| < 1$.

Определение 3. Подкласс функций

$$w = f_l(z) = z + \sum_{v=1}^{\infty} a_{vl+1}^{(l)} z^{vl+1}, \quad l = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

Класса S будем обозначать через S^l . Функции класса S^2 обычно называют нечетными функциями класса S , а функции класса S^l , $l = 2, 3, \dots$, называют l -симметричными функциями класса S .

Определение 4. Обозначим через S_M^l , $1 \leq M < \infty$, $l = 1, 2, \dots$, класс функций $f_l(z) \in S^l$ таких, что $|f_l(z)| < M$ при $|z| < 1$. Класс S_M^1 запишем через S_M .

Определение 5. Обозначим через Σ класс функций $F(\zeta) = \zeta + \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\zeta} + \dots$, регулярных и однолистных в области $1 < |\zeta| < \infty$, через Σ^l , $l = 1, 2, \dots$, - класс функций $F_l(\zeta) = \zeta + \frac{\alpha_{l-1}^{(l)}}{\zeta^{l-1}} + \dots + \frac{\alpha_{kl-1}^{(l)}}{\zeta^{kl-1}} + \dots \in \Sigma$, не обращающихся в нуль в области $1 < |\zeta| < \infty$.

Теорема 6. Если x_p , $p = 1, 2, \dots$, - постоянные такие, что $0 < \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} |x_p|^2 < \infty$ и $F(\zeta) \in \Sigma$, то

$$\left| \sum_{p,q=1}^{\infty} \omega_{p,q} x_p x_q \right| \leq \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} |x_p|^2, \quad (4)$$

где знак равенства имеет место в том и только в том случае, если

$$\sum_{p=1}^{\infty} \omega_{p,q} x_p = \lambda \frac{1}{q} \bar{x}'_q, \quad q = 1, 2, \dots, \quad (5)$$

где λ - некоторая постоянная, $|\lambda| = 1$, $\omega_{p,q}$ - коэффициенты Грунскового, а неравенство (4) - неравенство Грунскового в классе функций $F(\zeta) = \zeta + \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\zeta} + \dots$, регулярных и однолистных в области $1 < |\zeta| < \infty$, которое служит основой для оценки коэффициентов.

Теорема 7. Пусть $f(z) \in S$, $0 < \delta < 1$, $\omega_{p,q}(\delta)$, $p, q = 1, 2, \dots$, определяются разложением

$$\begin{aligned} \Psi_{\delta}(\tau, z) &= \int_0^{\tau} \left[\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta} \right)^{-\delta} \left(\frac{f(z)}{z} \right)^{\delta} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta) - f(z)} - \frac{1}{\zeta - z} \right] \left(\frac{z}{\zeta} \right)^{\delta} d\zeta \\ &= \left(\frac{z}{\tau} \right)^{\delta} \sum_{p,q=1}^{\infty} \omega_{p,q}(\delta) \tau^p z^{q-1}, \end{aligned} \quad (6)$$

а $x_p, x'_q, p = 1, 2, \dots$, — произвольные числа такие, что

$$0 < \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p - \delta} |x_p|^2 < \infty, \quad 0 < \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q - \delta'} |x'_q|^2 < \infty, \quad \delta' = 1 - \delta.$$

Тогда

1.

$$\sum_{q=1}^{\infty} (q - \delta') \left| \sum_{p=1}^{\infty} \omega_{p,q}(\delta) x_p \right|^2 \leq \left| \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p - \delta} |x_p|^2 \right|. \quad (7)$$

Если $\overline{\lim}_{p \rightarrow \infty} \sqrt[p]{|x_p|} < 1$ и δ - рациональное, то знак равенства имеет место в том и только в том случае, если площадь $\sigma(\overline{B}(f^{-1}))$ дополнения образа круга $|z| < 1$ при отображении $\omega = f(z)^{-1}$ равна нулю.

2.

$$\left| \sum_{p,q=1}^{\infty} \omega_{p,q}(\delta) x_p x'_q \right|^2 \leq \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p - \delta} |x_p|^2 \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q - \delta'} |x'_q|^2. \quad (8)$$

Знак равенства имеет место в том и только в том случае, если

$$\sum_{p=1}^{\infty} \omega_{p,q}(\delta) x_p = \lambda \frac{1}{q - \delta'} \overline{x'_q}, \quad q = 1, 2, \dots, \quad (9)$$

где λ - фиксированное число,

$$|\lambda|^2 = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p - \delta} |x_p|^2 \left[\sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q - \delta'} |x'_q|^2 \right]^{-1}. \quad (10)$$

При этом и в (7) имеет место знак равенства.

Теорема 8. гипотеза Бибераха

Коэффициенты $|a_n| \leq n$, $n \geq 2$, для $f \in S$, причем равенство достигается только для вращений функции Кебе

$$K(z) = \frac{z}{(1 - z)^2}, \quad (11)$$

Она была доказана Де Бранжем.

Теорема 9. Граница $\partial D_n^m(z)$, $1 < M \leq \infty$, $n \geq 0$, $|z| < 1$, множества значений системы функционалов $I = I(f) = \{f(z), \dots, f^{(n)}(z)\}$ в классе $S(M)$ является объединением множеств $Q_1, \dots, Q_{n+1}$, попарно не имеющих общих внутренних точек. Каждому из множеств Q_m , $m = 1, \dots, n+1$, взаимно однозначно соответствует множество $\mathfrak{M}_m(0, X^0)$ и справедливо параметрическое представление

$$Q_m = \{X(\ln M, \xi, \lambda) : \xi \in \mathfrak{M}_m(0, X^0), \|\xi\| = 1, \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m),$$

$$\lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, m; \sum_{j=1}^m \lambda_j = 1\},$$

где $X(t, \xi, \lambda)$ есть проекция на фазовое пространство решения $(X(t, \xi, \lambda), \psi(t\xi, \lambda))$ задачи Коши для семейства гамильтоновых систем:

$$\frac{dX}{dt} = \sum_{j=1}^m \lambda_j G(t, X, u_j(t, X, \psi)), \quad X(0) = X^0,$$

$$\frac{d\bar{\psi}}{dt} = - \sum_{j=1}^m \lambda_j \left(\frac{\partial G(t, X, u_j(t, X, \psi))}{\partial X} \right)^T \bar{\psi}, \quad \psi(0) = \xi,$$

с непрерывными ветвями $u_1(t, X, \psi), \dots, u_m(t, X, \psi)$.

Теорема 10. Если функция f , доставляющая граничную точку множества $D_n(z)$, отображает круг E на плоскость с разрезом по кусочно-аналитическим кривым с m концевыми конечными точками, то найдутся непрерывные на $[0, \infty)$ вещественные функции $u_1, \dots, u_m$ и положительные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, $\sum_{j=1}^m \lambda_j$ такие, что решение $w = w(z, t)$ задачи Коши для обобщенного дифференциального уравнения Лёвнера

$$\frac{dw}{dt} = -w \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{e^{iu_j} + w}{e^{iu_j} - w}, \quad w|_{t=0} = z, \quad t > 0,$$

связано с $f(z)$ соотношением $f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^t w(z, t)$.

Теорема 11. Рассматривается управляемый объект, движение которого описывается системой уравнений

$$\dot{x}^j = f^j(x^1, \dots, x^n, u^1, \dots, u^r) = f^j(x, u), \quad j = 1, \dots, n,$$

или, в векторной форме,

$$\dot{x} = f(x, u). \quad (12)$$

В пространстве переменных $u^1, \dots, u^r$ задано некоторое множество U (область управления), допустимым управлением считается произвольная кусочно-непрерывная функция $u(t) = (u^1(t), \dots, u^r(t))$ со значениями в U , непрерывная справа в точках разрыва и непрерывная в концах отрезка, на котором она определена. Далее, в фазовом пространстве X переменных $x^1, \dots, x^n$ заданы две точки x_0 и x_1 (начальное и конечное фазовые состояния). Наконец, рассматривается некоторый процесс $(u(t), x(t))$, $t_0 \leq t \leq t_1$, переводящий объект из состояния x_0 в состояние x_1 , это означает, что $x(t)$ есть решение системы (12), соответствующее допустимому управлению $u = u(t)$ и удовлетворяющее начальному и конечному условиям

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1.$$

Таким образом, рассматриваемый процесс затрачивает на переход из состояния x_0 в состояние x_1 время, равное $t_1 - t_0$. Процесс $(u(t), x(t))$ называется оптимальным (в смысле быстрогодействия), если не существует процесса, переводящего объект из состояния x_0 в состояние x_1 за меньшее время.

Для формулировки необходимого условия оптимальности введем в рассмотрение функцию H , зависящую от переменных $x^1, \dots, x^n, u^1, \dots, u^r$ и некоторых вспомогательных переменных $\psi_1, \dots, \psi_n$:

$$H(\psi, x, u) = \psi f(x, u) = \sum_{\alpha=1}^n \psi_{\alpha} f^{\alpha}(x, u). \quad (13)$$

С помощью этой функции H запишем следующую систему дифференциальных уравнений для вспомогательных переменных:

$$\dot{\psi}_j = -\frac{\partial H(\psi, x(t), u(t))}{\partial x^j}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (14)$$

где $(u(t), x(t))$ - рассматриваемый процесс.

Для оптимальности процесса $(u(t), x(t))$ необходимо существование такого нетривиального решения $\psi(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, системы (14), что для любого момента τ , где $t_0 \leq \tau \leq t_1$, выполнено условие максимума

$$H(\psi(\tau), x(\tau), u(\tau)) = \max_{\nu \in U} H(\psi(\tau), x(\tau), \nu), \quad (15)$$

а в конечный момент времени t_1 выполнено условие

$$H(\psi(t_1), x(t_1), u(t_1)) \geq 0. \quad (16)$$

Теорема 12. Для всех значений b_1 из интервала $0.93 \leq b_1 \leq 1$ выполняется неравенство:

$$0 \leq a_7 \leq \frac{1}{3}(1 - b_1^6).$$

Где класс $S(M)$ и семейство $S(b_1)$ связаны посредством $b_1 = \frac{1}{M}$.

Теорема 13. Гипотеза Хажинского-Тамми

Хажинский и Тамми сформулировали гипотезу:

$$\forall n \geq 2 \exists M_n > 1 : \forall M \in (1, M_n) \text{ и } f \in S(M) : |a_n| \leq \frac{2}{n-1} \left(1 - \frac{1}{M^{n-1}}\right), \quad (48)$$

Теорема 14. Число $M_4^* \geq \frac{34}{19}$ определяется условием, что для всех $M \in (1, M_4^*)$ матрицы (81) удовлетворяют условиям (82), где элементы матриц (81) являются значением в точке $t = 1 - \frac{1}{M}$ решением задачи Коши для системы дифференциальных уравнений (69)-(71), (76)-(79), правые части которых определяются посредством формул (72), (73), (75).

Задача 1. Пусть $F^M : (\psi(0), \lambda) \rightarrow x_5(1 - 1/M)$ - это функция, которая всякому начальному данному $\psi(0)$ и параметру λ в экстремальной задаче

(54)-(60) со скользящим оптимальным режимом сопоставляет значение $x_5(1 - 1/M)$. Положим

$$(\psi_1(0), \psi_2(0), \psi_3(0), \psi_4(0)) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1, -\alpha_2) + o((\alpha_1, \alpha_2)), \quad (\alpha_1, \alpha_2) \rightarrow 0, \quad (65)$$

$$\lambda = \left(\frac{1}{3} + \alpha_3, \frac{1}{3} + \alpha_4, \frac{1}{3} - \alpha_3 - \alpha_4\right), \quad \alpha(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4), \quad (66)$$

согласно чему $F^M = F^M(\alpha)$. Требуется найти значение $M_4^* \geq \frac{34}{19}$ такое, что для всех $M \in (1, M_4^*)$ функция $F^M(\alpha)$ достигает локального максимума в точке $\alpha = 0$.

Была доказана теорема (14).

Доказательство. Локальная экстремальная задача в теореме (14) заключается в решении задачи (1): надо вычислить значение коэффициента $M_4^* \geq \frac{34}{19}$, что $\forall M \in (1, M_4^*]$ функция $F^M(\alpha)$, соответствующая локальной экстремальной задаче (55), достигает локального максимума в точке $\alpha = 0$. Необходимое условие экстремума

$$(x_5)_{\alpha_j} \left(1 - \frac{1}{M}\right) \Big|_{\alpha=0} = \left[\frac{\partial F^M(\alpha)}{\partial \alpha_j} \right] = 0, \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

выполняется для всех $M > 1$. Тогда остается только проверить достаточное условие экстремума функции F^M , зависящей от четырех координат вектора α , которое заключается в том, что при $\alpha = 0$ квадратичная форма, порожденная квадратной матрицей $\Delta = \Delta(M)$ с элементами $(x_5)_{\alpha_j \alpha_l} \left(1 - \frac{1}{M}\right)$, $j, l = 1, 2, 3, 4$, отрицательно определена.

Для $M > 1$ обозначим

$$\Delta_m(M) = \begin{pmatrix} (x_5)_{\alpha_1 \alpha_1} \left(1 - \frac{1}{M}\right) & \dots & (x_5)_{\alpha_1 \alpha_m} \left(1 - \frac{1}{M}\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_5)_{\alpha_m \alpha_1} \left(1 - \frac{1}{M}\right) & \dots & (x_5)_{\alpha_m \alpha_m} \left(1 - \frac{1}{M}\right) \end{pmatrix}_{\alpha=0}, \quad (81)$$

$m = 1, 2, 3, 4, .$

Согласно критерию Сильвестра матрица $\Delta(M)$ отрицательно определена тогда и только тогда, когда

$$(-1)^m \det \Delta_m(M) > 0, \quad m = 1, 2, 3, 4, . \quad (82)$$

Элементы матрицы $\Delta_4(M)$ являются значением в точке $t = 1 - \frac{1}{M}$ решения $(x_5)_{\alpha_j \alpha_l}(t)$, $(x_p)_{\alpha_j}(t)$, $(\psi_p)_{\alpha_j}(t)$, $j, l = 1, 2, 3, 4$, задачи Коши для системы дифференциальных уравнений (69)-(71), (76)-(79), в которых частные производные $(u_k)_{\alpha_j}$, $k = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3, 4$, задаются формулами (72), (73), (75). $\square$

В системе компьютерной алгебры maple были реализованы необходимые константы, отношения, уравнения и системы дифференциальных уравнений. Найдено решения дифференциальных уравнений (69)-(71), а также разработан алгоритм с адаптивным шагом и возможностью задать количество знаков после запятой, который автоматически строит матрицы (80) и проверяет критерий Сильвестра для них.

Заключение. Таким образом, в дипломной работе была рассмотрена гипотеза Хажинского-Тамми в классе $S(M)$ ограниченных однолистных в единичном круге функций, а также два метода решения задач, связанных с оценкой начальных коэффициентов в данном классе. Основной целью работы было исследование локальной экстремальной задачи для четвертого коэффициента разложения и доказательство того, что функция Пика является экстремальной в данном классе функций при определённых условиях.

В ходе работы был проведен анализ существующих методов оценки коэффициентов разложения однолистных функций, включая неравенства Грун-ского и принцип максимума Понтрягина.

В рамках бакалаврской работы была разработана программная реализация алгоритма в системе компьютерной алгебры Maple, позволяющего решать поставленную экстремальную задачу, включая формализацию системы дифференциальных уравнений и их численное решение.

Получено значение M_4^* , при котором гипотеза Хажинского-Тамми выполняется для $M \in (1, M_4^*)$, что подтверждает локальную экстремальность функции Пика.

Результаты работы имеют важное значение для дальнейшего развития теории однолистных функций, а также для прикладных задач, связанных с оценкой коэффициентов разложения. Доказательство локальной экстремальности функции Пика позволяет уточнить границы коэффициентов и расширить понимание структуры классов ограниченных однолистных функций.