

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра математического анализа

**ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ НА КЛАССЕ ОДНОЛИСТНЫХ
ФУНКЦИЙ**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 421 группы

направления 02.03.01 Математика и компьютерные науки

механико-математического факультета

Головченко Миланы Андреевны

Научный руководитель
профессор, д.ф.-м.н., профессор

подпись, дата

Д.В. Прохоров

Заведующей кафедрой
и. о. зав. кафедрой,
к.ф.-м.н., доцент

подпись, дата

Е.В. Разумовская

Саратов 2025

Введение. Данная работа направлена на решение задач, которые интересны для двух, казалось бы, диаметрально разных категорий математики, а именно геометрической теории функции комплексного переменного и математической теории оптимального управления.

Цель работы - описать множество значений функционалов на классе однолистных в верхней полуплоскости функций с двумя симметричными, относительно мнимой оси, разрезами. Исследование данных задач базируется на необходимом условии оптимальности, которое является принципом максимума Понтрягина. Окончательно сформулированный в 1961 году, принцип максимума Понтрягина мгновенно нашёл применение в решении широкого круга инженерных задач, а также существенно продвинул вперёд поиск оптимальных решений во многих других областях. С его появлением стало возможно целенаправленно и эффективно управлять сложными процессами, что положило начало новому этапу в развитии техники и технологий.

Также важным объектом при решении задач в данной работе стало дифференциальное уравнение Левнера. Это уравнение было введено чешским математиком Карлом Левнером в 1923 году. Оно задает однопараметрическое семейство конформных отображений канонических областей в себя.

В первой главе «Оптимальное управление» в параграфе «Существование оптимального управления» вводятся основные для работы понятия, а именно - фазовый вектор объекта, управляющий параметр объекта, пространство $\Omega(E^n)$, опорные функции, также свойства опорных функций, понятие выпуклого множества и выпуклой оболочки множеств. В конце приводится теорема существования оптимального управления.

В параграфе «Принцип максимума Понтрягина» рассматривается объект, описываемый уравнением $\dot{x} = Ax + u$, приводится сам принцип максимума Понтрягина, лемма об эквивалентной формулировке принципа максимума. В заключении приводится доказательство теоремы о необходимых условиях оптимальности.

Во второй главе «Геометрическая теория функций комплексного переменного» систематически изложены фундаментальные понятия и теоремы геометрической теории функций комплексного переменного, а именно приведено определение аналитической функции двумя равносильными способами, одно-

листной функции, связного множества, односвязной и многосвязной области. В конце приведена теорема Римана.

В главе «Множество значений системы коэффициентов c_3 и c_5 » вводится понятие класса симметричных функций, приводится дифференциальное уравнение Левнера для данного класса. В данной главе приведен результат первой задачи работы, а имеется множество значений системы коэффициентов c_3 и c_5 , которое проиллюстрировано с помощью библиотеки *matplotlib python*.

В главе «Задача о множестве значений вещественной и мнимой части функционала $g(z, t)$ » была предпринята попытка решения задачи по описанию множества значений системы функционалов на классе однолистных в верхней полуплоскости функций с симметричными разрезами. В результате задача свелась к интегрированию системы четырех дифференциальных уравнений.

Основное содержание работы. Введем базовые понятия и теоремы.

Определение 1.1. Предположим, что в любой момент времени t состояние объекта описывается набором параметров $x^1(t), \dots, x^n(t)$, представляющих собой, например, координаты объекта в какой-то системе координат, компоненты скорости и т.п. Вектор

$$x(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$$

называется фазовым вектором объекта.

Определение 1.2. Пусть положение рулей характеризуется в каждый момент времени t набором параметров $u^1(t), \dots, u^m(t)$. Вектор

$$u(t) = (u^1(t), \dots, u^m(t))$$

называется управляющим параметром объекта или управлением.

Определение 1.3. Пусть задано некоторое множество $F \in \Omega(E^n)$. Опорной функцией множества F называется скалярная функция $c(F, \psi)$ векторного аргумента $\psi \in E^n$, определяемая условием

$$c(F, \psi) = \max_{f \in F} \langle f, \psi \rangle,$$

где $\langle f, \psi \rangle$ — скалярное произведение векторов $f = (f^1, \dots, f^n)$ и $\psi = (\psi^1, \dots, \psi^n)$, заданное формулой

$$\langle f, \psi \rangle = \sum_{i=1}^n f^i \psi^i.$$

Свойство 1. Опорная функция $c(F, \cdot) : E^n \rightarrow E^1$ положительно однородна, то есть

$$c(F, \lambda\psi) = \lambda c(F, \psi)$$

для любого вектора $\psi \in E^n$ и любого числа $\lambda \geq 0$.

Свойство 2. Для любых двух векторов $\psi_1, \psi_2 \in E^n$ опорная функция удовлетворяет неравенству

$$c(F, \psi_1 + \psi_2) \leq c(F, \psi_1) + c(F, \psi_2).$$

Определение 1.4. Функция $f : E^n \rightarrow E^1$ называется выпуклой, если для любых двух точек $x_1, x_2 \in E^n$ и любого числа $0 \leq \lambda \leq 1$ выполняется неравенство

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

Свойство 3. Опорная функция $c(F, \cdot) : E^n \rightarrow E^1$ является выпуклой.

Свойство 4. Пусть $F, G \in \Omega(E^n)$. Тогда опорная функция $c(F + G, \psi)$ суммы $F + G$ равняется сумме двух опорных функций $c(F, \psi)$ и $c(G, \psi)$, то есть

$$c(F + G, \psi) = c(F, \psi) + c(G, \psi).$$

Свойство 5. Пусть A — матрица размером $n \times n$, а $f \in \Omega(E^n)$. Тогда

$$c(AF, \psi) = c(F, A^*\psi),$$

где A^* — матрица, сопряженная с матрицей A .

Свойство 6. Пусть $F \in \Omega(E^n)$, а λ — произвольное число. Тогда

$$c(\lambda F, \psi) = c(F, \lambda\psi).$$

для любого числа $\lambda \geq 0$. Матрица A имеет вид $A = \lambda E$.

Свойство 7. Пусть $G, F \in \Omega(E^n)$. Если выполняется включение $G \subset F$, то для любого вектора $\psi \in E^n$ справедливо неравенство

$$c(G, \psi) \leq c(F, \psi).$$

Определение 1.6. Множество $F \subset E^n$ называется выпуклым, если для любых двух точек $x_1, x_2 \in F$ отрезок, соединяющий эти точки, содержится в множестве F .

Определение 1.7. Выпуклой оболочкой $\text{conv } F$ называется наименьшее выпуклое множество, содержащее множество F .

Свойство 8. Пусть $f \in \Omega(E^n)$. Тогда опорные функции множества $\text{conv } F$ и F совпадают, то есть

$$c(\text{conv } F, \psi) = c(F, \psi).$$

Свойство 9. Пусть заданы множество $F \in \Omega(E^n)$ и его опорная функция $c(F, \psi)$. Тогда выпуклая оболочка $\text{conv } F$ множества F представляется в виде

$$\text{conv } F = \bigcap_{\psi \in S} \{f \in E^n : \langle f, \psi \rangle \leq c(F, \psi)\}.$$

Свойство 10. Пусть $F \in \Omega(E^n)$, $f \in E^n$. Если для любого вектора $\psi \in S$ выполняется неравенство

$$\langle f, \psi \rangle \leq c(F, \psi),$$

то точка f принадлежит выпуклой оболочке $\text{conv } F$ множества F .

Свойство 11. Пусть $G, F \in \Omega(E^n)$. Если для любого вектора $\psi \in S$ выполняется неравенство

$$c(G, \psi) \leq c(F, \psi),$$

то справедливо включение $G \subset \text{conv } F$.

Свойство 12. Пусть $G, F \in \Omega(E^n)$. Если множества F и G равны, то их опорные функции совпадают, $c(F, \psi) = c(G, \psi)$. Наоборот, если опорные функции совпадают, то $\text{conv } F = \text{conv } G$.

Свойство 13. Пусть $G, F \in \Omega(E^n)$. Если множества F и G пересекаются, то

для любого вектора $\psi \in E^n$ выполняется неравенство

$$c(F, \psi) + c(G, -\psi) \geq 0.$$

Наоборот, если выполняется данное неравенство, то $\text{conv } F \cap \text{conv } G \neq \emptyset$.

Свойство 14. Опорная функция $c(F, \psi)$ непрерывна по совокупности переменных F, ψ в любой точке (F_0, ψ_0) и, следовательно, непрерывна по каждой из переменных F и ψ в отдельности.

Теорема: существование оптимального управления

Предположим, что объект является управляемым из множества M_0 на множество M_1 на некотором отрезке времени $[t_0, t_1]$. Тогда существует оптимальное управление управление $u^*(t), t \in [t_0, t^*]$, переводящее объект из множества M_0 на множество M_1 за минимальное время $t^* - t_0$.

Рассмотрим управляемый объект, описываемый уравнением

$$\dot{x} = Ax + u, \tag{1.3}$$

где $x \in E^n$ — вектор фазового состояния объекта, $u \in E^n$ — вектор управления, A — квадратная матрица $n \times n$.

Пусть на отрезке времени $I = [t_0, t_1]$ задано некоторое допустимое управление $u(t)$ такое, что соответствующее решение $x(t)$ уравнения (1.3) переводит объект из начального множества M_0 на конечное множество M_1 на отрезке времени $I = [t_0, t_1]$, то есть удовлетворяет граничным условиям $x(t_0) \in M_0, x(t_1) \in M_1$. Будем говорить, что пара $u(t), x(t)$ удовлетворяет принципу максимума Понтрягина на отрезке времени $I = [t_0, t_1]$, если существует такое нетривиальное решение $\psi(t)$ вспомогательной системы дифференциальных уравнений

$$\dot{\psi} = -A^*\psi, \tag{1.4}$$

что выполнены следующие три условия:

1) условие максимума

$$\langle u(t), \psi(t) \rangle = c(U, \psi(t))$$

для почти всех $t \in I$;

2) условие трансверсальности на множестве M_0

$$\langle x(t_0), \psi(t_0) \rangle = c(M_0, \psi(t_0));$$

3) условие трансверсальности на множестве M_1

$$\langle x(t_1), -\psi(t_1) \rangle = c(M_1, -\psi(t_1)).$$

Лемма об эквивалентной формулировке принципа максимума Понтрягина.

Пусть допустимое управление $u(t) \in U, t \in [t_0, t_1]$, таково, что соответствующее решение $x(t)$ системы уравнений (1.3) удовлетворяет граничным условиям $x(t_0) \in M_0, x(t_1) \in M_1$. Пусть, далее, $\psi(t)$ — некоторое решение сопряженной системы уравнений (1.4). Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) пара $x(t), u(t)$ удовлетворяет принципу максимума с сопряженной функцией $\psi(t)$ на отрезке времени $I = [t_0, t_1]$;

2) при всех $t \in I$ вектор $\psi(t)$ является опорным вектором к множеству достижимости $X(t)$ в точке $x(t)$, то есть выполняется равенство

$$\langle x(t), \psi(t) \rangle = c(X(t), \psi(t)). \quad (1.5)$$

Кроме того, выполнено условие трансверсальности на множестве M_1 ;

3) при всех $t \in I$ вектор $-\psi(t)$ является опорным вектором к множеству управляемости $Y(t)$ в точке $x(t)$, то есть выполняется равенство

$$\langle x(t), -\psi(t) \rangle = c(Y(t), -\psi(t)). \quad (1.6)$$

Кроме того, выполнено условие трансверсальности на множестве M_0 .

Теорема: о необходимых условиях оптимальности

Пусть $u(t)$ — оптимальное управление, переводящее объект из множества M_0 на множество M_1 на отрезке времени $I = [t_0, t_1]$, и $x(t)$ — соответствующий

щее решение уравнения (1.3). Тогда пара $u(t), x(t)$ удовлетворяют принципу максимума Понтрягина на отрезке времени I .

Определение 2.1. Говорят, что функция $f(z)$ является аналитической в точке z_0 , если существует круг $S_\rho(z_0) = \{z : |z - z_0| < \rho\}$ такой, что $f(z)$ имеет в этом круге производные любого порядка и представима как сумма своего ряда Тейлора по степеням $z - z_0$, то есть

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n, \quad z \in S_\rho(z_0).$$

Функцию $f(z)$ называют аналитической в области, если она является аналитической в любой точке этой области.

Определение 2.2. Говорят, что функция $f(z)$ является аналитической в точке z_0 , если в этой точке существует производная $f'(z_0)$.

Определение 2.3. Функция $f(z)$ называется однолистной в некоторой области D , если она аналитична и однозначна в D и принимает различные значения в любых двух различных точках области D .

Определение 2.4. Множество E называется связным, если существует любое разбиение его на два непустых подмножества E_1 и E_2 без общих точек, по крайней мере одно из них содержит предельную точку для другого множества.

Определение 2.5. Открытое связное множество называется областью.

Определение 2.6. Область называется односвязной или многосвязной в зависимости от того является ли ее граница связным или не связным множеством. Если граница состоит из n , ($n > 1$) попарно непересекающихся континуумов, то область называется n -связной, в противном случае бесконечно связной.

Лемма 2.7. Если $f(z)$ регулярна в круге $|z| < R$, $f(0) = 0$ и $|f(z)| < M$ для $z \in \{|z| < R\}$, то $|f(z)| \leq \frac{M}{R}|z|$ в $|z| < R$ и $|f'(0)| \leq \frac{M}{R}$. Причем знак равно в обоих неравенствах только для функции $f(z) = e^{i\alpha} \frac{M}{R} z$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Определение 2.8. Функции $\{f(z)\}$ называются равностепенно непрерывными на множестве G , если:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall z_1, z_2 \in G \ |z_1 - z_2| < \delta \implies |f_n(z_1) - f_n(z_2)| < \varepsilon$$

Теорема 2.9. Если $\{f(z)\}$, аналитических в области B , является равномерно ограниченной внутри области B , то из нее можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся внутри B к аналитической функции.

Определение 2.10. Пусть E — некоторое подмножество области D . $f(z)$ определена на E . Регулярную в D функцию $F(z)$ такую что:

$$F(z) = f(z) \quad \forall z \in E$$

называют аналитическим продолжением $f(z)$ в область D .

Теорема 2.11. Если множество E имеет хотя бы одну предельную точку, лежащую внутри области D , то $f(z)$ имеет не более одного аналитического продолжения в область D .

Теорема 2.12. Какова бы ни была односвязная область B плоскости z , имеющая более одной граничной точки, существует и при том единственная функция $\xi = f(z)$, регулярная в области B и однолистно отображающая B на круг $|\xi| < 1$ так, что заданная точка $z_0 \in B$ и заданное в ней направление переходит в точку $\xi = 0$ и направление положительной вещественной оси.

Определим класс симметричных функций и сформулируем основные результаты работы.

Классом $\mathcal{H}$ назовем множество всех функций $f(z)$ удовлетворяющих в верхней полуплоскости $\mathbb{H}$ условию:

$$f(z) = -\overline{f(-\bar{z})}.$$

Пусть функция $w = g(z, t)$, $z \in \mathbb{H}$, $t \geq 0$, имеющая в окрестности бесконечно удаленной точки представление

$$g(z, t) = z + \frac{2t}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \frac{c_3}{z^3} + \frac{c_4}{z^4} + \frac{c_5}{z^5} + \dots \quad (3.1)$$

отображает области, симметричные относительно мнимой оси, на верхнюю полуплоскость $\mathbb{H}$ это подразумевает, что все четные коэффициенты в разложении равны нулю.

Для класса $\mathcal{H}$ дифференциальное уравнение Левнера имеет вид:

$$\frac{dg}{dt} = \frac{2g}{g^2 - \lambda^2}, \quad t \geq 0, \quad g(z, 0) = z, \quad z \in \mathbb{H}$$

Первой задачей работы стало описание множества значений коэффициентов c_3 и c_5 в разложении (3.1). Был получен следующий результат:

Множество значений коэффициентов c_3 и c_5 описывается системой:

$$\begin{cases} c_3 \geq -2T^2, \\ c_5 = \frac{c_3^2}{2T} - 2c_3T - \frac{8}{3}T^3. \end{cases}$$

Иллюстрацию можно видеть на рисунке 1.

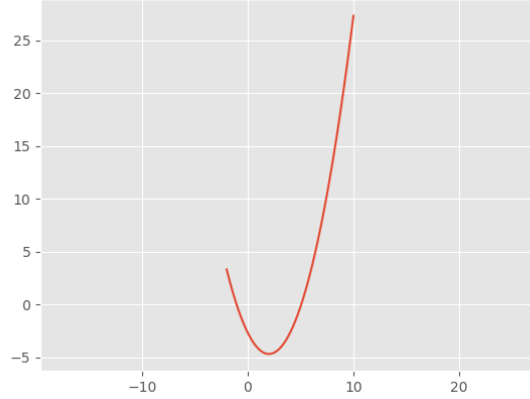


Рисунок 1

Также была найдена экстремальная функция, которая имеет вид:

$$g = \sqrt[3]{-6c + \sqrt{36c^2 - (b + 4t)^3}} + \sqrt[3]{-6c - \sqrt{36c^2 - (b + 4t)^3}}$$

Вторая задача о множестве значений вещественной и мнимой части функционала $g(z, t) = u(t) + iv(t)$ свелась с интегрированию системы дифференциальных уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned}
\frac{d\psi_1}{dt} &= -2\psi_1 \left[\frac{(\psi_1 u + \psi_2 v) \left(\psi_1 u^3 + v\psi_2(2u^2 + v^2) + uv\sqrt{(u^2 + v^2)(\psi_1^2 + \psi_2^2)} \right)}{(2uv)^2 \left((u^2 + v^2)(\psi_1^2 + \psi_2^2) + (u\psi_2 - v\psi_1)\sqrt{(u^2 + v^2)(\psi_1^2 + \psi_2^2)} \right)} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\left((u^2 + v^2)\psi_2 + u\sqrt{(u^2 + v^2)(\psi_1^2 + \psi_2^2)} \right)^2 (\psi_1 u + \psi_2 v)^2}{2u^2 v^2 \left((u^2 + v^2)(\psi_1^2 + \psi_2^2) + (u\psi_2 - v\psi_1)\sqrt{(u^2 + v^2)(\psi_1^2 + \psi_2^2)} \right)^2} \right] + \\
&\quad + 2\psi_2 \left[\frac{(\psi_1 u + \psi_2 v)^2}{4uv \left((u^2 + v^2)(\psi_1^2 + \psi_2^2) + (u\psi_2 - v\psi_1)\sqrt{(u^2 + v^2)(\psi_1^2 + \psi_2^2)} \right)} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\left((u^2 + v^2)\psi_1 + v\sqrt{(u^2 + v^2)(\psi_1^2 + \psi_2^2)} \right) \left((u^2 + v^2)\psi_2 + u\sqrt{(u^2 + v^2)(\psi_1^2 + \psi_2^2)} \right) (\psi_1 u + \psi_2 v)^2}{\left(uv \left((u^2 + v^2)(\psi_1^2 + \psi_2^2) + (u\psi_2 - v\psi_1)\sqrt{(u^2 + v^2)(\psi_1^2 + \psi_2^2)} \right) \right)^2} \right], \\
\frac{d\psi_2}{dt} &= -2\psi_1 \left[\frac{(\psi_1 u + \psi_2 v)^2}{4uv \left((u^2 + v^2)(\psi_1^2 + \psi_2^2) + (u\psi_2 - v\psi_1)\sqrt{(u^2 + v^2)(\psi_1^2 + \psi_2^2)} \right)} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\left((u^2 + v^2)\psi_1 - v\sqrt{(u^2 + v^2)(\psi_1^2 + \psi_2^2)} \right) \left((u^2 + v^2)\psi_2 + u\sqrt{(u^2 + v^2)(\psi_1^2 + \psi_2^2)} \right) (\psi_1 u + \psi_2 v)^2}{\left(2uv(u^2 + v^2)(\psi_1^2 + \psi_2^2) + (u\psi_2 - v\psi_1)\sqrt{(u^2 + v^2)(\psi_1^2 + \psi_2^2)} \right)^2} \right] + \\
&\quad + 2\psi_2 \left[\frac{\left(v^3\psi_2 + u\psi_1(2v^2 + u^2) + uv\sqrt{(u^2 + v^2)(\psi_1^2 + \psi_2^2)} \right) (\psi_1 u + \psi_2 v)}{(2uv)^2 \left((u^2 + v^2)(\psi_1^2 + \psi_2^2) + (u\psi_2 - v\psi_1)\sqrt{(u^2 + v^2)(\psi_1^2 + \psi_2^2)} \right)} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\left((u^2 + v^2)^2\psi_1^2 - v^2(u^2 + v^2)(\psi_1^2 + \psi_2^2) \right) (\psi_1 u + \psi_2 v)^2}{\left(2uv \left((u^2 + v^2)(\psi_1^2 + \psi_2^2) + (u\psi_2 - v\psi_1)\sqrt{(u^2 + v^2)(\psi_1^2 + \psi_2^2)} \right) \right)^2} \right], \\
\frac{du}{dt} &= \frac{\psi_1 u + \psi_2 v}{2uv} \cdot \frac{(u^2 + v^2)\psi_2 + u\sqrt{(u^2 + v^2)(\psi_1^2 + \psi_2^2)}}{(u^2 + v^2)(\psi_1^2 + \psi_2^2) + (u\psi_2 - v\psi_1)\sqrt{(u^2 + v^2)(\psi_1^2 + \psi_2^2)}}, \\
\frac{dv}{dt} &= \frac{\psi_1 u + \psi_2 v}{2uv} \cdot \frac{u^2\psi_1 + v^2\psi_2 + v\sqrt{(u^2 + v^2)(\psi_1^2 + \psi_2^2)}}{(u^2 + v^2)(\psi_1^2 + \psi_2^2) + (u\psi_2 - v\psi_1)\sqrt{(u^2 + v^2)(\psi_1^2 + \psi_2^2)}};
\end{aligned} \right.$$

Заключение. Таким образом, в работе были рассмотрены базовые понятия и теоремы математической теории оптимального управления и геометрической теории функций комплексного переменного.

Описано множество значений коэффициентов c_3 и c_5 на классе $\mathcal{H}$, все функции которого в верхней полуплоскости удовлетворяют условию:

$$f(z) = -\overline{f(-\bar{z})}.$$

Также была предпринята попытка решения задачи по описанию множества значений системы вещественной и мнимой части функционала $g(z, t) = u(t) + iv(t)$ на том же классе $\mathcal{H}$. В результате задача свелась к интегрированию системы четырех дифференциальных уравнений.