

Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теории функций и стохастического анализа

**ИССЛЕДОВАНИЕ И АНАЛИЗ СИСТЕМЫ МАССОВОГО
ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОЖИДАНИЕМ И ПОЛНОЙ
ВЗАИМОПОМОЩЬЮ МЕЖДУ КАНАЛАМИ**
АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 4 курса 412 группы
направления 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета
Шикаловой Антонины Николаевны

Научный руководитель
старший преподаватель

Н. В. Сергеева

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., доцент

С. П. Сидоров

Саратов 2025

ВВЕДЕНИЕ

Теория систем массового обслуживания – это область прикладной математики, являющаяся обособленной частью теории случайных процессов, с комплексом задач для самостоятельного исследования. Она базируется на теории вероятностей и математической статистике. Теория систем массового обслуживания в настоящее время имеет широкую область применения не только в экономике, но и в других жизненно значимых отраслях: в социальной сфере, в военном деле, в области организации производства и обслуживания.

Системы массового обслуживания (СМО) и сети массового обслуживания (СеМО) представляют собой математические модели, предназначенные для анализа и оптимизации процессов, где требования (клиенты, запросы, данные) конкурируют за ограниченные ресурсы (обслуживающие аппараты, каналы, серверы). Несмотря на различия в архитектуре, их объединяет общая цель — эффективное обслуживание поступающих требований с минимальными задержками и отказами.

Современный арсенал моделей теории массового обслуживания (ТМО) позволяет проводить высокоточный анализ в различных сферах. Методы ТМО направлены на поиск оптимальной структуры и организации обслуживания. Контроль времени ожидания и распределение нагрузки между каналами критичны для эффективной работы СМО. Дипломная работа посвящена исследованию системы, в которой массовое обслуживание сопровождается ожиданием и характеризуется наличием полной взаимопомощи между отдельными каналами.

Цель бакалаврской работы: исследовать и проанализировать систему массового обслуживания с ожиданием и полной взаимопомощью между каналами с целью оптимизации процессов обслуживания и повышения эффективности функционирования.

Задачи бакалаврской работы:

1. Изучить основные понятия теории массового обслуживания (ТМО).
2. Изучить систему массового обслуживания с частичной и полной взаимопомощью между каналами.

3. Применить теоретические результаты для моделирования реальных систем.

Данная бакалаврская работа состоит из пяти разделов.

В первом разделе приведён обзор базовых понятий и историческое развитие данной научной дисциплины. Рассмотрены следующие ключевые аспекты: место ТМО в математике, исторический контекст, предмет и задачи ТМО, основные понятия, характеристики СМО, а также классификация СМО.

Раздел закладывает теоретическую основу для дальнейшего исследования, определяя ключевые понятия, этапы развития и задачи, решаемые в рамках теории массового обслуживания.

Во втором разделе рассмотрена постановка задачи и описание модели системы массового обслуживания с ожиданием и полной взаимопомощью между каналами. Сформулированы ключевые характеристики рассматриваемой СМО (n -канальная система, простейший входящий поток с интенсивностью λ , экспоненциальное время обслуживания с интенсивностью μ , полная взаимопомощь между каналами, очередь с максимальной длиной m). Введены понятия состояний системы (количество заявок в системе) и определены возможные переходы между этими состояниями. Построен граф состояний системы, наглядно отображающий возможные переходы между различными состояниями (отсутствие заявок, обслуживание заявок, ожидание в очереди). На основе графа состояний сформулирована система алгебраических уравнений, описывающая стационарный режим работы системы, а также определены основные параметры рассматриваемой системы.

В третьем разделе представлен детальный анализ стационарного режима работы исследуемой системы массового обслуживания с ожиданием и полной взаимопомощью между каналами. Изучена математическая модель, построенная в предыдущем разделе, и введены ключевые характеристики, определяющие эффективность и качество функционирования системы. В результате анализа формируется четкое понимание о том, как функционирует исследуемая СМО в стационарном режиме, и какие факторы оказывают наибольшее влияние на эффективность. Полученные формулы и закономерности служат основой для дальнейшей оптимизации.

В четвертом разделе продемонстрирована практическая применимость разработанной математической модели и полученных аналитических результатов для решения конкретных задач анализа и оптимизации СМО. Численные примеры и графики позволяют наглядно оценить эффективность различных конфигураций системы и выработать рекомендации по оптимизации. Написана программа на языке *Python* для вычисления характеристик систем.

В пятом разделе сформулирована и решена задача вычислительного эксперимента, связанная с оптимизацией работы конкретной СМО. В качестве примера приведена задача по разгрузке судна в порту. Показано применение теоретических результатов в практической задаче, проведена количественная оценка эффективности работы реальной системы, предложены практические рекомендации по улучшению. Раздел служит иллюстрацией применимости теоретического аппарата и показывает конкретные преимущества подхода, описанного в дипломной работе.

1 Основное содержание работы

Постановка задачи следующая: на вход n -канальной системы массового обслуживания поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ . Интенсивность простейшего потока обслуживаний каждого канала μ . Если заявка застаёт все каналы свободными, она принимается на обслуживание и обслуживается всеми n каналами одновременно, при этом производительность увеличивается в n раз. После окончания обслуживания все каналы освобождаются одновременно. Если вновь прибывшая заявка застаёт в системе одну заявку, то она принимается на обслуживание: часть каналов обслуживает первую заявку, другая часть приступает к обслуживанию второй. Разделение каналов приблизительно равномерное. Если в системе обслуживалось k заявок ($k = 0, 1, \dots, n - 1$), то вновь прибывшая заявка принимается на обслуживание и все $k + 1$ заявок обслуживаются n каналами, распределяясь произвольно между заявками, но так, что все каналы заняты обслуживанием. Если в системе имеется n заявок (каждая из них обслуживается одним каналом), то вновь прибывшая заявка встаёт в очередь и ожидает освобождения хотя бы одного из каналов. Если в системе имеется $n + r$ заявок (n из них обслуживается и r ожидают в очереди; $r = 0, 1, 2, \dots, m - 1$), то вновь прибывшая заявка становится в очередь. Максимальное число заявок в очереди m . Если вновь прибывшая заявка застаёт в очереди m заявок, то она получает отказ и исключается из обслуживания. Попавшие в систему заявки (на обслуживание или в очередь) обслуживаются до конца. Состояния рассматриваемой системы будем связывать с числом заявок, находящихся в системе:

x_k - в системе имеется k заявок ($k = 0, 1, \dots, n$), они обслуживаются всеми n каналами, общая производительность обслуживания $n\mu$;

x_{n+r} - в системе имеется $n + r$ заявок ($r = 0, 1, \dots, m$), n из них обслуживаются n каналами (каждый канал обслуживает одну заявку), r заявок ожидает в очереди. Граф состояний такой системы показан на рисунке 1.

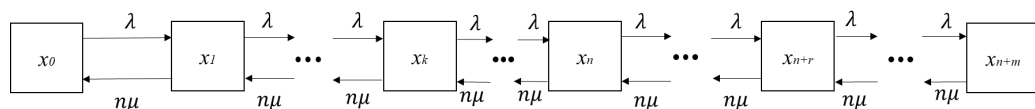


Рисунок 1 – Граф состояний

Рассмотрим стационарный режим работы системы (при $\lambda = const, \mu = const, m < \infty, t \rightarrow \infty$). Он существует, так как система обладает эргодическим свойством. Процесс будет являться эргодическим, если по истечении достаточно продолжительного промежутка времени τ вероятности состояний системы практически не зависят от того, в каком состоянии она находилась в начальный момент времени t_0 и не зависят от самого промежутка времени τ .

СМО будет описываться системой алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} -\lambda p_0 + n\mu p_1 = 0; \\ \dots \\ -(\lambda + n\mu)p_l + \lambda p_{l-1} + n\mu p_{l+1} = 0, (l = 1, \dots, n + m - 1); \\ \dots \\ -n\mu p_{n+m} + \lambda p_{n+m-1} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Пусть $u_i = -\lambda p_{i-1} - n\mu p_i$, ($i = 1, 2, \dots, n + m$), тогда система уравнений (1) примет вид:

$$\begin{cases} u_1 = 0; \\ \dots \\ u_{l+1} - u_l = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, n + m); \\ \dots \\ u_n = 0, \end{cases}$$

Отсюда получаем, что $u_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n + m$).

Следовательно:

$$p_l = \left(\frac{\lambda}{n\mu} \right)^l p_0, \quad (l = 0, 1, \dots, n + m).$$

Введем обозначение

$$\varkappa = \frac{\lambda}{n\mu}.$$

С учетом принятого обозначения, получим

$$p_l = \varkappa^l p_0.$$

Вероятность p_0 найдем из нормировочного условия

$$\sum_{l=0}^{n+m} p_l = \sum_{l=0}^{n+m} \varkappa^l p_0 = p_0 \sum_{l=0}^{n+m} \varkappa^l = p_0 \frac{1 - \varkappa^{n+m+1}}{1 - \varkappa} = 1,$$

откуда

$$p_0 = \frac{1 - \varkappa}{1 - \varkappa^{n+m+1}}.$$

Следовательно, вероятность пребывания в l -ом состоянии ($l = 0, 1, \dots, k, \dots, n, \dots, n + r, \dots, n + m$) будет определяться по формулам:

$$p_l = \begin{cases} \varkappa^l \frac{1 - \varkappa}{1 - \varkappa^{n+m+1}}, & \varkappa \neq 1; \\ \frac{1}{n + m + 1}, & \varkappa = 1, \end{cases}$$

Среднее число заявок, находящихся в системе, найдем из выражения

$$\bar{l} = \sum_{l=0}^{n+m} l p_l = \begin{cases} x \frac{1 - \varkappa^{n+m} [(n + m)(1 - \varkappa) + 1]}{(1 - \varkappa^{n+m+1})(1 - \varkappa)}, & \varkappa \neq 1; \\ \frac{n + m}{2}, & \varkappa = 1. \end{cases}$$

Вероятность обслуживания заявки равна вероятности того, что заявка, поступившая на обслуживание, застанет свободным хотя бы одно место в очереди:

$$P_0 = \sum_{l=0}^{n+m-1} l p_l = 1 - p_{n+m} = \begin{cases} \frac{1 - \varkappa^{n+m}}{(1 - \varkappa^{n+m+1})}, & \varkappa \neq 1; \\ \frac{n + m}{n + m + 1}, & \varkappa = 1. \end{cases}$$

Для нахождения среднего числа занятых каналов воспользуемся равенством

$$P_0 = \frac{\mu \bar{k}}{\lambda},$$

откуда

$$\bar{k} = \alpha P_0 = \begin{cases} \alpha \frac{1 - \varkappa^{n+m}}{(1 - \varkappa^{n+m+1})}, & \varkappa \neq 1; \\ \alpha \frac{n + m}{n + m + 1}, & \varkappa = 1, \end{cases}$$

где

$$\alpha = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Среднее число обслуживаемых заявок определяется формулой

$$\bar{s} = \sum_{l=0}^n l p_{l+n} \sum_{l=n+1}^{n+m} p_l = \begin{cases} \frac{\varkappa}{1-\varkappa^{n+m+1}} \left[\frac{1-\varkappa^n [n(1-\varkappa)+1]}{1-\varkappa} + n[\varkappa^n - \varkappa^{n+m}] \right], & \varkappa \neq 1; \\ \left[\frac{n(n+1)}{2} + nm \right] \frac{1}{n+m+1}, & \varkappa = 1. \end{cases}$$

Рассмотрим основные параметры очереди в такой системе массового обслуживания. Найдем среднее число заявок $\bar{r}$, находящихся в очереди:

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \sum_{r=1}^m r p_{n+r} = \varkappa^n \varkappa^r \frac{1-\varkappa}{1-\varkappa^{n+m+1}} r = \\ &= p_n \sum_{r=0}^m r \varkappa^r = p_n \varkappa \frac{1-\varkappa^m [m(1-\varkappa)+1]}{(1-\varkappa)^2} \quad (\varkappa \neq 1), \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$p_n = \varkappa_n \frac{1-\varkappa}{1-\varkappa^{n+m+1}} \quad (5)$$

вероятность того, что в системе будет ровно n заявок, но очереди не будет. При $x = 1$ получим выражение:

$$\bar{r} = p_n \frac{m(m+1)}{2}, \quad (6)$$

где

$$p_n = \frac{1}{1+n+m}.$$

Заметим, что при любых значениях x должно выполняться равенство

$$\bar{l} = \bar{s} + \bar{r},$$

то есть среднее число заявок в системе равно сумме среднего числа обслуживаемых заявок и среднего числа заявок, ожидающих в очереди.

Среднее время пребывания заявки в очереди будет равно

$$\bar{t}_{och} = \frac{\bar{r}}{\lambda},$$

где величина $\bar{r}$ определяется в зависимости от значения $\varkappa$ либо из выражения (4), либо из выражения (6).

Среднее время пребывания заявки в очереди

$$\bar{t}_{och} = \frac{\bar{r}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \frac{\varkappa^{n+1}}{1 - \varkappa}.$$

Среднее время пребывания заявки в системе найдем из выражения:

$$\bar{t} = \frac{\bar{l}}{\lambda} = \frac{\bar{r} + \bar{s}}{\lambda} = \begin{cases} \frac{1}{n\mu} \frac{1 - \varkappa^{n+m}[(n+m)(1 - \varkappa) + 1]}{(1 - \varkappa^{n+m+1})(1 - \varkappa)}, & (\varkappa \neq 1); \\ \frac{n+m}{2\lambda}, & (\varkappa = 1). \end{cases}$$

При $m \rightarrow \infty$ и $\varkappa < 1$ получим

$$\bar{t} = \frac{\bar{l}}{\lambda} = \frac{1}{n\mu} \frac{1}{1 - \varkappa}.$$

Рассмотрим СМО с ожиданием и частичной взаимопомощью, когда каналы могут помогать друг другу, объединяясь в группы, наибольший состав которых равен $l < n$. При занятии всех каналов очередная пришедшая заявка не получает отказ, а может встать в очередь, число мест в которой равно m .

В качестве входных параметров возьмем $\lambda = 30$, $\mu = 2$, $n = 16$, $m = 4$, $l = 1, 2, \dots, 16$. (интенсивность, интенсивность обслуживания каждого канала, количество каналов, число мест в очереди, количество каналов в группе) Для вычисления числовых характеристик была написана программа на языке программирования *Python*. Характеристики приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Числовые характеристики для системы массового обслуживания с ожиданием и частичной взаимопомощью между каналами

P_0	k	r	l	s	t_{och}	t
0.9768	14.6525	0.2321	0.3119	0.0798	0.0077	0.0104

Меняя l , можно увидеть, как ведут себя характеристики системы. Например, график зависимости вероятности обслуживания требований приведен на рисунке 2. График показывает, что при увеличении l вероятность обслуживания заявки увеличивается.

Можно заметить, что при $l = 1$, $P_0 = 0.9252$. Данная характеристика совпадает с аналогичной характеристикой системы массового обслуживания с ожиданием. Если же $l = 16$, $P_0 = 0.9768$, что совпадает с аналогичной характеристикой системы массового обслуживания с ожиданием и полной взаимопомощью между каналами. График зависимости среднего числа занятых каналов приведен на рисунке 3.

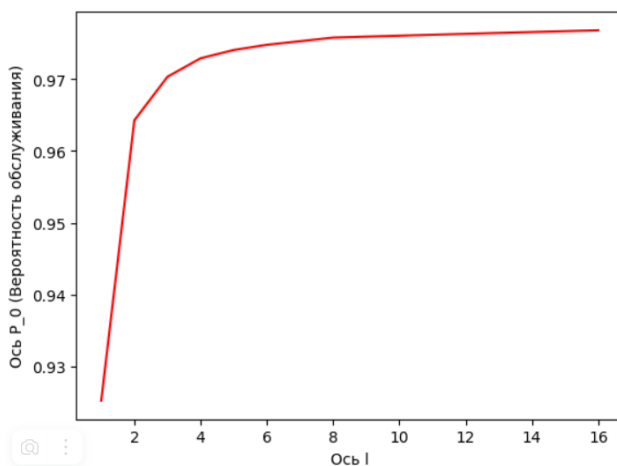


Рисунок 2 – График зависимости вероятности обслуживания требований

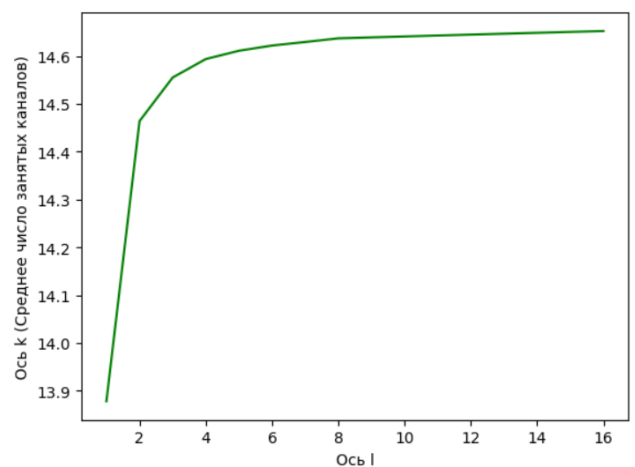


Рисунок 3 – График зависимости среднего числа занятых каналов

Из приведённого выше графика, можно сделать следующие выводы: при $l = 1$, $k = 13.806$ данная характеристика совпадает с аналогичной характеристикой системы массового обслуживания с ожиданием. Если же $l = 16$, $k = 14.6525$, что совпадает с аналогичной характеристикой системы массового обслуживания с ожиданием и полной взаимопомощью между каналами.

Исходя из предыдущих выводов, можно утверждать, что система массового обслуживания с ожиданием, в которой между каналами существует частичная взаимопомощь, обладает характеристиками, совпадающими с характеристиками системы массового обслуживания с ожиданием и системы массового обслуживания с ожиданием и полной взаимопомощью между ка-

налами. Другими словами, данные две системы являются предельными случаями системы массового обслуживания с ожиданием и частичной взаимопомощью между каналами.

Рассмотрим задачу вычислительного эксперимента, связанную с оптимизацией работы конкретной СМО. В порту работает n кранов (каналов обслуживания) для разгрузки судов. Прибывающие суда образуют пуассоновский поток с интенсивностью λ (судов/сутки). Время разгрузки одного судна распределено экспоненциально со средним значением $1/\mu$.

Необходимо:

1. Определить стационарные вероятности состояний системы $p_0, p_1, \dots, p_{n+m}$, где m – максимальное число судов в очереди.
2. Найти среднее число судов в очереди $\bar{r}$ и среднее время ожидания $\bar{t}_{оч}$.
3. Определить вероятность обслуживания $P_{обс}$ и коэффициент загрузки кранов π_k .
4. Рассмотреть частный случай при $n = 27$, $\lambda = 12$, $\mu = 0.46$ (52 часа), $m = 4$.

Характеристики системы:

- Стационарные вероятности состояний системы

$$p_k = \begin{cases} \left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^k p_0, & \text{если } 0 \leq k \leq n+m, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{n+m} \left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^k \right)^{-1} = \frac{1 - \frac{\lambda}{n\mu}}{1 - \left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^{n+m+1}}.$$

- Среднее число судов в очереди: $\bar{r} = \sum_{k=n+1}^{n+m} (k-n)p_k$.
- Вероятность обслуживания: $P_{обс} = 1 - p_{n+m}$.
- Коэффициент загрузки кранов: $\pi_k = \frac{\bar{k}}{n}$, где $\bar{k} = \frac{\lambda P_{обс}}{\mu}$.

Возьмем следующие значения параметров $n = 27$, $\lambda = 12$, $\mu = 0.46$, $m = 4$.

1. Параметр нагрузки системы: $\varkappa = \frac{\lambda}{n\mu} = \frac{12}{27 \cdot 0.46} = 0.9662$.

Параметр нагрузки системы 0,9662 показывает, что система близка к

предельной загрузке. Значение меньше 1 гарантирует существование стационарного режима, но близость к 1 указывает на потенциальные риски:

- При увеличении λ или уменьшении μ система может стать неустойчивой ($\kappa \geq 1$).
 - Рекомендуется мониторинг интенсивности прибытия судов и производительности кранов.
2. Стационарные вероятности: $p_0 = \frac{1-0.9662}{1-0.9662^{32}} \approx 0.05066$.
 $p_k = 0.9662^k \cdot 0.05066, \quad k = 0, 1, \dots, 31$.
 3. Вероятность обслуживания: $P_{\text{обс}} = 1 - 0.9662^{31} \cdot 0.05066 \approx 0.9825$.
 4. Среднее число судов в очереди:
 $\bar{r} = \sum_{r=1}^m r \cdot p_{n+r} = \sum_{r=1}^4 r \cdot 0.9662^{27+r} \cdot 0.05066 \approx 0.17957$.
 5. Коэффициент загрузки кранов π_k .
 $\pi_k = \frac{\bar{k}}{n}$, где $\bar{k} = \frac{\lambda P_{\text{обс}}}{\mu}$.
 $\bar{k} = \frac{12 \cdot 0.9825}{0.46} \approx 25.63$.
 $\pi_k = \frac{22.74}{27} \approx 0.9493$. Краны загружены на 95%.

Показатель вероятности обслуживания равный 98.25% достаточно хороший, но:

- при увеличении m (очереди) вероятность обслуживания возрастет, но возрастут и затраты на хранение очереди.
- Альтернатива: увеличение числа кранов n . Характеристики, посчитанные при различных n представлены в таблице 2.

Таблица 2 – Характеристики системы при различном количестве каналов

n	κ	p_0	$P_{\text{обс}}$	$\bar{r}$	π_k
27	0.9662	0.05066	0.9825	0.17957	0.9493
29	0.8995	0.10378	0.9969	0.03459	0.8968
31	0.8415	0.15832	0.9996	0.00464	0.8412

На основе анализа математической модели и вычислительного эксперимента можно сделать следующие выводы:

- Стабильность системы: параметр нагрузки $\kappa = \frac{\lambda}{n\mu}$ определяет устойчивость системы. При $\kappa < 1$ система работает в стационарном режи-

ме, а при $\kappa \geq 1$ возникает перегрузка. В рассмотренном примере при $n = 27$ система близка к пределу ($\kappa = 0.9662$), что требует мониторинга интенсивности входящего потока λ .

- Эффективность обслуживания: вероятность обслуживания $P_{\text{обс}}$ достигает 98.25% при $n = 27$, а при увеличении числа каналов до 29 и 31 приближается к 99.7%, что соответствует высокому уровню сервиса. Средняя длина очереди $\bar{r}$ резко уменьшается с ростом n , что снижает время ожидания заявок.
- Загрузка ресурсов: коэффициент загрузки кранов π_k при $n = 27$ составляет 94.93%, что указывает на высокую эксплуатационную нагрузку. Увеличение числа каналов до $n = 29$ снижает загрузку до 89.68%, улучшая устойчивость системы без значительного простоя ресурсов.
- Рекомендации по оптимизации: наиболее сбалансированным вариантом является $n = 29$ каналов, так как это обеспечивает: высокую вероятность обслуживания (99.69%), минимальную очередь ($\bar{r} \approx 0.0346$) разумную загрузку ресурсов ($\sim 90\%$). Дальнейшее увеличение числа каналов (например, до $n = 31$) нецелесообразно, так как приводит к снижению коэффициента загрузки (84.12%) без существенного улучшения вероятности обслуживания.

Исследование подтвердило, что система массового обслуживания с ожиданием и полной взаимопомощью между каналами обеспечивает высокую пропускную способность и качество обслуживания при правильном выборе параметров. Оптимальное количество каналов ($n = 29$) позволяет достичь баланса между надежностью, скоростью обработки заявок и экономической эффективностью. Полученные результаты могут служить основой для проектирования и оптимизации реальных СМО в различных отраслях.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенное исследование системы массового обслуживания с ожиданием и полной взаимопомощью между каналами позволило получить значимые теоретические и практические результаты. Работа включала комплексный анализ математической модели, разработку методов расчета характеристик системы и их апробацию на примере задачи разгрузки судов в порту.

Теоретическая часть исследования опиралась на положения теории случайных процессов и современные подходы к моделированию систем обслуживания. Разработанная математическая модель с учетом полной взаимопомощи между каналами позволила вывести аналитические выражения для стационарных характеристик системы.

Практическая значимость работы подтверждена результатами численного анализа, демонстрирующими эффективность предложенного подхода. Рассмотрены ключевые компоненты системы: входные/выходные потоки и процесс обслуживания, с акцентом на такие характеристики, как интенсивность обслуживания, среднее время пребывания в системе и вероятность образования очереди.

Разработанные рекомендации по оптимизации работы системы применимы в логистике, телекоммуникациях и сфере услуг. Особую ценность представляют методы управления ресурсами, обеспечивающие баланс между качеством обслуживания и экономической эффективностью.

Результаты исследования подтвердили эффективность принципа полной взаимопомощи между каналами и создают основу для совершенствования методов анализа сложных систем массового обслуживания. Разработанные подходы могут служить надежным инструментом для специалистов в области исследования операций и системного анализа.