

Министерство образования и науки Российской Федерации  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теории функций и стохастического анализа

**ИССЛЕДОВАНИЕ И АНАЛИЗ СИСТЕМЫ МАССОВОГО  
ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОТКАЗАМИ И НЕДОСТОВЕРНЫМ  
ОБСЛУЖИВАНИЕМ**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 412 группы  
направления 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Хабиева Дамира Руслановича

Научный руководитель

ст. преподаватель

\_\_\_\_\_

Н. В. Сергеева

Заведующий кафедрой

д. ф.-м. н., доцент

\_\_\_\_\_

С. П. Сидоров

Саратов 2025

## ВВЕДЕНИЕ

Теория систем массового обслуживания — это область прикладной математики, являющаяся частью теории случайных процессов. Она занимается анализом процессов, в которых множество заявок конкурируют за ограниченные ресурсы обслуживания. Теория массового обслуживания базируется на теории вероятностей и математической статистике и находит широкое применение в телекоммуникациях, медицине, логистике, ИТ-сфере, промышленности и других отраслях.

Системы массового обслуживания (СМО) моделируют процессы, в которых поступающие требования (заявки, клиенты, сигналы) распределяются между обслуживающими устройствами (каналами, серверами) по определённым правилам. Сложность этих систем возрастает при наличии факторов, таких как ограничения на число каналов, возможность отказов в обслуживании, а также недостоверность выполнения процедуры обслуживания.

Современные методы теории массового обслуживания (ТМО) позволяют разрабатывать и анализировать сложные модели, учитывающие отказоустойчивость и достоверность. Такие модели необходимы в системах, где отказ или ошибка обслуживания могут привести к значительным потерям — например, в медицинских учреждениях. В данной работе рассматривается система, в которой массовое обслуживание сопровождается возможными отказами и недостоверным результатом даже при успешном завершении процедуры.

**Цель бакалаврской работы:** исследовать и проанализировать систему массового обслуживания с отказами и недостоверным обслуживанием с целью повышения её надёжности и оптимизации работы системы.

### **Задачи бакалаврской работы:**

1. Изучить основные понятия и модели теории массового обслуживания.
2. Описать и проанализировать СМО с отказами и недостоверным обслуживанием.
3. Разработать имитационную модель системы и сравнить её с теоретическим анализом.

Данная бакалаврская работа состоит из четырёх разделов.

**В первом разделе** рассмотрены основные понятия и принципы построения систем массового обслуживания. Приведён обзор литературы, посвящённой СМО, включая классические и современные подходы, используемые при анализе систем с отказами и недостоверностью.

**Во втором разделе** сформулирована математическая модель СМО с отказами и недостоверным обслуживанием. Рассматривается система с ограниченным числом каналов, пуассоновским входящим потоком с интенсивностью  $\lambda$ , экспоненциальным распределением времени обслуживания с параметром  $\mu$ , вероятностью отказа при перегрузке системы и вероятностью ошибки результата. Введены состояния системы, построен граф состояний и получена система уравнений для стационарного анализа.

**В третьем разделе** решены задачи СМО с отказами и недостоверным обслуживанием. Проведен аналитический расчет вероятностей состояний системы, определены средние значения числа обслуживаемых и отказанных заявок, коэффициента загрузки каналов, времени пребывания заявок в системе и надежности обслуживания. Полученные аналитические выражения позволяют оценивать поведение системы при различных значениях параметров

**В четвёртом разделе** реализована имитационная модель на языке Python, отражающая работу реальной поликлиники. Модель учитывает параметры потока, отказов и недостоверности. Проведены вычислительные эксперименты, сравнение с теоретическими результатами и анализ влияния различных факторов на производительность системы

## 1 Основное содержание работы

*Постановка задачи.* Рассматривается  $n$ -канальная система массового обслуживания, в которую поступает простейший поток заявок с интенсивностью  $\lambda$ . Время обслуживания одной заявки каждым каналом подчиняется экспоненциальному распределению с параметром  $\mu$ . Пусть  $\alpha = \lambda/\mu$  — среднее число заявок, поступающих за время обслуживания одной заявки.

Если вновь поступившая заявка застаёт все  $n$  каналов занятыми, она получает отказ. Если хотя бы один канал свободен, заявка поступает на обслуживание. Однако, даже после завершения обслуживания результат оказывается достоверным только с вероятностью  $p$ ; с вероятностью  $1 - p$  обслуживание считается ошибочным.

Такая система отличается от классической модели СМО с отказами тем, что заявка считается окончательно обслуженной только при прохождении двух последовательных этапов: 1) принятие к обслуживанию и 2) успешное выполнение обслуживания. Таким образом, модель можно рассматривать как двухступенчатую СМО. Схема модели представлена на рисунке 1.

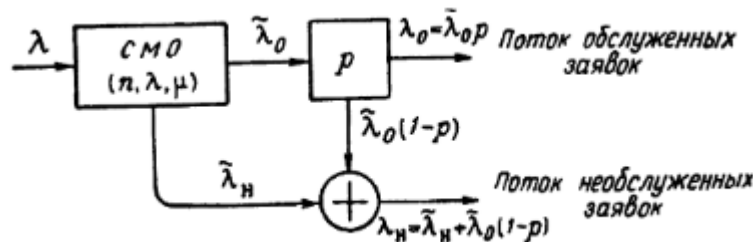


Рисунок 1 – Схема обслуживания СМО с отказами и недостоверным обслуживанием

Граф состояний данной системы аналогичен классической СМО с отказами, а потому вероятности состояний и основные временные характеристики системы совпадают с уже известными выражениями. Отличие заключается в том, что итоговая вероятность успешного обслуживания определяется как произведение двух вероятностей:

$$P_{\text{обс}} = (1 - p_n) \cdot p = \frac{R(n-1, \alpha)}{R(n, \alpha)} \cdot p,$$

где  $p_n$  — вероятность отказа,  $R(n, \alpha) = \sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha}$  — табличная сумма распределения Пуассона.

Абсолютная пропускная способность системы:

$$\lambda_0 = \lambda \cdot P_{\text{обс}} = \lambda \cdot p \cdot \frac{R(n-1, \alpha)}{R(n, \alpha)}.$$

### Основные расчетные формулы

Среднее число занятых каналов:  $\bar{k} = \sum_{k=0}^n k p_k = \frac{\sum_{k=0}^n k P(k, \alpha)}{R(n, \alpha)} = \alpha \cdot \frac{R(n-1, \alpha)}{R(n, \alpha)}.$

Вероятность обслуживания заявки:  $P_{\text{обс}} = \frac{\mu \cdot \bar{k}}{\lambda} \cdot p = (1 - p_n) \cdot p = \frac{\lambda_0}{\lambda}.$

Вероятность того, что взятый наугад канал занят:  $\pi_{\text{з.к}} = \frac{\bar{k}}{n} = \frac{\alpha}{n} \cdot \frac{R(n-1, \alpha)}{R(n, \alpha)}.$

Вероятность полной загрузки системы:  $\pi_{\text{п.з}} = p_n = 1 - \frac{P_{\text{обс}}}{p}.$

Среднее время занятости канала:  $\overline{t_{\text{з.к}}} = \frac{1}{\mu}.$

Среднее время простоя канала:  $\overline{t_{\text{п.к}}} = \overline{t_{\text{з.к}}} \cdot \frac{1 - \pi_{\text{з.к}}}{\pi_{\text{з.к}}}.$

Среднее время полной загрузки системы:  $\overline{t_{\text{з.с}}} = \frac{1}{n\mu}.$

Среднее время неполной загрузки системы:  $\overline{t_{\text{п.з}}} = \overline{t_{\text{з.с}}} \cdot \frac{1 - \pi_{\text{п.з}}}{\pi_{\text{п.з}}}.$

Среднее время пребывания заявки в системе:  $\bar{t} = \frac{\bar{k}}{\lambda}.$

Таким образом, все основные характеристики системы массового обслуживания с отказами и недостоверным обслуживанием получаются на основе классической модели СМО с отказами, скорректированной с учётом вероятности ошибки на этапе обслуживания.

### Имитационная модель

В рамках работы была разработана имитационная модель поликлиники, представляющая собой систему массового обслуживания с отказами и недостоверным обслуживанием. В модели учитываются конечное число обслуживающих каналов (врачей), поток пациентов, вероятность получения недостоверного обслуживания (например, в случае постановки ошибочного диагноза), а также возможность отказа в обслуживании при полной загрузке системы.

Модель реализована с использованием языка программирования Python на основе дискретно-событийного подхода. В процессе моделирования производился сбор статистических данных о числе отказов, повторных обращений, средней нагрузке на систему, времени ожидания и других характеристиках. Особое внимание уделено исследованию влияния количества врачей на ключевые показатели эффективности функционирования системы.

### Алгоритм моделирования

1. Инициализация параметров системы.
2. Генерация пациентов на основе экспоненциального распределения времени между их прибытием.
3. Обработка событий: прибытие пациента, консультация, отказ при недостоверном обслуживании.
4. Сбор и анализ данных для оценки показателей системы.

### Параметры

- Количество врачей  $n$ : 3
- Среднее время между прибытием пациентов  $\bar{t}_\lambda$ : 6 минут
- Среднее время консультации  $\bar{t}_{з.к}$ : 30 минут
- Общее время симуляции  $T_s$ : 10000 минут
- Вероятность недостоверного обслуживания  $1 - P_{обс}$ : 0.1

### Описание кода

#### *Класс Event*

Класс **Event** описывает событие, происходящее в системе обслуживания:

- **time** — момент времени, когда должно произойти событие;
- **action** — тип события (прибытие или консультация);
- **patient\_id** — идентификатор пациента.

#### *Класс Polyclinic*

Класс **Polyclinic** моделирует работу поликлиники как системы массового обслуживания с отказами и недостоверным обслуживанием. Основные поля класса:

- **num\_doctors** — общее количество врачей (каналов обслуживания);
- **available\_doctors** — текущее количество свободных врачей;
- **event\_queue** — приоритетная очередь событий;
- **arrivals** — общее количество пациентов, пришедших в систему;
- **primary\_refusals** — количество отказов по причине полной занятости;
- **secondary\_refusals** — количество отказов из-за недостоверного обслуживания;
- **total\_busy\_time** — общее время, в течение которого каналы были заняты;
- **last\_event\_time** — время последнего обработанного события;
- **entry\_time** — словарь, хранящий момент прибытия каждого пациента;

- `service_times` — список времён пребывания пациентов в системе;
- `consult_times` — список длительностей консультаций.

*Методы класса `Polyclinic`:*

- `schedule_event(time, action, patient_id)` — добавляет новое событие в очередь;
- `process_event(event)` — обрабатывает событие (прибытие или завершение консультации):
  - если пациент прибыл и врач свободен — начинается консультация;
  - если все врачи заняты — фиксируется первичный отказ;
  - по завершении консультации врач освобождается;
  - если обслуживание недостоверно (с вероятностью  $p$ ), фиксируется вторичный отказ.

*Функция `simulate`*

Функция моделирует работу поликлиники на заданном временном интервале:

- формирует поток событий (прибытие пациентов);
- последовательно обрабатывает события до завершения моделирования.

*Визуализация*

Используется библиотека `matplotlib` для построения:

- гистограммы распределения времени консультаций;
- круговой диаграммы по долям достоверных и недостоверных обслуживаний;
- круговой диаграммы отказов по причине занятости.

### **Анализ полученных результатов**

В результате работы модели получены данные, показанные на рисунках 2,3,4,5

--- Характеристики моделирования ---

1. Интенсивность  $\lambda$  (теор.): 0.167
2. Интенсивность  $\mu$ : 0.033
3. Нагрузка  $\alpha = \lambda / \mu$ : 5.000000
4.  $R(2, \alpha) = 0.12$ ,  $R(3, \alpha) = 0.27$
5. Среднее число занятых каналов (теория): 2.35  
Среднее число занятых каналов (модель): 2.38
6. Вероятность обслуживания  $P_{\text{обс}}$ : 0.427
7. Вероятность занятого канала  $\pi_{\text{з.к}}$ : 0.79
8. Вероятность полной загрузки  $\pi_{\text{п.з}}$ : 0.53
9. Среднее время занятости канала: 30.00 мин
10. Среднее время простоя канала: 7.80 мин
11. Время полной загрузки системы: 10.00 мин
12. Время неполной загрузки системы: 9.04 мин
13. Время пребывания заявки (модель): 31.91 мин  
Время пребывания (теория): 33.33 мин

Рисунок 2 – Характеристики СМО при 3 обслуживающих приборах

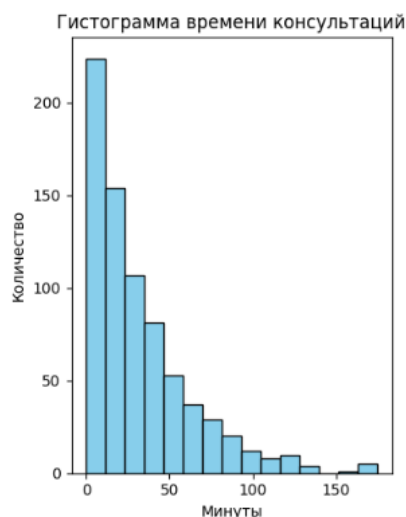


Рисунок 3 – Гистограмма распределения времени консультаций при 3 обслуживающих приборах



Рисунок 4 – Диаграмма распределения обращений при 3 обслуживающих приборах



Рисунок 5 – Диаграмма распределения отказов при 3 обслуживающих приборах

Сравним полученные результаты с результатами, вычисленными по теоретическим формулам, как показано на таблице 1:

1. Средняя интенсивность появления заявок,  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{1}{t_{\lambda}} = \frac{1}{6} = 0.167 \text{ заявок в минуту.}$$

2. Средняя интенсивность обслуживания,  $\mu$ :

$$\mu = \frac{1}{t_{\mu}} = \frac{1}{30} = 0.033 \text{ обслуживаний в минуту.}$$

3. Параметр,  $\alpha$ :

$$\alpha = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0.167}{0.033} = 5.06.$$

4. Функция пуассоновского распределения  $R(n, \alpha)$ :

$$R(n, \alpha) = \sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha},$$

Для  $n = 2$  и  $\alpha = 5.06$ :

$$R(2, 5.06) = \sum_{k=0}^2 \frac{5.06^k}{k!} 2.71^{-5.06} = 0.12.$$

Для  $n = 3$  и  $\alpha = 5.06$ :

$$R(3, 5.06) = \sum_{k=0}^3 \frac{5.06^k}{k!} 2.71^{-5.06} = 0.27.$$

Для  $n = 4$  и  $\alpha = 5.06$ :

$$R(4, 5.06) = \sum_{k=0}^4 \frac{5.06^k}{k!} 2.71^{-5.06} = 0.44.$$

Для  $n = 5$  и  $\alpha = 5.06$ :

$$R(5, 5.06) = \sum_{k=0}^5 \frac{5.06^k}{k!} 2.71^{-5.06} = 0.62.$$

5. Среднее число занятых каналов,  $\bar{k}$ :

$$\bar{k} = a \frac{R(n-1, \alpha)}{R(n, \alpha)} = 5.06 \frac{56.95}{138.71} = 2.33.$$

6. Вероятность обслуживания заявки,  $P_{\text{обс}}$ :

$$P_{\text{обс}} = \frac{\mu \bar{k}}{\lambda} p = \frac{0.033 \times 2.19}{0.167} (1 - 0.1) = 0.418.$$

7. Вероятность того, что взятый наугад канал занят,  $\pi_{з.к}$ :

$$\pi_{з.к} = \frac{\bar{k}}{n} = \frac{2.19}{3} = 0.78.$$

8. Вероятность полной загрузки системы,  $\pi_{п.з}$ :

$$\pi_{п.з} = 1 - \frac{P_{обс}}{p} = 1 - \frac{0.418}{1 - 0.1} = 0.54.$$

9. Среднее время занятости канала,  $\overline{t_{з.к}}$ :

$$\overline{t_{з.к}} = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{0.033} = 30 \text{ минут.}$$

10. Среднее время простоя канала,  $\overline{t_{п.к}}$ :

$$\overline{t_{п.к}} = \overline{t_{з.к}} \frac{1 - \pi_{з.к}}{\pi_{з.к}} = 30 \frac{1 - 0.78}{0.78} = 8.67 \text{ минут.}$$

11. Среднее время полной загрузки системы,  $\overline{t_{з.с}}$ :

$$\overline{t_{з.с}} = \frac{1}{n\mu} = \frac{1}{3 \times 0.033} = 10 \text{ минут.}$$

12. Среднее время неполной загрузки системы,  $\overline{t_{п.з}}$ :

$$\overline{t_{п.з}} = \overline{t_{п.к}} \frac{1 - \pi_{п.з}}{\pi_{п.з}} = 10 \frac{1 - 0.54}{0.54} = 8.65 \text{ минуты.}$$

13. Среднее время пребывания заявки в системе,  $\bar{t}$ :

$$\bar{t} = \frac{\bar{k}}{\lambda_O} = \frac{\bar{k}}{\lambda P_{обс}} = \frac{2.33}{0,07} = 33.29 \text{ минут.}$$

Таблица 1 – Сравнение теоретических и модельных результатов

| № | Показатель                        | Теоретический | Модельный | Отклонение (%) |
|---|-----------------------------------|---------------|-----------|----------------|
| 1 | $\bar{k}$                         | 2.33          | 2.38      | 2.15           |
| 2 | $P_{\text{обс}}$                  | 0.418         | 0.427     | 2.15           |
| 3 | $\pi_{\text{з.к}}$                | 0.78          | 0.79      | 1.28           |
| 4 | $\pi_{\text{п.з}}$                | 0.54          | 0.53      | 1.85           |
| 5 | $\overline{t_{\text{з.к}}}$ (мин) | 30.00         | 30.00     | 0.00           |
| 6 | $\overline{t_{\text{п.к}}}$ (мин) | 8.67          | 7.80      | 10.04          |
| 7 | $\overline{t_{\text{з.с}}}$ (мин) | 10.00         | 10.00     | 0.00           |
| 8 | $\overline{t_{\text{п.з}}}$ (мин) | 8.65          | 9.04      | 4.51           |
| 9 | $\bar{t}$ (мин)                   | 33.29         | 31.91     | 4.14           |

### Решения для оптимизации системы

#### *Увеличение количества врачей*

Для того, чтобы улучшить систему массового обслуживания и сократить количество отказов, одной из основных причин которых является недостаточное количество доступных врачей, можно увеличить число врачей в нашей модели до 5. Остальные параметры остаются без изменений. Рассмотрим это изменение подробнее на рисунках 6,7,8,9. В результате, значительно уменьшился процент отказов, уменьшилась вероятность полной загрузки системы и увеличилась вероятность обслуживания заявки, по сравнению с работой системы с 3 врачами.

#### *Мониторинг и анализ данных*

Отсутствие данных или недостаточная информация для принятия решений по оптимизации мешает системе развиваться до своего максимально эффективного состояния.

#### *Оптимизация времени консультаций*

Анализ и оптимизация процесса консультации врачей, например, обучение врачей улучшению эффективности консультирования снизят среднее время обслуживания клиента.

--- Характеристики моделирования ---

1. Интенсивность  $\lambda$  (теор.): 0.167
2. Интенсивность  $\mu$ : 0.033
3. Нагрузка  $\alpha = \lambda / \mu$ : 5.000000
4.  $R(4, \alpha) = 0.44$ ,  $R(5, \alpha) = 0.62$
5. Среднее число занятых каналов (теория): 3.58  
Среднее число занятых каналов (модель): 3.56
6. Вероятность обслуживания  $P_{\text{обс}}$ : 0.628
7. Вероятность занятого канала  $\pi_{\text{з.к}}$ : 0.71
8. Вероятность полной загрузки  $\pi_{\text{п.з}}$ : 0.30
9. Среднее время занятости канала: 30.00 мин
10. Среднее время простоя канала: 12.17 мин
11. Время полной загрузки системы: 6.00 мин
12. Время неполной загрузки системы: 13.86 мин
13. Время пребывания заявки (модель): 28.67 мин  
Время пребывания (теория): 33.33 мин

Рисунок 6 – Характеристики СМО при 5 обслуживающих приборах

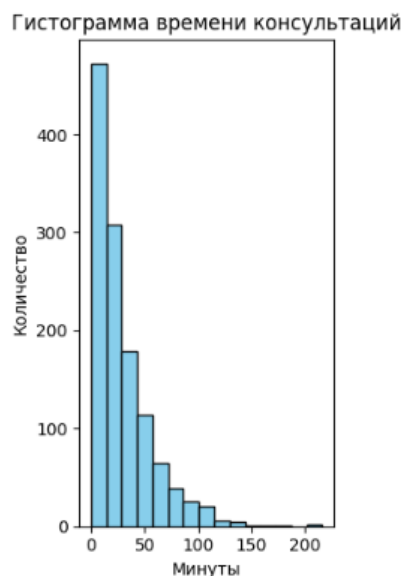


Рисунок 7 – Гистограмма распределения времени консультаций при 5 обслуживающих приборах



Рисунок 8 – Диаграмма распределения обращений при 5 обслуживающих приборах



Рисунок 9 – Диаграмма распределения отказов при 5 обслуживающих приборах

В результате сравнения соответствующих характеристик, полученных на основе имитационной модели и по теоретическим формулам, можно сказать, что имитационная модель хорошо описывает функционирование рассмотренной системы. Далее можно менять параметры системы, законы распределения времени между моментами поступления требований в систему и времени обслуживания. Можно ввести в модель возможность возврата требований, которые были приняты к обслуживанию, но не обслужились (недостоверное обслуживание), и посмотреть как изменятся характеристики системы.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлены результаты исследования системы массового обслуживания с отказами и недостоверным обслуживанием. Основное внимание уделено построению имитационной модели, отражающей работу поликлиники, в которой возможны как отказы пациентов при полной загрузке системы, так и недостоверные консультации, приводящие к повторным обращениям.

В ходе работы были рассмотрены математические основы функционирования подобных систем, реализована программная модель, выполнены численные эксперименты и проведён сравнительный анализ при различном количестве обслуживающих каналов. Особое внимание уделено изучению влияния числа врачей на ключевые характеристики системы: вероятность отказа, нагрузку на систему, среднее время ожидания и общее качество обслуживания.

Результаты моделирования подтвердили, что увеличение числа каналов обслуживания позволяет существенно повысить эффективность функционирования системы и снизить долю необслуженных и повторно обратившихся пациентов. Построенная модель соответствует теоретическим ожиданиям и может быть использована для анализа и оптимизации реальных медицинских учреждений.

Полученные результаты обладают прикладной значимостью и могут быть использованы при планировании ресурсов и разработке управленческих решений в системах здравоохранения.