Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теории функций и стохастического анализа

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ РЫНКА НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА СПРОСА И ПРЕДЛОЖЕНИЯ.

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 4 курса 412 группы
направления 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета
Фисенко Екатерины Владимировны

Научный руководитель
к. ф.м. н., доцент ______________ Е. В. Гудошникова

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., доцент ______________ С. П. Сидоров

Саратов 2025

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Современные рыночные отношения представляют собой сложную систему взаимодействия производителей и потребителей, где ключевую роль играют спрос и предложение. Математическое моделирование этих процессов позволяет не только анализировать текущее состояние рынка, но и прогнозировать его развитие, учитывая различные социально-экономические факторы. В условиях динамично изменяющейся экономики и разнообразия социальных моделей (социалистической, капиталистической, рабовладельческой) **актуальность исследования** заключается в разработке универсального инструмента для оценки эффективности каждой из этих моделей. Такой подход помогает понять, как различные стратегии взаимодействия производителей и потребителей влияют на экономическое равновесие и социальную направленность развития общества.

Целью данной работы является построение математической модели рынка, которая позволяет анализировать и прогнозировать его развитие при различных социально-экономических условиях. В частности, исследование направлено на сравнение трёх моделей: социалистической (равнозначное значение целей производителей и потребителей), капиталистической (игнорирование целей потребителей) и рабовладельческой (игнорирование целей производителей). На примере отрасли сельского хозяйства демонстрируется применение модели для оценки социальной направленности развития общества.

Для достижения цели в работе решаются следующие **задачи**:

1. Построение математической модели спроса и предложения, учитывающей цели производителей и потребителей.
2. Адаптация модели для трёх социально-экономических систем: социалистической, капиталистической и рабовладельческой.
3. Проведение численного моделирования на примере отрасли сельского хозяйства и анализ полученных результатов.
4. Оценка социальной направленности развития общества на основе результатов моделирования.

Данная бакалаврская работа состоит из шести разделов, введения и заключения.

1 Основное содержание работы

В **первом разделе** построена математическая модель спроса и предложения. Иллюстрация которой задана на рисунке 1

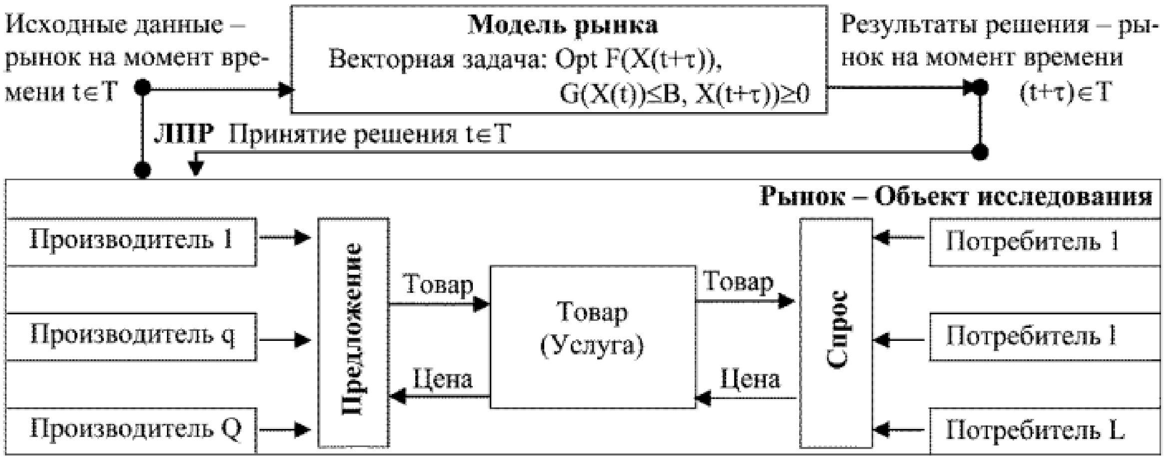

Рисунок 1 – Схема взаимосвязи рынка с математической моделью

Первая подсистема рынка представлена Q производителями: $q = \overline{1, Q}$, где Q – число, q – индекс, а $\mathbf{Q}$ – множество индексов производителей (фирм) $\mathbf{Q} = \overline{1, Q}$;

вторая подсистема представлена L потребителями продукта отрасли: $l = \overline{1, L}$, где l – индекс, $\mathbf{L}$ – множество потребителей;

третья подсистема связующая – товар.

При линейной функции спроса

$$\theta_x^d = \alpha_0' + \alpha_x c_x + \alpha_y c_y + \alpha_b b_x + \alpha_h h_x,$$

где $\alpha_0, \alpha_x, \alpha_y, \alpha_b, \alpha_h$ – фиксированные коэффициенты, получена формула стоимости в виде:

$$c_x - \sum_{q=1}^{q} a_q x_{ql}(t) = b^d, \forall l \in L,$$

где c_x-цена товара, a_q - себестоимость еденицы произведенной продукции, $x_{ql}(t)$- объём продукции, купленный l-ым потребителем у q-го продавца, b^d-константа в уравнении спроса с ограничениями

$$b_l^{min} \leq \sum_{q=1}^{Q} c_q x_{ql}(t) \leq b_l^{max}, l = \overline{1, L}$$

где c_q– стоимость единицы товара, установленной q-й фирмой на рынке, x_{ql}(t)- объём продукции, купленный l-ым потребителем у q-го продавца, b_l^{max},b_l^{min}- минимальный и максимальный бюджет потребителя.

Аналогично при линейной функции предложения

$$\theta_x^s = \beta_0' + \beta_x c_x + \beta_w c_w + \beta_r p_r + \beta_h h_x,$$

где $\beta_0', \beta_x, \beta_w, \beta_r, \beta_h$-фиксированные коэффициенты, получена формула стоимости в виде:

$$c_x - \sum_{l=1}^{L} a_l x_{ql}(t) = b^s, \forall q \in Q,$$

где c_xцена товара, $a_l = \beta_l$- коэффициент функции предложения, b^s– константа уравнения предложения при ограничениях:

$$\sum_{l=1}^{L} a_q x_{ql} \leq b_q, \forall q \in Q$$

$$x_{ql} \geq 0, q = \overline{1, Q}, l = \overline{1, L},$$

Где $a_q = a_{qv} + a_{qd}, q = \overline{1, Q}$-себестоимость единицы произведенной продукции, a_{qd} стоимость постоянных затрат, приходящаяся на единицу продукции;
предполагаемая линейная функциональная зависимость роста затрат от объема выпускаемого продукта:$\sum_{l=1}^{L} a_q x_{ql}, q = \overline{1, Q}$

$p_q = c_q - a_q$- прибыль, получаемая фирмой при производстве еденицы продукта, $q = \overline{1, Q}$.

$b_{iq}, i = \overline{1, M}, Q = \overline{1, Q}$-величина $i-$го ресурса, имеющегося на q-й фирме и использующегося при производстве продукта;

$b_q = \sum_{i=1}^{M} c_i b_{iq}$ – финансовые возможности фирмы при производстве продукта, $q = \overline{1,Q}$.

Цель любого производителя продать как можно больше товара по наиболее возможно высокой цене с тем, чтобы получить, возможно высокую прибыль.

Цель любого потребителя купить необходимый объем товара по максимально низкой цене и с наиболее высоким суммарным качеством.

Эти условия приводят к задаче

$$\forall q \in Q max f_q(X) = \sum_{l=1}^{L} p_q x_{ql}$$

$$\sum_{l=1}^{L} a_q x_{ql} \leq b_q, \forall q \in Q$$

$$x_{ql} \geq 0, q = \overline{1,Q}, l = \overline{1,L},$$

$$\forall l \in L \min f_l(X) = \sum_{q=1}^{Q} c_q x_{ql}$$

$$b_l^{min} \leq \sum_{q=1}^{Q} c_q x_{ql} \leq b_l^{max}, l = \overline{1,L}$$

$$x_{ql} \geq 0, q = \overline{1,Q}, l = \overline{1,L}$$

где $X = \{x_{ql}, q = \overline{1,Q}, l = \overline{1,L}\}$−вектор переменных, определяющий объемы продукции, купленные l-м потребителем у q-го производителя (фирмы); он по своей величине совпадает с вектором переменных, определяющим действия производителя; b_l^{min}, b_l^{max}– минимальный и максимальный объемы финансовых средств, которые потребитель может выделить на покупку продукта от различных фирм.

Во **втором разделе** исследуется математическая моедль рынка представленная в виде векторной задачи линейного программирования (ВЗЛП):

$$optF(X) = \{\max F_1(X) = \{\max f_q(X) = \sum_{l=1}^{L} p_q x_{ql}, q = \overline{1, Q}\} \qquad (1)$$

– критерии Q производителей, максимизирующих свои прибыли,
$p_q = (c_q - a_q)$ – прибыль, получаемая при производстве единицы продукции q-м производителем;

$$\min F_2(X) = \{\min f_l(X) = \sum_{q=1}^{Q} c_q x_{ql}, l = \overline{1, L}\}\} \qquad (2)$$

– критерии L потребителей, минимизирующих свои затраты за счет стоимости покупаемой продукции;

$$\max f_{\sum_q}(X^o) = \sum_{q=1}^{Q} \sum_{l=1}^{L} p_{ql} x_{ql} \qquad (3)$$

$$\min f_{\sum_l}(X^o) = \sum_{l=1}^{L} \sum_{q=1}^{Q} c_q x_{ql}\} \qquad (4)$$

-системные критерии, определяющие совокупное предложение и спрос соответственно;

$$b_l^{min} \leq \sum_{q=1}^{Q} c_q x_{ql} \leq b_l^{max}, l = \overline{1, L} \qquad (5)$$

– ограничения по бюджетным (финансовым) возможностям "L"потребителей;

$$\sum_{l=1}^{L} a_q x_{ql} \leq b_q, q = \overline{1, Q} \qquad (6)$$

– ограничения по производственным мощностям "Q"производителей;

$$a_q \leq c \leq c^{max} \qquad (7)$$

$$x_{ql} \geq 0, q = \overline{1, Q}, l = \overline{1, L} \qquad (8)$$

– ограничения, связанные с неотрицательностью объемов произведенной и проданной продукции

где $F(X)$ – векторная целевая функция (векторный критерий), $X(t) = \{x_{ql}(t), q = \overline{1,Q}; l = \overline{1,L}\}$ – вектор переменных, определяющий объемы продукта, купленной l-м потребителем у q-го производителя (фирмы);

Для решения векторной задачи линейного программирования используются методы, основанные на нормализации критериев и принципе гарантированного результата, которые дают возможность решать задачи при равнозначных критериях и заданном приоритете критерия.

В результате решения задачи – модели рынка – при равнозначных критериях получим:

- точку оптимума $X^o = \{c^o, x^o_{ql}\} q = \overline{1,Q}; l = \overline{1,L}$, которая складывается из двух составляющих: x^o_{ql} – объемов продуктов, произведенного и проданного каждым производителем каждому потребителю,c^o– стоимости, которая удовлетворяет требованиям производителей и потребителей за период времени.

- величины целевых функций $f_k(X^o), k = \overline{1,K}, K = Q \cup L$, в том числе $f_q(X^o), q = \overline{1,Q}$, определяют доходы каждого производителя; $f_l(X^o), l = \overline{1,L}$ определяют затраты каждого покупателя;

- суммарный объем продаж всех производителей и финансовых затрат всех потребителей, которые равны между собой:

$$f_{\sum_q}(X^o) = \sum_{q=1}^{Q} \sum_{l=1}^{L} (p_{ql} + a_{ql}) x^o_{ql} = f_{\sum_l}(X^o) = \sum_{l=1}^{L} \sum_{q=1}^{Q} c^o x^o_{ql} \tag{9}$$

т. е. суммарное предложение $f_{\sum_q}(X^o)$ равно суммарному спросу $f_{\sum_l}(X^o)$.

Заметим, что состояние рынка X^o , при котором спрос равен предложению, называется равновесным, а цена c^o , при которой достигается равенство спроса и предложения, называется равновесной ценой;

- нормализованные величины целевых функций:

$$\lambda_k(X^o) = \frac{(f_k(X^o) - f^o_k)}{(f^*_k - f^0_k)}, k = \overline{1,K} \tag{10}$$

где f_k^* – наилучшее решение по $k \in K$ критерию, f_k^o – наихудшее соответственно, $K = Q \cup L$ – множество критериев;

- максимальную относительную оценку λ^o , которая является максимальным нижним уровнем, до которого подняты обоюдные интересы всех производителей и потребителей в относительных оценках $\lambda_k(X^o)$. Другими словами, λ^o является гарантированным результатом в относительных единицах, который гарантирует, что в полученной оптимальной точке X^o все критерии (оценки производителей и потребителей), измеренные в относительных единицах, равны или лучше λ^o:

$$\lambda^o \leq \lambda_k(X^o), k = \overline{1, K}, X^o \in S \tag{11}$$

Любое увеличение интересов (критерия) производителя или потребителя приводит к ухудшению положения оставшихся участников рынка (производителей и потребителей).

Вектор-функция

$$F_1(X) = \{f_q(X^o), q = \overline{1, Q}\} \tag{12}$$

представляет собой вектор функцию предложения, а вектор-функция

$$F_2(X) = \{f_l(X^o), f_l(X^o), l = \overline{1, L}\} \tag{13}$$

– вектор-функцию спроса. Качество и прочие характеристики товара, учитываемые потребителем, в модели определяются приоритетом того или иного критерия.

В **разделах с третьего по пятый** построенная модель используется для прогназирования развития рынка для трех разных социально-экономических систем:

— при равнозначном значении производителей и потребителей(социалистическая модель)

— при игнорировании целей потребителей (капиталистическая модель)

— при игнорировании целей производителей (рабовладельческая модель)

На конкретном примере рассмотрим задачу с участием четырех производителей, выпускающих два вида продукции, и четырех групп потребителей, демонстрируется решение векторной задачи для каждой из рассматриваемых систем.

Алгоритм решения:

Шаг 1. Решение по каждому критерию – наилучшее.
В первой системе при оптимизации учитывается 4 критерия (цели) производителей, 4 критерия (цели) потребителей и 2 системных критерия

Во второй системе при оптимизации учитываются только 4 критерия (цели) производителей и 2 системных критерия.

В третьей системе при оптимизации учитываются только 4 критерия (цели) потребителей и 2 системных критерия.

Шаг 2. Решение по каждому критерию – наихудшее. Аналогично шагу 1

В первой системе при оптимизации учитывается 4 критерия производителей, 4 критерия потребителей и 2 системных критерия

Во второй системе при оптимизации учитываются только 4 критерия производителей и 2 системных критерия.

В третьей системе при оптимизации учитываются только 4 критерия потребителей и 2 системных критерия.

Шаг 3.Системный анализ критериев.

Нходим велечины целевых функций в оптимальных точках

Нормализуем критерии (вычисление относительных оценок)

Шаг 4.

По полученным данным строится и решается λ-задача.

Для численной реализации каждого этапа написана программа на языке Phyton.

В **шестом разделе** проводится сравнительный анализ рассмотренных систем, результат которых проиллюстрирован в таблицах 1,2 и на графиках, представленных рисунками 2,3.

Для каждой модели определены ключевые показатели , позволяющие количественно оценить эффективность и социальную направленность функционирования рынка.

Таблица 1 – Сравнение социальной направленности моделей рынка

Показатель	Социалистическая	Капиталистическая	Рабовладельческая
Прибыль производителей, руб	527 800	527 800	0
Затраты потребителей, руб	1 095 900	1 370 000	1 054 300
Социальная эффективность	0.89	0.42	0.15
Объем производства в оптимальных значениях	$\lambda^o = 0.4627$	$\lambda^o = 0.4627$	$\lambda^o = 0.5740$

Социалистическая модель: Умеренная прибыль производителей и затраты потребителей сочетаются с высокой социальной эффективностью. Низкая вероятность разорения указывает на стабильность рынка.

Капиталистическая модель: Максимальная прибыль производителей достигается за счет высоких затрат потребителей и низкой социальной эффективности. Высокая вероятность разорения свидетельствует о нестабильности.

Рабовладельческая модель: Отсутствие прибыли производителей и минимальные затраты потребителей приводят к самой низкой социальной эффективности. Высокая вероятность разорения указывает на эксплуатацию.

Обобщая результаты, можно сделать вывод о социальной направленности каждой из моделей, представленный в таблице 2.

Таблица 2 – Анализ социальной направленности

Модель	Прибыль производителей	Затраты потребителей	Социальный эффект
Социалистическая	Умеренная	Умеренные	Баланс интересов
Капиталистическая	Максимальная	Высокие	Рост неравенства
Рабовладельческая	Минимальная	Минимальные	Эксплуатация производителей

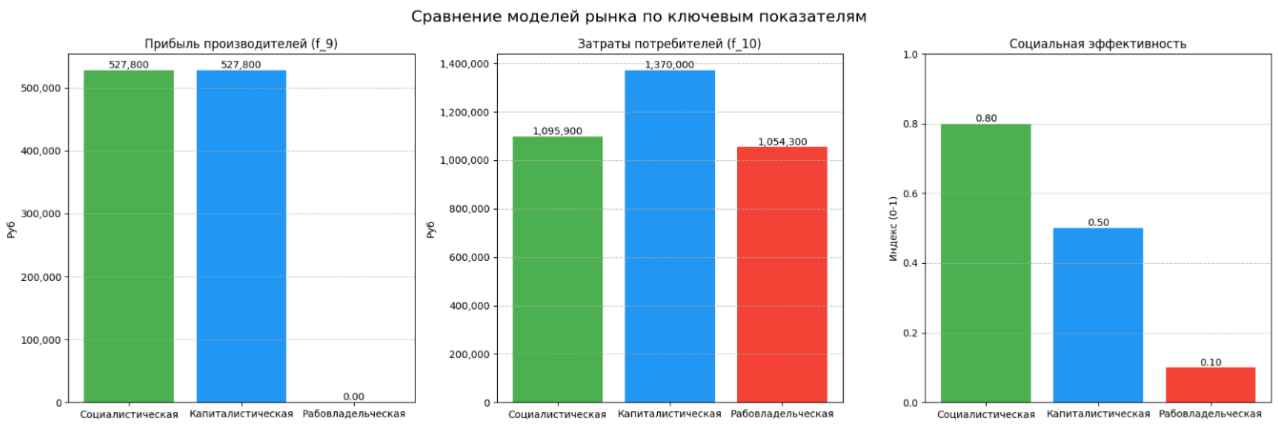

Рисунок 2 – Анализ моделей рынка с расчетными показателями

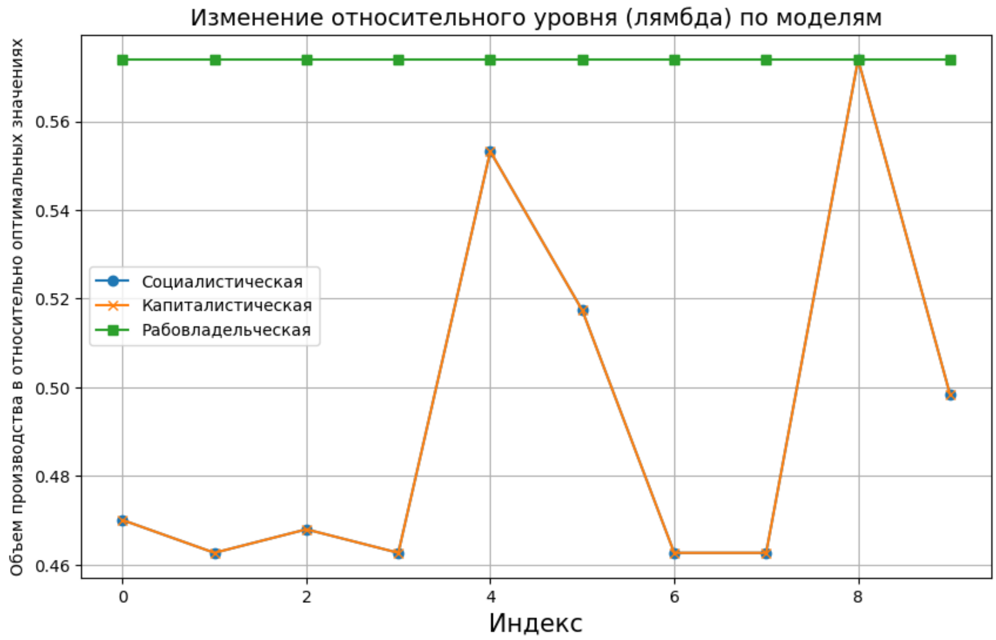

Рисунок 3 – Сравнение объема производства в относительных оптимльных значениях каждой модели

Математическая модель рынка потребителей реализует при равнозначном значении цели всех производителей и потребителей в совокупности, т.е. эта модель соответствует социалистическому способу производства.

Математическая модель рынка потребителей реализует цели всех производителей при равнозначном значении в совокупности, игнорируя цели всех потребителей – главное это прибыль, т.е. модель соответствует капиталистическому способу производства

Математическая модель рынка потребителей реализует цели всех потребителей в совокупности при равнозначном значении, т.е. полное игнорирование целей производителей, эта модель соответствует рабовладельческому способу производства.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе разработана математическая модель рынка, основанная на векторной задаче математического программирования, для анализа и прогнозирования его развития в социалистической, капиталистической и рабовладельческой системах. Модель учитывает цели производителей и потребителей, а также их взаимодействие посредством спроса и предложения.

Основные результаты работы включают:
Разработана универсальная модель рынка для трех социально-экономических систем, учитывающая спрос, предложение, ресурсные ограничения и бюджеты участников для анализа рыночного равновесия и оптимизации решений.
Социалистическая: Баланс интересов производителей и потребителей для социальной стабильности
Капиталистическая: Приоритет прибыли производителей, потенциально ведущий к социальному неравенству.
Рабовладельческая: Приоритет минимизации затрат потребителей, отражающий эксплуатацию производителей.

Модель практически применена в отрасли сельского хозяйства для расчета оптимальных объемов производства и потребления и анализа социальных последствий каждой модели.

Разработка программного обеспечения на языке Python для решения векторной задачи, что позволяет автоматизировать процесс прогнозирования и адаптировать модель для других отраслей.

Научная и практическая значимость работы состоит в разработке инструмента для анализа и прогнозирования рыночных процессов, применимого государственными органами, бизнесом и исследователями. Модель позволяет оценить влияние стратегий взаимодействия производителей и потребителей на экономическое равновесие и социальное развитие.

Таким образом, данное исследование значительно развивает методы математического моделирования рынка, предоставляя практические инструменты для его анализа и прогнозирования в различных социально-экономических условиях. Результаты подчеркивают важность баланса интересов всех участников для устойчивого экономического роста и социального благополучия.