

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное образовательное учреждение
высшего образования
**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра теории функций и стохастического анализа

АНАЛИЗ ТАБЛИЦ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТИ ЖИЗНИ
АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студента 4 курса 412 группы
направления 01.03.02 - Прикладная математика и информатика
механико-математического факультета
Дмитриева Никиты Олеговича

Научный руководитель
доцент, к.ф.м.н., доцент

В.Р.Шебалдин

Заведующий кафедрой
д.ф.м.н, доцент

С.П.Сидоров

Саратов 2025

ВВЕДЕНИЕ

В современной актуарной науке и демографическом анализе таблицы смертности занимают центральное место как инструмент оценки продолжительности жизни и расчета страховых рисков. Эти таблицы представляют собой систематизированную совокупность показателей, отражающих закономерности вымирания поколений, что делает их незаменимыми для страховых компаний, государственных органов и исследователей.

Технологический прогресс последних десятилетий кардинально изменил возможности обработки демографических данных - появились мощные вычислительные методы, алгоритмы машинного обучения, новые статистические подходы. Одновременно изменилась и сама структура смертности: снизилась младенческая смертность, увеличилась продолжительность жизни пожилых, изменился спектр основных причин смерти. Кроме того, глобальные события последних лет, такие как пандемия COVID-19, наглядно продемонстрировали уязвимость традиционных моделей перед лицом неожиданных демографических потрясений.

Важным аспектом становится учет региональных особенностей смертности. Глобализационные процессы, с одной стороны, приводят к определенному выравниванию демографических показателей, с другой - сохраняют, а в некоторых случаях и усиливают региональные диспропорции. Это заметно при сравнении показателей развитых и развивающихся стран, а также различных регионов внутри отдельных государств.

Отдельного внимания заслуживает вопрос качества исходных данных. В эпоху "больших данных" проблема достоверности и репрезентативности статистической информации становится одной из главных. Методы верификации и очистки данных, учет возможных погрешностей и искажений должны стать неотъемлемой частью современного демографического анализа.

Актуальность исследования обусловлена необходимостью совершенствования методов построения таблиц смертности в условиях меняющихся демографических тенденций, а также их критически важной ролью в расчете страховых премий и резервов в страховании жизни.

Цель работы: комплексное исследование теоретических основ постро-

ения таблиц смертности, включая анализ современных моделей смертности и их применения в актуарных расчетах.

Задачи работы:

1. Изучить систему показателей таблиц смертности и их взаимосвязи.
2. Проанализировать исторические и современные аналитические модели смертности.
3. Исследовать методы интерполяции для дробных возрастов.
4. Оценить влияние социально-экономических факторов на уровень смертности.
5. Провести вычислительный эксперимент.

Работа состоит из пяти разделов, введения, заключения, списка литературы и приложений.

1 Основная работа

Таблицы смертности представляют собой комплексную систему демографических показателей, которые количественно описывают процесс вымирания поколения. Эти таблицы являются не только важнейшим инструментом демографического анализа, но и составляют математическую основу для актуарных расчетов в страховании жизни, пенсионном обеспечении и социальном планировании. Их значение особенно возросло в последние десятилетия в связи с необходимостью точного прогнозирования продолжительности жизни и оценки финансовых обязательств страховых компаний и пенсионных фондов.

В основе любой таблицы смертности лежит взаимосвязанная система показателей, каждый из которых имеет четкую демографическую и актуарную интерпретацию. Центральное место занимают:

- l_x - число доживающих до точного возраста x лет из исходной условной когорты новорожденных l_0 , обычно принимаемой равной 100,000. Этот показатель формирует "костяк" таблицы смертности.
- $d_x = l_x - l_{x+1}$ - число умерших в возрастном интервале $[x, x + 1)$. В демографическом анализе этот показатель позволяет оценить абсолютные масштабы смертности в отдельных возрастных группах.
- $q_x = \frac{d_x}{l_x}$ - вероятность смерти в возрасте между x и $x + 1$ годами. Это ключевая величина для расчетов страховых тарифов. Для новорожденных q_0 называется коэффициентом младенческой смертности.
- $p_x = 1 - q_x$ - вероятность дожития до следующего возрастного периода. В пенсионных расчетах особое значение имеют показатели p_{65} и p_{70} , характеризующие выживаемость пенсионеров.
- $e_x = \frac{T_x}{l_x}$ - средняя ожидаемая продолжительность предстоящей жизни, где $T_x = \sum_{k=x}^{\omega} L_k$ - суммарное время (в годах), которое предстоит прожить всем представителям группы, достигшим возраста x , от этого возраста до конца жизни.

Эти показатели связаны системой соотношений, позволяющих переходить от одного к другому. Например, зная последовательность l_x , можно вычислить все остальные характеристики:

$$d_x = l_x - l_{x+1}, \quad q_x = \frac{d_x}{l_x}, \quad (1.1), (1.2)$$

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}, \quad L_x = \frac{l_x + l_{x+1}}{2}, \quad (1.3), (1.4)$$

где L_x - общее количество лет, прожитых всей группой в возрасте от x до $x + 1$ лет.

Для аналитического описания продолжительности жизни используются две взаимодополняющие функции:

Функция распределения продолжительности жизни:

$$F(x) = P(X < x) = 1 - \frac{l_x}{l_0} \quad (1.5)$$

показывает вероятность смерти до достижения возраста x .

Функция выживания (дожития):

$$s(x) = 1 - F(x) = \frac{l_x}{l_0} \quad (1.6)$$

характеризует вероятность дожить до возраста x .

Эти функции позволяют перейти к непрерывному описанию смертности. Их производные дают важные характеристики:

Плотность распределения смертей:

$$f(x) = F'(x) = -s'(x). \quad (1.7)$$

Интенсивность смертности (сила смертности):

$$\mu_x = \frac{f(x)}{s(x)} = -\frac{s'(x)}{s(x)}. \quad (1.8)$$

Эти показатели особенно важны для анализа смертности в непрерывном времени и построения аналитических моделей.

В страховой практике используются модифицированные таблицы, учитывающие различные факторы.

Таблицы с отбором риска отражают зависимость смертности от времени

с момента заключения договора:

$$q_{[x]+t}, \quad (1.9)$$

где $[x]$ обозначает возраст при заключении договора, t - время с момента отбора. Период действия отбора обычно составляет 2-5 лет.

Для разных типов страховых продуктов применяют специализированные таблицы:

- Аннуитетные таблицы (для рент) - учитывают более низкую смертность среди покупателей рент.
- Инвалидные таблицы - для страхования на случай потери трудоспособности.
- Сезонные таблицы - учитывают колебания смертности по временам года.

Современные таблицы смертности должны учитывать многочисленные социально-экономические и медицинские факторы.

Основные корректирующие факторы:

1. Пол: различия особенно значительны в возрастах 20-40 лет

$$\frac{q_x^{\text{Муж}}}{q_x^{\text{Жен}}} \approx 4. \quad (1.10)$$

2. Курение: увеличивает смертность в 2-3 раза для возрастов 30-60 лет.
3. Профессия: рискованные профессии могут увеличивать смертность до 5 раз.
4. География: различия между регионами могут достигать 30-40%.
5. Год рождения (когортный эффект): улучшение медицинского обслуживания.

Методы корректировки включают:

- Поправочные коэффициенты:

$$q_x^{\text{корр}} = k \cdot q_x^{\text{баз}}. \quad (1.11)$$

- Возрастные сдвиги:

$$q_x^{\text{корр}} = q_{x+\Delta}^{\text{баз}}, \quad (1.12)$$

где Δ обычно составляет 5-10 лет.

— Комбинированные методы:

$$q_x^{\text{скорр}} = k \cdot q_{x+\Delta}^{\text{баз}}. \quad (1.13)$$

Анализ данных за последние 40 лет показывает сложную динамику:

Таблица 1 – Динамика смертности мужчин трудоспособного возраста (16-59 лет)

Период	q_x , %	Основные факторы
1981-1985	0.82-0.86	Стабильный период
1986-1991	0.67-0.78	Антиалкогольная кампания
1992-1994	0.91-1.32	Экономический кризис
2000-2019	0.83-1.25	Социально-экономические изменения
2020-2022	0.82-0.90	Пандемийные эффекты

Для учета такой динамики в актуарных расчетах применяют:

- Прогнозные таблицы, например, таблица прогнозных показателей смертности населения РФ 2025-2045 гг.
- Динамические поправочные коэффициенты, например, коэффициент снижения смертности $\alpha_{adj} = 0.95^n$, где n - количество лет с момента базового периода наблюдений. Он применяется для корректировки табличных значений смертности.
- Методы стохастического моделирования, например, метод динамических коэффициентов $q_x^t = q_x^{\text{баз}} \cdot (1 + \alpha)^{t-t_0}$, где α - годовой темп изменения, t - текущий год, t_0 - базовый год наблюдений. Он используется для корректировки тарифов для групповых договоров с учетом ежегодного улучшения смертности.

В качестве практического применения таблиц продолжительности жизни рассмотрим страховую компанию, осуществляющую расчеты по договорам страхования жизни на основе демографических данных.

Начальными параметрами исследования выступают возрастные коэффициенты смертности, заданные в промилле для различных возрастных групп, и диапазон процентных ставок от 5% до 25%. Для проведения расчетов принимается фиксированная численность когорты в 100000 человек с предельным возрастом дожития 120 лет. На основе этих данных последовательно определяются показатели таблицы продолжительности жизни, включая числа доживающих l_x , вероятности смерти q_x и среднюю продолжительность жизни e_x , которые затем используются для актуарных расчетов пяти основных видов страховых продуктов: пожизненного страхования \bar{A}_x , 5-летнего срочного страхования $\bar{A}_{x:\overline{5}|}^1$, 5-летнего смешанного страхования $\bar{A}_{x:\overline{5}|}$, отсроченного на 2 года страхования ${}_2|\bar{A}_x$ и страхования с возрастающей выплатой $T\bar{A}_x$. При этом для каждого вида страхования рассчитываются соответствующие нетто-премии, отражающие стоимость страховой защиты с учетом построенных таблиц смертности и заданных процентных ставок.

В ходе вычислительного эксперимента будут определены полный набор демографических показателей таблицы продолжительности жизни, значения нетто-премий для всех пяти рассматриваемых видов страховых продуктов при различных процентных ставках, а также проведен анализ зависимости этих премий от изменения процентных ставок.

Цель вычислительного эксперимента — построение полной таблицы продолжительности жизни для определения средней продолжительности жизни населения Томской области на основе возрастных коэффициентов смертности, а также расчёт разовых нетто-премий для пяти видов договоров страхования жизни (пожизненного, 5-летнего срочного, 5-летнего смешанного, отсроченного на 2 года и с растущей страховой суммой) на основе модели де Муавра с использованием равномерного распределения остаточного времени жизни.

Задачи вычислительного эксперимента:

1. Построение таблицы продолжительности жизни для условной когорты новорождённых.

2. Расчёт средней продолжительности жизни при рождении.
3. Реализация точных расчётов нетто-премий для пяти типов договоров страхования.
4. Исследование влияния процентной ставки и предельного возраста на стоимость страхового покрытия.
5. Обеспечение наглядного представления расчётов с помощью графической визуализации.

Исходными данными для анализа послужили возрастные коэффициенты смертности населения Томской области для различных возрастных групп, начиная с младенческого возраста (0-1 год) с коэффициентом 13.8‰, заканчивая возрастной группой 85+ лет с коэффициентом 221.4‰. Для расчёта страховых премий использовалась модель де Муавра с возможностью задания предельного возраста ω , возраста застрахованного x и процентной ставки i . Исходные данные включали равномерное распределение остаточного времени жизни на интервале $(0, \omega - x)$.

Для реализации эксперимента был разработан код на языке Python, который сначала строит таблицу продолжительности жизни на основе возрастных коэффициентов смертности, вычисляя все необходимые показатели, а затем использует полученные данные для расчёта страховых премий. Разработанный инструментарий предоставляет комплексное графическое представление страховых премий, где динамика изменения стоимости продуктов отображена на графиках, демонстрирующих зависимость от процентных ставок от 5% до 25%, а сравнительные диаграммы содержат конкретные процентные значения нетто-премий для всех пяти видов договоров. Единое процентное выражение всех значений относительно страховой суммы обеспечивает прозрачность сравнения продуктов и удобство оценки влияния финансовых условий. Приложение В содержит код данной программы. Приложение Г содержит построенную таблицу продолжительности жизни.

Для построения таблицы продолжительности жизни населения Томской области используются следующие соотношения:

1. Формулы для расчёта чисел доживающих:

— Для однолетних интервалов (возраст от x до $x + 1$):

$$l_{x+1} = l_x \cdot (1 - q_x). \quad (1.14)$$

— Для многолетних интервалов (возраст от x до $x + n$):

$$l_{x+n} = l_x \cdot (1 - q_x)^n. \quad (1.15)$$

2. Число умерших:

$${}_n d_x = l_x - l_{x+n}. \quad (1.16)$$

3. Вероятность умереть:

$${}_n q_x = \frac{{}_n d_x}{l_x} = 1 - (1 - q_x)^n. \quad (1.17)$$

4. Вероятность дожить:

$${}_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} = (1 - q_x)^n. \quad (1.18)$$

5. Суммарное время, которое ещё предстоит прожить достигшим возраста x :

$$T_x = \sum_{k=x}^{\omega} L_k. \quad (1.19)$$

6. Средняя продолжительность жизни:

$$e_x = \frac{T_x}{l_x}. \quad (1.20)$$

7. Расчёт суммарного времени проживания производится для разных воз-

растных интервалов:

$$L_x = \begin{cases} 0.3l_x + 0.7l_{x+1}, & \text{для 0-1 года;} \\ 2(l_x + l_{x+1}), & \text{для 1-4 лет;} \\ 2.5(l_x + l_{x+1}), & \text{для 5-летних интервалов.} \end{cases} \quad (1.21)$$

Коэффициенты 0.3 и 0.7 возникают из-за неравномерности младенческой смертности в возрасте 0-1 год.

На основе построенной таблицы продолжительности жизни рассчитываются нетто-премии для пяти видов договоров страхования:

1. Нетто-премия для пожизненного страхования:

$$\bar{A}_x = \int_0^{\omega-x} v^t \cdot \frac{1}{\omega-x} dt = \frac{1-v^{\omega-x}}{(\omega-x)\delta}, \quad (1.22)$$

где:

- $v = \frac{1}{1+i}$ - дисконтирующий множитель;
- $\delta = \ln(1+i)$ - интенсивность процентов;
- ω - предельный возраст;
- x - возраст застрахованного;
- $\omega - x$ - максимальное остаточное время жизни;
- $f_x(t) = \frac{1}{\omega-x}$ - плотность равномерного распределения остаточного времени жизни на интервале $(0, \omega - x)$.

2. Нетто-премия для 5-летнего срочного страхования жизни:

$$\bar{A}_{x:\overline{5}|}^1 = \int_0^5 v^t \cdot \frac{1}{\omega-x} dt = \frac{1-v^5}{(\omega-x)\delta}. \quad (1.23)$$

3. Нетто-премия для 5-летнего смешанного страхования:

$$\bar{A}_{x:\overline{5}|} = \bar{A}_{x:\overline{5}|}^1 + v^5 \cdot \frac{\omega-x-5}{\omega-x}. \quad (1.24)$$

4. Нетто-премия для отсроченного на 2 года страхования:

$${}_2|\bar{A}_x = \int_2^{\omega-x} v^t \cdot \frac{1}{\omega-x} dt = \frac{v^2 - v^{\omega-x}}{(\omega-x)\delta}. \quad (1.25)$$

5. Нетто-премия для страхования с возрастающей выплатой:

$$(\bar{IA})_x = \int_0^{\omega-x} t \cdot v^t \cdot \frac{1}{\omega-x} dt = \frac{1 - [1 + (\omega-x)\delta]v^{\omega-x}}{(\omega-x)\delta^2}. \quad (1.26)$$

Покажем сравнение нетто-премий, рассчитанных на основе демографических показателей таблицы продолжительности жизни, и их зависимость от процентных ставок для различных видов страховых договоров.

Случай 1

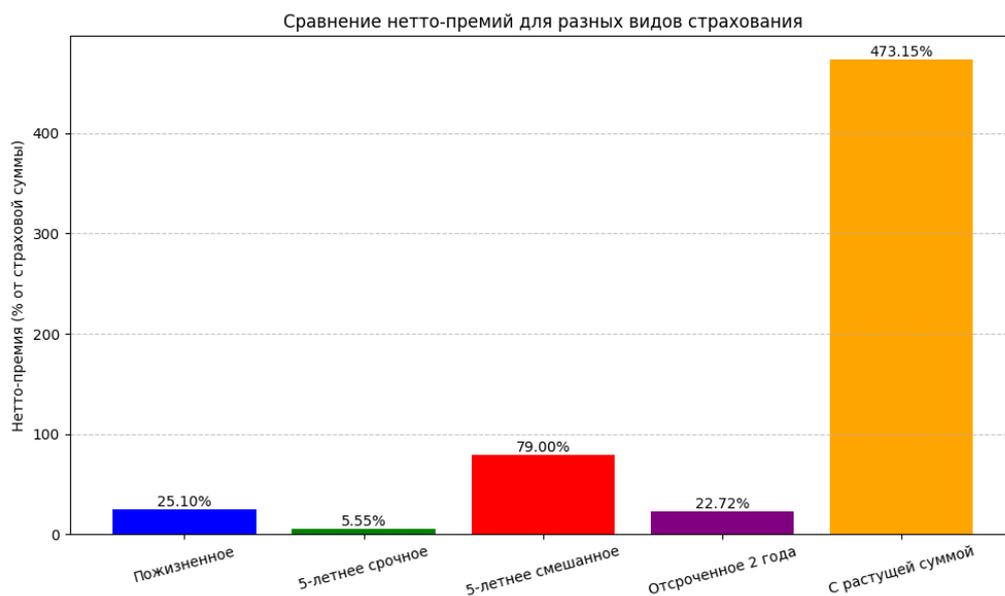


Рисунок 1 – Нетто-премии для разных видов страхования при ставке 5%.

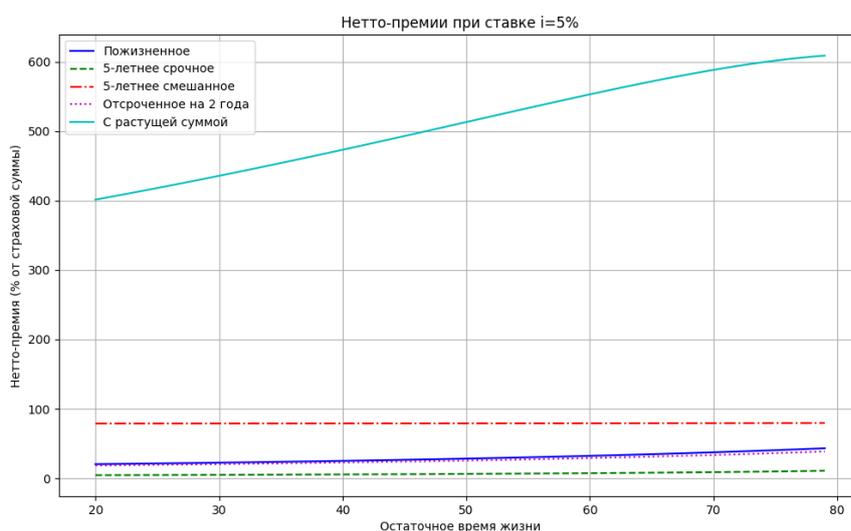


Рисунок 2 – Изменение нетто-премий при ставке 5%.

Случай 2

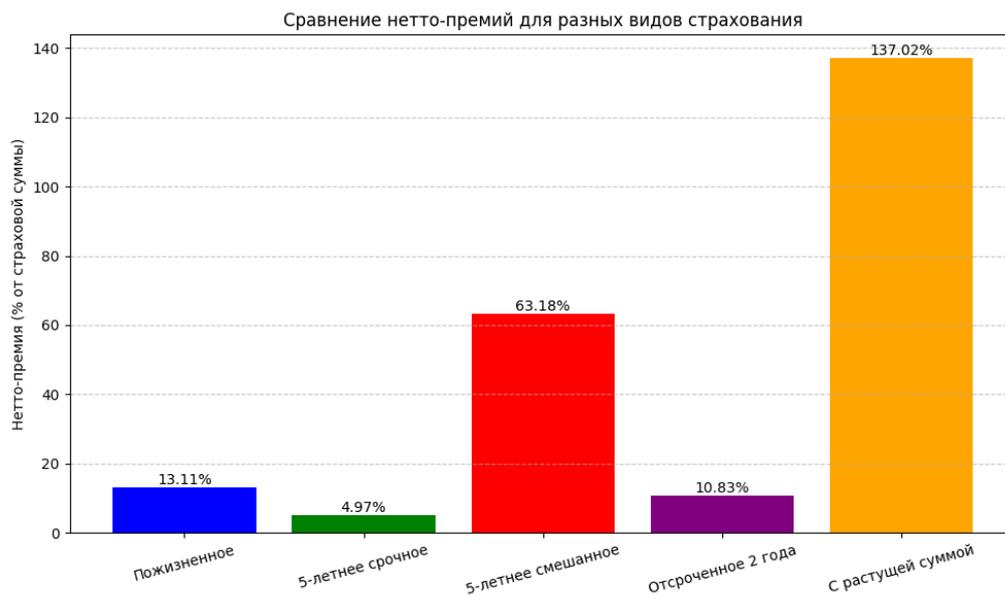


Рисунок 3 – Нетто-премии для разных видов страхования при ставке 10%.

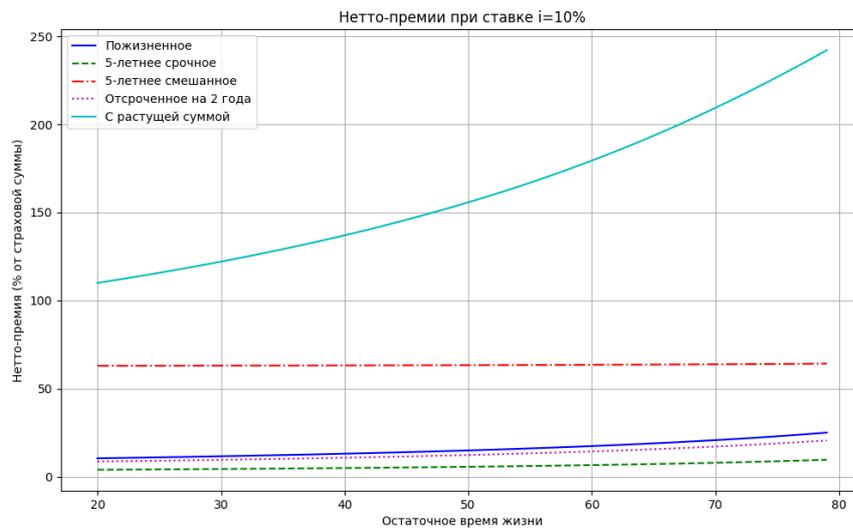


Рисунок 4 – Изменение нетто-премий при ставке 10%.

Случай 3

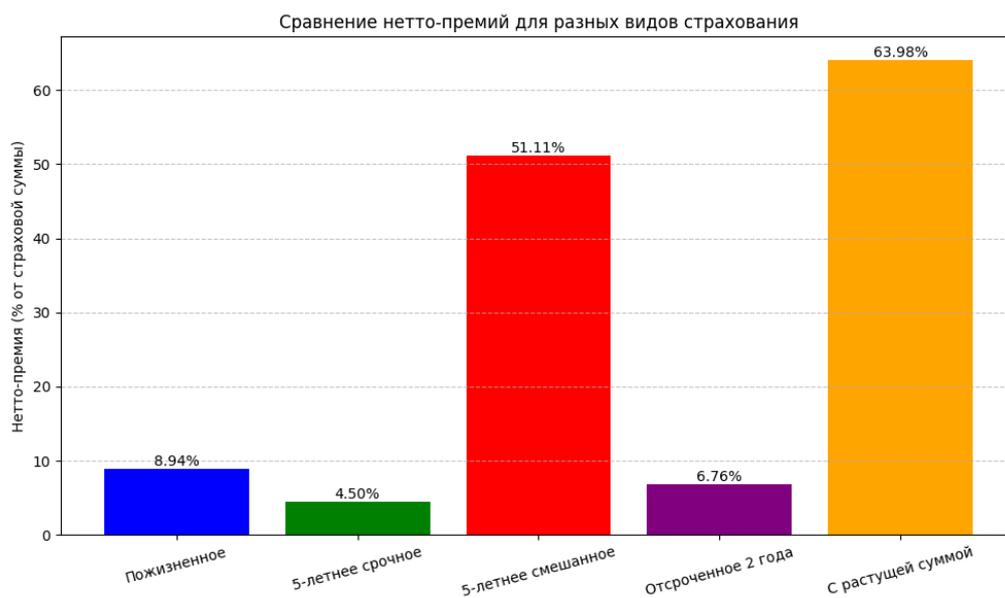


Рисунок 5 – Нетто-премии для разных видов страхования при ставке 15%.

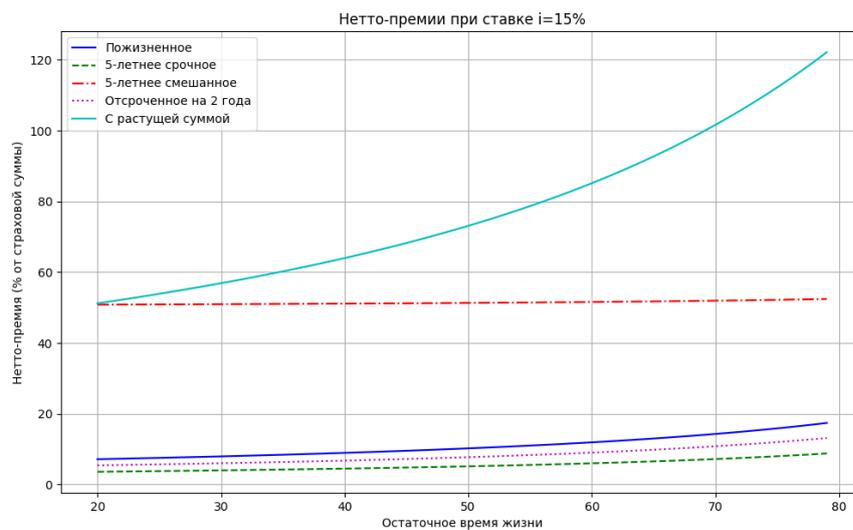


Рисунок 6 – Изменение нетто-премий при ставке 15%.

Случай 4

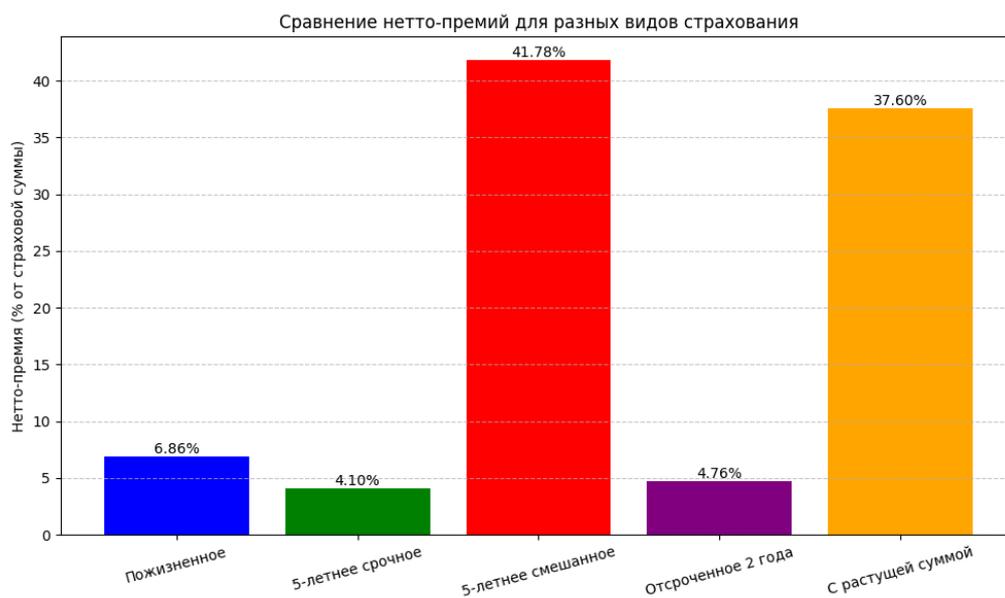


Рисунок 7 – Нетто-премии для разных видов страхования при ставке 20%.

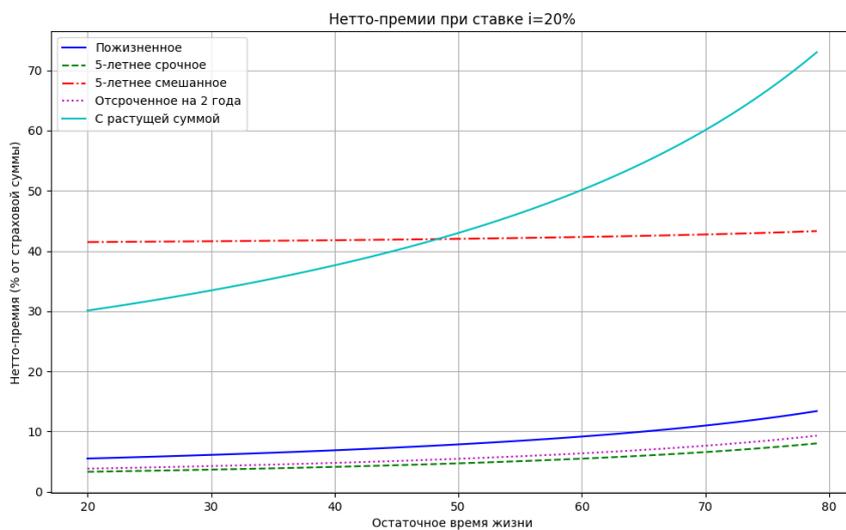


Рисунок 8 – Изменение нетто-премий при ставке 20%.

Случай 5

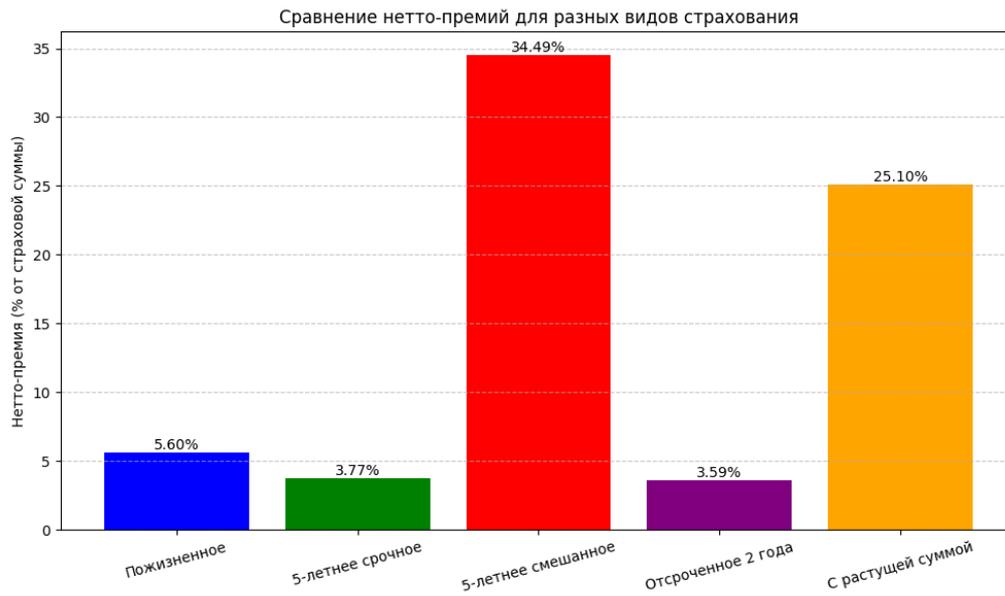


Рисунок 9 – Нетто-премии для разных видов страхования при ставке 25%.

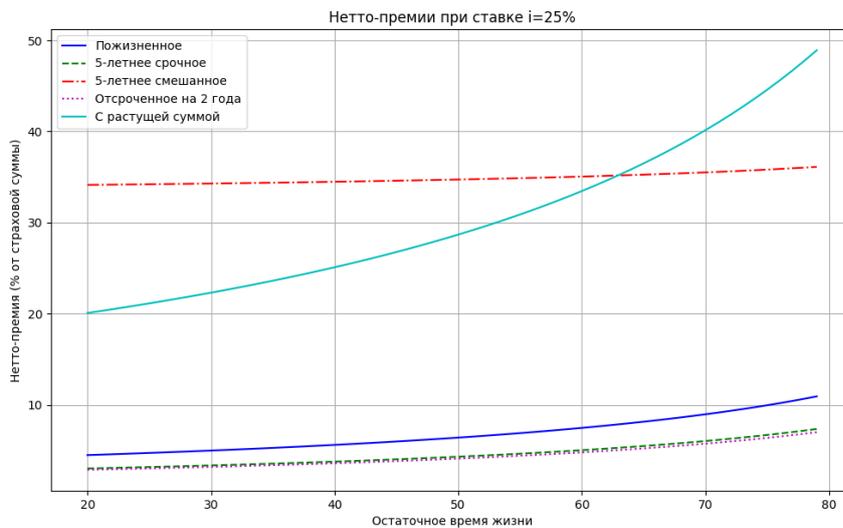


Рисунок 10 – Изменение нетто-премий при ставке 25%.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенное исследование позволило разработать комплексную методику, объединяющую демографический анализ с актуарными расчетами в страховании жизни. Теоретической базой послужили фундаментальные принципы актуарной математики: использование вероятностей дожития и смертности для расчёта для последовательного расчета количества людей доживающих до определённого возраста и других демографических показателей. Все расчеты выполнены для фиксированной группы без учёта миграции и изменений смертности во времени. В работе представлен системный подход к построению таблиц смертности и их практическому применению для расчета страховых тарифов, что создает надежную основу для принятия управленческих решений в страховой отрасли.

Основные результаты исследования включают:

1. Детальный демографический анализ населения Томской области 2006 года рождения:
 - Коэффициент смертности сильно возрастает начиная с возраста 65 лет.
 - Установлена средняя продолжительность жизни 66.4 года, что соответствует среднероссийским показателям для данного периода и отражает уровень социально-экономического развития региона.
 - Наименьшие показатели смертности у детей 5-9 лет (0.3‰) связаны с завершением периода младенческих рисков и отсутствием характерных для взрослых хронических заболеваний, а также с эффективной системой педиатрического наблюдения.
2. Комплексный анализ страховых премий для пяти видов договоров:
 - Пожизненное страхование демонстрирует плавное, но устойчивое снижение стоимости при росте процентной ставки. Наибольшее падение премии наблюдается на начальных этапах повышения ставки, затем темпы снижения постепенно замедляются.
 - Страхование с растущей выплатой характеризуется особенно резким падением премий при начальном росте ставок. Однако при достижении экстремально высоких значений ставки теряет свою

премиальность, уступая другим продуктам.

- 5-летнее срочное страхование проявляет наименьшую чувствительность к изменению финансовых условий, оставаясь самым стабильным продуктом. Его стоимость изменяется незначительно даже при существенных колебаниях процентной ставки.
- Смешанное страхование занимает промежуточное положение между пожизненным и срочным, демонстрируя умеренную чувствительность к изменению ставок. При достижении высоких значений ставки его позиции относительно других продуктов неожиданно укрепляются.
- Отсроченное страхование на 2 года показывает нелинейную динамику снижения, особенно заметную при высоких ставках.

Полученные результаты имеют важное практическое значение для страховых компаний и органов социального планирования. Разработанная методика позволяет не только оптимизировать страховые тарифы с учетом демографических особенностей региона, но и прогнозировать изменения страхового портфеля при различных экономических сценариях.

Исследование подтверждает необходимость комплексного подхода, учитывающего как демографические тенденции, так и финансовые параметры при разработке страховых продуктов. Перспективным направлением дальнейших исследований может стать учет дополнительных факторов, таких как гендерные и социально-экономические различия в смертности, а также анализ долгосрочных демографических трендов.