

Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теории функций и стохастического анализа

**МЕТОДЫ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ
ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОЕКТОВ**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 4 курса 412 группы
направления 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета
Богомоловой Екатерины Павловны

Научный руководитель

к. ф.-м. н., доцент

Е. В. Гудошникова

Заведующий кафедрой

д. ф.-м. н., доцент

С. П. Сидоров

Саратов 2025

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1 Основное содержание работы	5
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	12

ВВЕДЕНИЕ

Методы многокритериальной оптимизации – это важный раздел прикладной математики, который находит широкое применение в экономике, управлении и других областях. Они позволяют принимать обоснованные решения в условиях множества противоречивых критериев, обеспечивая баланс между различными аспектами задачи. Многокритериальная оптимизация особенно актуальна при оценке инвестиционных проектов, где необходимо учитывать такие показатели, как доходность, срок окупаемости и риски.

Инвестиционные проекты представляют собой сложные системы, требующие комплексного анализа. Для их оценки используются ключевые показатели эффективности: чистая приведённая стоимость (NPV), внутренняя норма доходности (IRR), срок окупаемости (DPP) и индекс доходности (PI). Каждый из этих показателей отражает определённый аспект проекта, и их совместное применение позволяет получить всестороннюю оценку. Однако выбор оптимального проекта на основе нескольких критериев является нетривиальной задачей, требующей применения специальных методов оптимизации.

Современные методы многокритериальной оптимизации, такие как метод гарантированного результата при нормализации критериев (ГРНК), метод последовательных уступок, метод идеальной точки и метод свёртки критериев, предоставляют инструменты для нахождения Парето-оптимальных решений. Эти методы позволяют учитывать предпочтения лица, принимающего решения, и находить компромиссы между противоречивыми критериями.

Цель бакалаврской работы: исследование методов многокритериальной оптимизации и их применение для оценки инвестиционных проектов с целью повышения точности и обоснованности принимаемых решений.

Задачи бакалаврской работы:

1. анализ ключевых показателей эффективности инвестиционных проектов и их свойств;
2. рассмотрение аналитического выражения для вычисления срока окупаемости;

3. изучение методов многокритериальной оптимизации;
4. применение IT-технологий для реализации алгоритма оптимизации и визуализации результатов.

Данная бакалаврская работа состоит из трёх разделов:

В первом разделе рассматриваются характеристики инвестиционных проектов, включая определение и свойства ключевых показателей эффективности. Особое внимание уделяется разработке аналитического выражения для вычисления срока окупаемости, что повышает точность расчётов.

Во втором разделе проводится обзор методов многокритериальной оптимизации, таких как ГРНК, метод последовательных уступок, метод идеальной точки и метод свёртки критериев. Описываются их алгоритмы, преимущества и области применения.

В третьем разделе представлена практическая реализация алгоритма многокритериальной оптимизации с использованием языка программирования Python. На примере инвестиционного проекта косметической компании NeoGlow демонстрируется применение метода оптимизации ГРНК и анализ полученных результатов.

1 Основное содержание работы

Для привлечения производственных инвестиций разрабатывается инвестиционный проект.

Проект классического характера — это проект, в котором чистый денежный поток меняет знак только один раз, т.е. расходы инвестора предшествуют доходам от проекта. Для оценки эффективности инвестиционного проекта используют четыре показателя, основанные на дисконтировании членов финансового потока проекта к моменту $t = 0$:

- чистая современная стоимость проекта (*net present value, NPV*),
- внутренняя норма доходности (*internal rate of return, IRR*),
- срок окупаемости (*discounted payback period, DPP*),
- индекс доходности (*profitability index, PI*).

Чистая современная стоимость проекта NPV

$$NPV = \sum_{k=0}^n \frac{R_k}{(1+i)^k} + \int_0^T \frac{f(t)}{(1+i)^t} dt,$$

где члены финансового потока $R_k = a_k - b_k$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$), а $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ — доходы по проекту в моменты $t = 0, t_1, t_2, \dots, t_n$ и $b_0 = I, b_1, b_2, \dots, b_n$ — расходы в те же моменты времени. Начало проекта $t = 0$ — момент вложения исходной инвестиции в размере I . T — срок проекта. $f(t)$ — чистая интенсивность.

Внутренняя норма доходности проекта (IRR) — это ставка дисконтирования r , при которой чистая современная стоимость проекта равна нулю:

$$NPV(r) = 0.$$

Срок окупаемости DPP

$$\sum_{k=0}^{n^*} \frac{a_k}{(1+i)^k} + \int_0^{n^*} \frac{f_2(t)}{(1+i)^t} dt = \sum_{k=0}^{n^*} \frac{b_k}{(1+i)^k} + \int_0^{n^*} \frac{f_1(t)}{(1+i)^t} dt,$$

где n^* — срок окупаемости проекта, $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — интенсивности расходов и получения денег в момент t .

Аналитическое выражение срока окупаемости проекта

$$DPP = -\frac{\ln \left\{ 1 - \frac{S(I_m)}{P(D_k)} [1 - (1+i)^{-n_D}] \right\}}{\ln(1+i)},$$

где $S(I_m)$ – наращенная сумма платежей инвестиционной части проекта к моменту ее окончания,

$D_k(k = \overline{1, n_D})$ – дискретные платежи доходной части проекта продолжительностью n_D лет,

$P(D_k)$ – приведенная стоимость дискретных платежей.

Индекс доходности проекта DPI

$$d = \frac{\sum_{k=0}^n \frac{a_k}{(1+i)^k} + \int_0^T \frac{f_2(t)}{(1+i)^t}}{\sum_{k=0}^n \frac{b_k}{(1+i)^k} + \int_0^T \frac{f_1(t)}{(1+i)^t}}.$$

Исходя из всего сказанного, задача оценки эффективности инвестиционного проекта в общем виде должна быть поставлена в форме следующей экономико-математической модели многокритериальной оптимизации:

$$\begin{cases} NPV(x_1, x_2, \dots, x_{n_1}, y_{n_1+1}, \dots, y_{n_1+n_2}, i) = \\ = \sum_{k=n_1+1}^{n_1+n_2} \frac{y_k}{(1+i)^k} - \sum_{j=1}^{n_1} \frac{x_j}{(1+i)^j} \rightarrow \max \\ DPP(x_1, x_2, \dots, x_{n_1}, y_{n_1+1}, \dots, y_{n_1+n_2}, i) = \\ = -\frac{\ln \left\{ 1 - \frac{S(x_j)}{P(y_k)} [1 - (1+i)^{-n_2}] \right\}}{\ln(1+i)} \rightarrow \min \end{cases}$$

где нужно найти оптимальные значения показателей NPV и DPP при

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \leq \sum_{k=n_1+1}^{n_1+n_2} \frac{y_k}{(1+i)^k} / \sum_{j=1}^{n_1} \frac{x_j}{(1+i)^j} \leq DPI_{max} \\ x_{min} \leq x_j \leq x_{max} \\ y_{min} \leq y_k \leq y_{max} \\ i_{min} \leq i \leq IRR_0 \\ x_j, y_k, i \neq 0. \end{array} \right.$$

где $S(x_j)$ —сумма инвестиционных платежей, наращенная к моменту $t = n_1$:

$$S(x_j) = S(x_1, x_2, \dots, x_{n_1}) = \sum_{j=1}^{n_1} x_j (1+i)^{n_1-j},$$

а $P(y_k)$ — дисконтированная стоимость доходных платежей, приведенная к моменту $t = n_1$:

$$P(y_k) = P(y_{n_1+2}, \dots, y_{n_1+n_2}) = \sum_{k=n_1+1}^{n_1+n_2} \frac{y_k}{(1+i)^{k-n_1}}.$$

Существует множество подходов к решению многокритериальных задач оптимизации.

Метод ГРНК

1. f_1^{max} и f_1^{min} и f_2^{max} и f_2^{min}
2. $\lambda_1(x_1, x_2, x_3) = \frac{f_1(x_1, x_2, x_3) - f_1^{max}}{f_1^{max} - f_1^{min}}, \quad \bar{\lambda}_2(x_1, x_2, x_3) = \frac{f_2^{max} - f_2(x_1, x_2, x_3)}{f_2^{max} - f_2^{min}}.$
- 3.

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda \rightarrow max \\ \lambda - \lambda_1(x_1, x_2, x_3) \leq 0 \\ \lambda - \bar{\lambda}_2(x_1, x_2, x_3) \leq 0 \\ g_{min} \leq g(x_1, x_2, x_3) \leq g_{max} \\ x_{3min} \leq x_3 \leq IRR_0 \\ x_{1min} \leq x_1 \leq x_{1max}, \quad x_{2min} \leq x_2 \leq x_{2max} \\ x_1 \neq 0, \quad x_2 \neq 0, \quad x_3 \neq 0 \end{array} \right.$$

4. Решение задачи λ_{max}^* в точке $X^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$.

Метод последовательных уступок

1. Вначале на первое место ставится самый важный критерий.
2. Находится оптимальное решение f_1^* по самому важному критерию $f_1(X)$ с учетом системы ограничений.
3. Назначается уступка Δ_1 .
4. Решается задача по следующему критерию $f_2(X)$ с дополнительным ограничением.
5. После нахождения оптимального решения f_2^* по критерию $f_2(X)$ назначается по нему уступка.
6. Решение задачи продолжается до тех пор, пока не будет найдено значение наименее важного критерия при уступках по остальным критериям.

Метод идеальной точки

Метод идеальной точки состоит в отыскании на границе Парето точки, ближайшей к точке утопии, задаваемой лицом принимающее решение. ЛПР формулирует цель в виде желаемых значений показателей, и в качестве координат целевой точки выбирается сочетание наилучших значений всех критериев.

Метод свертывания критериев

1. С помощью весовых коэффициентов требуется задать значимость критериев друг перед другом, выраженных в количественной шкале.
2. Осуществить сворачивание критериев с помощью аддитивной свертки:

$$F(A_j) = \sum_{j=1}^k \rho_j f_j(X_j),$$

A_j - альтернатива, ρ_j - вес j -го критерия, $f_j(X_j)$ - значение j -го критерия, k - количество критериев

3. Решить задачу симплекс-методом.

Таким образом, мнение эксперта, выражающееся в назначении весовых коэффициентов или же назначении уступки, оказывает существенное влия-

ние на ход решения задачи в каждом из перечисленных методов решения.

Практическое применение метода ГРНК

В работе рассматривается практическая реализация алгоритма многокритериальной оптимизации методом гарантированного результата при нормализации критериев (ГРНК) с использованием языка программирования *Python*. В качестве объекта исследования выбран инвестиционный проект косметической компании *NeoGlow*.

Косметическая компания *NeoGlow* планирует инвестировать в проект в течение n лет с последующим получением пассивного дохода m лет. Размер инвестиционных платежей и доходной части ограничен минимальными и максимальными значениями. Ставка дисконтирования также соответствует определенному диапазону. Проект соответствует классической схеме инвестирования с дискретным потоком платежей вида $(R_0, R_1, \dots, R_n)$, где $R_k = a_k - b_k$, при этом a_k представляет доход, а b_k - расход на шаге k .

В исследовании приняты следующие значения параметров:

- Продолжительность инвестиционной фазы: $n = 3$ года
- Период возврата инвестиций: $m = 10$ лет

С установленными ограничениями:

- Инвестиции: $1\,000\,000 \leq x_j \leq 5\,000\,000$ руб. ($j = 1, 2, 3$)
- Доходы: $3\,000\,000 \leq y_k \leq 10\,000\,000$ руб. ($k = 4, \dots, 13$)
- Ставка дисконтирования: $0.05 \leq i \leq 0.1$

Была сформулирована математическая модель:

$$\left\{ \begin{array}{l} NPV(x_1, x_2, x_3, y_4, y_5, \dots, y_{13}, i) = \sum_{k=4}^{13} \frac{y_k}{(1+i)^k} - \sum_{j=1}^3 \frac{x_j}{(1+i)^j} \rightarrow \max \\ DPP(x_1, x_2, x_3, y_4, y_5, \dots, y_{13}, i) = -\frac{\ln\left\{1 - \frac{S(x_j)}{P(y_k)}[1 - (1+i)^{-13}]\right\}}{\ln(1+i)} \rightarrow \min \\ 1 \leq \sum_{k=4}^{13} \frac{y_k}{(1+i)^k} \bigg/ \sum_{j=1}^3 \frac{x_j}{(1+i)^j} \leq DPI_{max} \\ 1000000 \leq x_j \leq 5000000, \quad j = 1, 2, 3 \\ 3000000 \leq y_k \leq 10000000, \quad k = 4, 5, \dots, 13 \\ 0.05 \leq i \leq 0.1 \end{array} \right.$$

Методом ГРНК с генерацией 10 000 случайных решений было получено оптимальное. Со следующими характеристиками:

- Инвестиции по годам $x = [4\,050\,295.16, 1\,105\,101.92, 1\,000\,000.00]$
- Среднегодовые инвестиции = 2 051 799.03
- Доходы по годам $y = [3\,275\,792.31, 4\,521\,177.34, 5\,614\,087.87, 6\,025\,825.46, 6\,851\,047.16, 7\,130\,813.59, 6\,030\,388.54, 7\,401\,915.42, 8\,241\,868.10, 6\,317\,614.52]$
- Среднегодовой доход = 6 141 053.03
- Ставка дисконтирования $i = 0.0502$ (5.02%)
- $NPV = 34.14$ млн руб.
- $DPP = 0.40$ лет
- $DPI = 6.9661$ (при ограничении $1 \leq DPI \leq 24.494$)
- $\lambda_1(NPV) = 0.5231$
- $\lambda_2(DPP) = 0.8856$
- $\lambda = \min(\lambda_1, \lambda_2) = 0.5231$

Качество решения оценивается по величине полученного λ . Согласно шкале оценки:

- $\lambda > 0.7$ – отличное решение
- $0.5 \leq \lambda \leq 0.7$ – хорошее решение (возможна дальнейшая оптимизация)
- $0.4 \leq \lambda < 0.5$ – удовлетворительное решение
- $\lambda < 0.4$ – решение требует доработки параметров проекта.

Полученное значение $\lambda = 0.5231$ соответствует хорошему решению, допускающему возможность дальнейшего улучшения.

Реализован комплекс аналитических графиков (см. рисунок 1). На основании визуализированных данных можно сделать следующие ключевые выводы:

- **Распределение денежных потоков** демонстрирует:
 - Значительные первоначальные инвестиции (пик в 1-й год - 4.6 млн руб.)
 - Постепенное нарастание доходов, достигающих 8.2 млн руб. к 9-му году
- **Анализ чувствительности** показывает:
 - Устойчивость проекта при изменении ставки дисконтирования от 5% до 10%

- Сохранение положительного NPV во всем рассматриваемом диапазоне
- **Пространство решений** подтверждает:
 - Нахождение выбранного решения на Парето-фронте
 - Оптимальное соотношение между критериями NPV и DPP
- **Ключевые показатели** свидетельствуют:
 - Высокую чистую приведенную стоимость ($NPV = 33.46$ млн руб.)
 - Кратчайший срок окупаемости ($DPP = 0.27$ лет)
 - Достаточный уровень доходности ($CPI = 10.36$)

Визуализированные данные подтверждают эффективность выбранной инвестиционной стратегии. Полученные результаты позволяют рекомендовать проект к реализации с учётом выявленных оптимальных параметров.

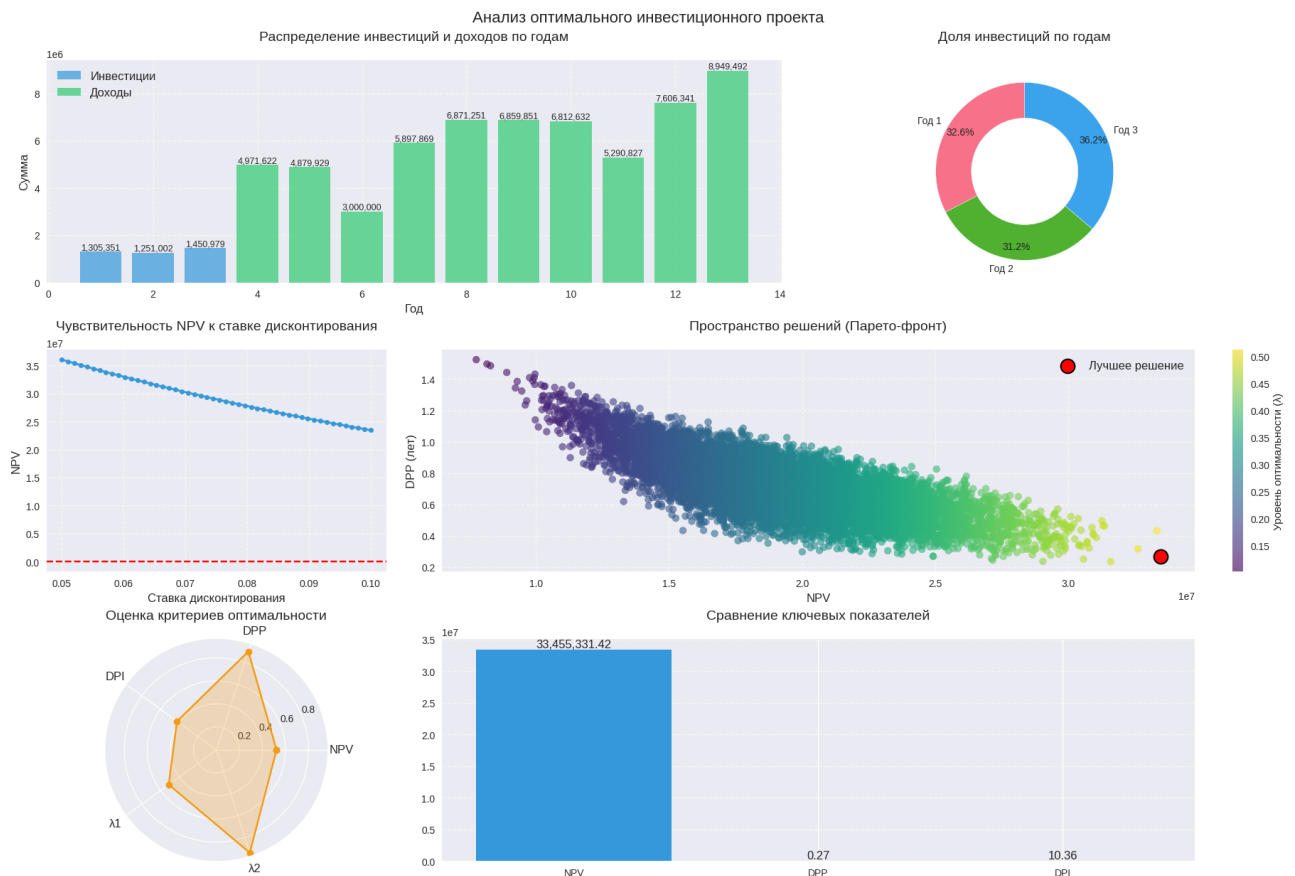


Рисунок 1 – Анализ оптимального инвестиционного проекта

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной бакалаврской работе проведено исследование методов многокритериальной оптимизации и их применение для оценки инвестиционных проектов. Основное внимание уделено анализу ключевых показателей эффективности, таких как чистая приведённая стоимость (NPV), внутренняя норма доходности (IRR), срок окупаемости (DPP) и индекс доходности (PI). Разработано аналитическое выражение для расчёта DPP, что позволило повысить точность оценки инвестиционных проектов.

Изучены методы многокритериальной оптимизации, включая метод гарантированного результата при нормализации критериев (ГРНК), метод последовательных уступок, метод идеальной точки и метод свёртки критериев. Практическая реализация алгоритма ГРНК на языке Python продемонстрировала его эффективность на примере инвестиционного проекта косметической компании NeoGlow. Результаты оптимизации показали хорошее качество решения, что подтверждает применимость выбранного метода для подобных задач.

Проведённый анализ и визуализация результатов позволили получить всестороннюю оценку проекта, учитывающую как финансовые показатели, так и ограничения, заданные инвестором. Работа подтвердила, что методы многокритериальной оптимизации являются мощным инструментом для принятия обоснованных решений в условиях множества противоречивых критериев.