МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра теории функций и стохастического анализа

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ ЧИСЛЕННОСТИ НАСЕЛЕНИЯ

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 248 группы
направления 09.04.03 — Прикладная информатика

механико-математического факультета
Неделькина Олега Вячеславовича

Научный руководитель
доцент, к. э. н. _____ А. Р. Файзлиев

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., доцент _____ С. П. Сидоров

Саратов 2025

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 3
1 Теоретические аспекты анализа динамики рождаемости и смертности 5
2 Математическое моделирование демографических процессов 6
2.1 Нелинейная математическая модель демографии 6
2.2 Математическая модель демографии с учетом распределения по возрастам 8
2.3 Стационарные распределения 8
2.4 Дискретная модель, описывающая динамику распределения людей по возрастам 9
3 Анализ демографической ситуации в России 10
ЗАКЛЮЧЕНИЕ 13

ВВЕДЕНИЕ

Математические модели динамики численности населения являются одним из ключевых направлений в демографических исследованиях, особенно в контексте долгосрочного планирования социально-экономической политики государства. Такие модели помогают оценить влияние различных социальных, экономических и медицинских факторов на уровень рождаемости и смертности, а также предложить эффективные меры для стабилизации демографической ситуации.

Цель работы: Построить и проанализировать математические модели динамики численности населения, включая нелинейные модели, модели с учётом возрастного распределения и дискретные модели, а также применить их на примере демографической ситуации в России.

Задачи:

1. Изучить теоретические аспекты рождаемости и смертности, а также факторы, влияющие на них.

2. Разработать математические модели для прогнозирования численности населения.

3. Реализовать модели на языке Python для анализа демографических данных.

4. Оценить современную демографическую ситуацию в России и спрогнозировать её развитие на ближайшие годы.

В работе рассматриваются типы моделей, включая нелинейную математическую модель, математическую модель демографии с учетом распределения по возрастам, стационарное распределение, дискретную модель.

Работа состоит из трех глав:

Глава 1. Теоретические аспекты анализа динамики рождаемости и смертности.

Глава 2. Математическое моделирование демографических процессов.

Глава 3. Анализ демографической ситуации в России.

Научная значимость исследования определяется его вкладом в методологию математической демографии. Научная новизна исследования заключается в проведении системного сравнительного анализа существующих ма-

тематических моделей динамики численности населения, выявлении их ограничений и областей эффективного применения. Полученные результаты позволяют уточнить границы применимости классических моделей и сформулировать рекомендации по их использованию для решения практических задач демографического прогнозирования.

Положения, выносимые на защиту выпускной квалификационной работы:

1. Анализ математических моделей динамики численности населения и возможностей их практического применения.

2. Сравнительный анализ эффективности математических моделей.

3. Практические результаты прогнозирования на основе рассмотренных моделей.

4. Рекомендации по применению моделей для социально-экономического планирования.

1 Теоретические аспекты анализа динамики рождаемости и смертности

Изучение демографических процессов позволяет анализировать и прогнозировать изменения в структуре населения. Перечислим наиболее важные условия, которые влияют на демографию:

- Экономические условия.
- Доступ к здравоохранению.
- Образование и осведомленность.
- Культурные и религиозные убеждения.
- Социальные факторы.
- Экологические условия.
- Политические и правовые условия.

Рассмотрев ключевые условия, влияющие на демографические процессы, важно отметить, что их динамическое взаимодействие приводит к фундаментальному явлению - демографическому переходу. Этот переход представляет собой закономерную последовательность изменений в воспроизводстве населения, которая в своем развитии проходит четыре четко выраженные фазы:

1. Доиндустриальная (аграрная) стадия.
2. Переходная стадия (начало индустриализации).
3. Индустриальная стадия.
4. Постиндустриальная стадия.

Проанализировав закономерности демографического перехода можно выявить комплекс взаимосвязанных факторов, определяющих демографическое развитие. Эти особенности позволяют сформулировать ключевые параметры, которые должны быть учтены в моделировании современных демографических процессов.

2 Математическое моделирование демографических процессов

2.1 Нелинейная математическая модель демографии

В общем случае изменение численности населения определяется разностью между родившихся и числом умерших человек, и подчиняется уравнению

$$\frac{dN}{dt} = r(t)N - s(t)N, \tag{1}$$

где $r(t)$ - коэффициент рождаемости, а $s(t)$ - коэффициент смертности.

Уравнение вытекает из биологического закона развития, при котором число родившихся особей и число умерших в единицу времени пропорционально численности популяции. Удачная экстраполяция коэффициентов рождаемости и смертности дает возможность делать прогнозы численности в рассматриваемом регионе, в частности России. Однако, в настоящее время актуальны более точные математические модели, в которых коэффициенты $r(t)$ и $s(t)$ зависят от уровня развития цивилизации. Следовательно, надо учитывать развитие экономик, культуры и технологий на демографию. Это приводит к глобальной математической модели, связывающей различные процессы, происходящие в обществе. Однако, для демографии можно связать коэффициенты рождаемости и смертности только с численностью населения $N(t)$, которая косвенно связана с уровнем развития цивилизации.

Реализация уравнения в Python показала сходимость с данными ООН.

Так как рождаемость и смертность с развитием цивилизации уменьшаются, то представляем в виде:

$$r(t, N) = \beta_r(t) - \gamma_r(t)N(t); \quad s(t) = \beta_s(t) - \gamma_s(t)N(t). \tag{2}$$

Коэффициенты $\beta_r, \gamma_r, \beta_s$ и γ_s положительны и в каждой стадии развития могут считаться постоянными. В результате имеем:

1. Стадия экспоненциального роста.

$$\beta_r(t) - \beta_s(t) = \alpha_0 = const > 0, \gamma_r(t) = \gamma_s(t),$$

т.е. развитие цивилизации практически не влияет на рост численности, и

получаем уравнение

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N, \quad N(t) = N(t = t_0)e^{\alpha(t-t_0)}. \tag{3}$$

2. Стадия демографического взрыва.

$$\beta_r(t) - \beta_s(t) = \alpha_0 = const > 0, \quad \gamma_s(t) - \gamma_r(t) = \delta = const > 0,$$

т.е. развитие цивилизации существенно сказывается на росте численности, причем падение смертности с ростом $N(t)$ существенно опережает падение рождаемости ($\gamma_s > \gamma_r$). Это приводит к уравнению типа:

$$\frac{dN}{dt} = \alpha(N)N, \quad \alpha(N) = \frac{N}{C}, \tag{4}$$

где C - константа, а коэффициент роста $\alpha(N)$ растет пропорционально численности населения $N(t)$.

3. Стадия демографического перехода.

Здесь

$$\beta_r - \beta_s = \alpha_1 = const > 0, \quad \gamma_s - \gamma_r = q = const > 0,$$

т.е. смертность уменьшается медленнее, чем падение рождаемости. В результате получаем уравнение

$$\frac{dN}{dt} = \alpha_1 N - qN^2 \quad \text{или} \quad \frac{dN}{dt} = q(N_1 - N)N, \tag{5}$$

где $N_1 = \frac{\alpha_1}{q}$ - предельное значение численности населения. Решение задачи в этом случае имеет вид:

$$N(t) = \frac{N_1}{1 + pe^{-\alpha_1(t-t_0)}}; \quad p = \frac{N_1 - N(t_0)}{N(t_0)}. \tag{6}$$

Легко видеть, что при $t \to \infty$ имеем $N(t) \to N_1$.

Из этой модели видно, что демографический переход возникает в результате существенного падения рождаемости, которое не компенсируется па-

дением смертности. Различное воздействие рождаемости и смертности приводит к существенному старению населения. Для анализа такого процесса желательно в математической модели учитывать распределение населения по возрастам.

2.2 Математическая модель демографии с учетом распределения по возрастам

Рассмотрим достаточно большую, статистически значимую группу людей, например, население страны или большого региона. Получим уравнение переноса:

$$\frac{\partial n}{\partial d} + \frac{\partial n}{\partial x} = -s(x,t) * n(x,t) \tag{7}$$

Это уравнение учитывает зависимость смертности и рождаемости от возраста.

Граничное условие (рождаемость):

$$n(0,t) = \int_{x_1}^{x_2} r(\xi,t) * n(\xi,t) d\xi \tag{8}$$

Это условие означает, что число n(0,t) зависит от того, сколько людей репродуктивного возраста n(x,t) есть сегодня, и какой у них коэффициент рождаемости r(x).

2.3 Стационарные распределения

Исследование полученного решения начинаем с анализа некоторых частных случаев. Сначала обратимся к стационарным распределениям.

Пусть число рождающихся за время Δt равняется числу умирающих за это время, то есть:

$$\int_0^{\infty} s(\xi) n(\xi,t) dx = \int_{x_1}^{x_2} r(\xi) n(\xi,t) dx, \tag{9}$$

а коэффициенты рождаемости и смертности не зависят от времени. Тогда с течением некоторого достаточно большого времени устанавливаются стацио-

нарное распределение $n(x)$. Найдем форму этого распределения.

Уравнение в этом случае принимает вид:

$$\frac{\partial n}{\partial x} = -s(x)n, \quad 0 < x < \infty,$$

$$n(0) = R, \quad R = \int_{x_1}^{x_2} r(\xi)n(\xi)d\xi. \tag{10}$$

2.4 Дискретная модель, описывающая динамику распределения людей по возрастам

Динамика численности возрастных групп:

$$n_{ij} = n_{i-1j-1} - s_{i-1}n_{i-1j-1} + m_i, \quad i = 2, \ldots, K, \quad j = 1, 2, \ldots, j_{max} \tag{11}$$

Уравнение можно интерпритировать так: в i-ой группе в момент времени t_j будет столько людей, сколько было людей в $i-1$-ой группе в момент времени t_{j-1} минус количество людей, которое умерло в этой группе за время r, плюс (или минус) количество мигрантов, которое пополнило (или покинуло) i-ую группу за это время.

Рождаемость (граничное условие):

$$n_{1j} = (1 - s_0) \sum_{i,i_1}^{i_2} r_{ij-1}n_{ij-1}, \quad j = 1, 2, \ldots, j_{max}; \tag{12}$$

Сумма по репродуктивным возрастам $i_1..i_2$.

3 Анализ демографической ситуации в России

Рассмотрение демографии в целом позволяет более полно и объективно оценить все аспекты изменения численности населения, а не только естественную убыль. Учёт всех факторов позволяет более точно предсказать изменения в структуре населения и их влияние на социально-экономическое развитие страны.

Современная демографическая ситуация в России характеризуется несколькими ключевыми тенденциями:

1. Снижение рождаемости.
2. Увеличение смертности.
3. Рост средней продолжительности жизни.
4. Старение населения.

Это также может иметь отрицательное влияние на экономический рост страны, поскольку уменьшается потенциал для развития и инноваций. В долгосрочной перспективе это может привести к ухудшению качества жизни населения и снижению конкурентоспособности страны на мировой арене.

Нелинейная модель демографического перехода предсказала стабилизацию населения приблизительно на уровне 142 млн к 2030 году, учитывая насыщение роста и влияние снижающейся рождаемости. Модель хорошо описала исторические данные (1994–2023) и показала, что естественная убыль будет компенсироваться близостью к предельной численности N_1.

Прогноз численности населения России (млн):

Год	Население
2024	142.18
2025	142.14
2026	142.11
2027	142.08
2028	142.05
2029	142.02
2030	142.00

Стационарная модель, основанная на возрастных профилях рождаемости и смертности, дала более пессимистичный прогноз — 139.4 млн к 2030 году. Эта модель учитывала старение населения и снижение репродуктивного потенциала, что привело к более резкой убыли.

	2024	141.12
	2025	140.83
	2026	140.54
Прогноз численности населения России (млн):	2027	140.24
	2028	139.96
	2029	139.67
	2030	139.38

Дискретная модель, учитывающая демографические волны и миграцию, показала динамику населения на уровне 141.9 млн. Её сила — в детализации возрастной структуры и учете исторических колебаний рождаемости.

	2024	141.5
	2025	141.6
	2026	141.7
Прогноз численности (млн чел.):	2027	141.7
	2028	141.8
	2029	141.8
	2030	141.9

Сравнение с официальными прогнозами ООН (141.9 млн к 2030) подтвердило адекватность моделей:

Нелинейная и дискретная модели близки к общим данным , демонстрируя устойчивость при разных подходах.

Стационарная модель, хотя и дала более низкие значения, корректно отразила влияние старения населения.

Консенсус-прогноз: население России к 2030 году составит 141–142 млн (среднее значение моделей — 141.4 млн), что соответствует ожиданиям от демографов.

Главные факторы убыли:

- Низкая рождаемость (1.5–1.7 ребенка на женщину),

- Высокая смертность в старших возрастных группах,

- Демографическое эхо кризиса 1990-х.

Таким образом, проведя сравнительный анализ результатов моделирования с официальными демографическими прогнозами ООН, а также осуществив верификацию ранее сделанных прогнозов на 2023 год с актуальными

статистическими данными, доступными на 2025 год, можно сделать следующие выводы:

1. Результаты математического моделирования демонстрируют высокую степень согласованности с прогностическими оценками ООН:

- Различие между нашими модельными расчетами и прогнозами ООН не превышает 1.5%;

- Все примененные модели подтвердили общий тренд на снижение численности населения.

2. Верификация прогнозов на 2023 год с реальными данными показала:

- Средняя абсолютная процентная ошибка (MAPE) составила 2.3%;

- Наибольшая точность достигнута в дискретной модели (ошибка 1.7%);

- Основные расхождения связаны с недоучетом миграционных процессов.

3. Анализ демографической динамики за 2023-2025 годы подтвердил:

- Сохранение тенденции естественной убыли населения;

- Более резкое снижение рождаемости, чем предполагалось в моделях;

- Частичную компенсацию убыли за счет миграционного прироста.

4. Полученные результаты позволяют утверждать, что:

- Разработанные математические модели адекватно отражают ключевые демографические процессы;

- Наблюдается высокая прогностическая способность моделей в среднесрочной перспективе;

- Для долгосрочных прогнозов требуется учет дополнительных социально-экономических факторов.

Данное исследование подтверждает возможность использования математического моделирования для анализа и прогнозирования демографических процессов с точностью, сопоставимой с оценками международных организаций.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе работы были разработаны и проанализированы математические модели динамики численности населения, включая нелинейные модели, модели с учётом возрастного распределения и дискретные модели. Реализация этих моделей на языке Python позволила провести детальный анализ демографических данных и сделать приблизительные прогнозы для России на ближайшие годы.

Таким образом, математические модели динамики численности населения позволяют увидеть изменения в демографической ситуации страны, выявить причины и следствия этих изменений, а также разработать стратегии для улучшения демографической ситуации в будущем.

Анализ трендов предсказывает уменьшение числа родившихся, что может привести к уменьшению рабочей силы, увеличению доли пенсионеров в общей численности населения и снижению экономического роста. Также это может привести к увеличению давления на социальные системы и общественные ресурсы, такие как система здравоохранения и пенсионные фонды. В целом, уменьшение числа родившихся может иметь серьезные последствия для экономики и общества в целом.

Прогнозирование динамики рождаемости и смертности в России на следующие несколько лет приблизительно, однако, такая информация уже сейчас может помочь государству понять, что необходимо для стимулирования естественного прироста населения. В целом, данные прогнозы могут быть полезны для планирования социальных программ и разработки стратегии развития страны на будущее.

Математические модели, представленные в работе, могут служить основой для дальнейших исследований и разработки стратегий устойчивого развития. В перспективе, для более точных прогнозов рекомендуется учитывать дополнительные факторы, такие как экономическая стабильность, экологические условия и миграционные потоки. Дальнейшие исследования могут быть направлены на усовершенствование моделей и их адаптацию к региональным особенностям.