

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра теории функций и стохастического анализа

**ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЗМОВ ГЕНЕРАЦИИ СЛОЖНЫХ
СЕТЕЙ**

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 248 группы
направления 09.04.03 — Прикладная информатика

механико-математического факультета
Мингачева Александра Николаевича

Научный руководитель
доцент, к. ф.-м. н.

Н. Ю. Агафонова

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., доцент

С. П. Сидоров

Саратов 2025

Введение

В данной работе рассматривается обобщение модели Барабаши-Альберт. На каждой итерации $t + 1$ обобщенной модели к сети присоединяется полный граф K_l^{t+1} с l вершинами, и каждая из вершин полного графа соединяется m ребрами с узлами сети по методу предпочтительного присоединения. Методом среднего поля даны оценки динамики характеристик модели. Работа прошла апробацию на различных конференциях, в частности, на ежегодной студенческой конференции «Актуальные проблемы математики и механики», которую проводил механико-математический факультет СГУ в апреле 2025 года, в секции «Анализ данных», в XIII Международной молодежной научно-практической конференции «Математическое и компьютерное моделирование в экономике, страховании и управлении рисками», ноябрь 2024 года.

Актуальность

Многие сложные сети – социальные, экономические, сети цитирования, со временем развиваются, добавляя новые узлы, которые в момент их появления присоединяются к уже существующим. Среди растущих сетей особым интересом отмечены безмасштабные сети, в которых распределение степеней подчиняется степенному закону. Одной из первых успешных попыток моделирования растущих сетей была модель Барабаши-Альберт. Чтобы получить более точные приближения к реальным сетям, исследователи предложили множество модификаций этой модели.

Целью данной работы является разработка новых моделей и исследование механизмов генерации сложных сетей.

Структура бакалаврской работы

Работа состоит из введения, семи разделов и заключения.

— В первом разделе даются определения и обозначения. Вводятся локальные характеристики растущих сетей: степень узла, суммарная степень всех соседей узла, средняя степень всех соседей узла, индекс дружбы узла, локальный коэффициент кластеризации.

— Во втором разделе описываются модель Барабаши-Альберт и модель Триадного замыкания. Моделируется распределение степеней узлов. Моделируется динамика ожидаемой степени узла, ожидаемой суммы степеней соседей узла, математического ожидания индекса дружбы для этих моделей

при различных значениях параметров. Результаты численных экспериментов сравниваются с теоретическими.

— В третьем разделе описывается модификация модели Триадного Замыкания. Моделируются локальные характеристики. Результаты сравниваются с соответствующими результатами базовых моделей.

— В четвёртом разделе описывается обобщение модели Барабаши-Альберт. При помощи метода среднего поля, строятся теоретические оценки динамики локальных характеристик. Моделируется динамика моментов локальных характеристик. Результаты подтверждаются при помощи численного моделирования на языке программирования *Python*. Строятся оценки параметров кластеризации обобщенной модели. Доказывается, что значение среднего коэффициента кластеризации при росте сети стремится к отличной от нуля константе. Экспериментально подтверждается гипотеза о том, что средняя длина кратчайшего пути сети подчинена обобщенному логарифмическому закону. Графы обобщенной модели рассматриваются в контексте сетей малого мира. Исследуется надежность сетей обобщенной модели. Показывается, что ожидаемое значение средней степени сети и ожидаемое значение среднего значения квадратов степеней асимптотически стремятся к константе. При помощи критерия Моллоя-Рида устанавливается критическая доля узлов, необходимая для разрушения сети посредством случайной атаки. Показывается, что сети обобщенной модели менее устойчивы к случайным атакам чем сети Барабаши-Альберт.

Основное содержание работы

Пусть $V(G)$ – множество вершин некоторого графа G , $E(G)$ – множество ребер. Последовательность графов $\{G_t\}_{t=0}^{\infty}$ называется *растущей сетью*, если $V(G_t) \subseteq V(G_{t+1})$ и $E(G_t) \subseteq E(G_{t+1})$.

Пусть $t_i = \min \{t \mid v_i \in V(G_t)\}$ – номер итерации на которой узел v_i добавляется к сети. Пусть $V(\{G_t\}_{t=0}^{\infty}) = \bigcup_{t=0}^{\infty} V(G_t)$. Рассматривается нумерация вершин v_i такая, что из $t_i < t_j$ следует $i < j$ и $\{i \mid v_i \in V(\{G_t\}_{t=0}^{\infty})\} = \mathbb{Z}_+$.

Пусть $d_i(t)$ – степень узла v_i на итерации t . Пусть $s_i(t)$ – сумма степеней соседей узла v_i на итерации t :

$$s_i(t) = \sum_{j:(v_i,v_j) \in E(G_t)} d_j(t). \quad (1)$$

Пусть $\alpha_i(t)$ – средняя степень соседей узла v_i на итерации t , т.е. $\alpha_i(t)$ есть отношение суммы степеней соседей узла v_i к количеству его соседей:

$$\alpha_i(t) = \frac{s_i(t)}{d_i(t)}. \quad (2)$$

Пусть $\beta_i(t)$ – индекс дружбы узла v_i на итерации t :

$$\beta_i(t) = \frac{s_i(t)}{d_i^2(t)} = \frac{\alpha_i(t)}{d_i(t)}. \quad (3)$$

Пусть $\theta_i(t)$ – коэффициент кластеризации узла v_i на итерации t :

$$\theta_i(t) = \frac{2S_i(t)}{d_i(t)(d_i(t) - 1)}, \quad (4)$$

где $S_i(t)$ – количество триад в которых узел v_i является одной из вершин на итерации t . Пусть $\theta(t)$ – средний коэффициент кластеризации сети:

$$\theta(t) = \frac{1}{|V(G_t)|} \sum_{i:v_i \in V(G_t)} \theta_i(t). \quad (5)$$

Пусть ζ^{t+1} – случайная величина такая, что

$$P(\zeta^{t+1} = i) = \frac{d_i(t)}{\sum_{j:v_j \in V(G_t)} d_j(t)}. \quad (6)$$

Пусть L – средняя длина кратчайшего пути сети G_t .

Новая модель, являющаяся обобщением модели Брабаши-Альберт, определяется следующим образом:

В соответствии с рисунком 1, на каждой итерации $t + 1$:

1. К графу G_t присоединяется полный граф K_l^{t+1} с l вершинами.
2. Каждая вершина $v_j \in V(K_l^{t+1})$ соединяется m ребрами с вершинами $v_i \in V(G_t)$ с использованием механизма *предпочтительного присоединения*, т.е. каждое из этих ребер появляется в результате реализации ζ^{t+1} . Если $\zeta^{t+1} = i$, то к графу добавляется ребро (v_j, v_i) .

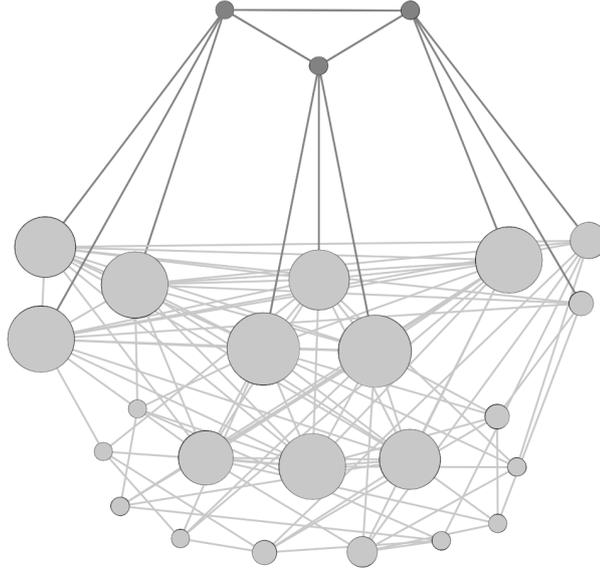


Рисунок 1 – Присоединение вершин и ребер на итерации $t + 1$ для сети, растущей в соответствии с новой моделью при $m = 3, l = 3$. Размер узлов пропорционален их степени

Утверждение 1.

$$Ed_i(t) = (m + l - 1) \left(\frac{t}{t_i} \right)^a, \quad a = \frac{1}{2 + \frac{l-1}{m}}. \quad (7)$$

В соответствии с рисунком 2, погрешность параметра a для разных m и l в соответствии с (7), составляет менее 0.01. Поведение $Ed_i(t)$ совпадает с ожидаемым.

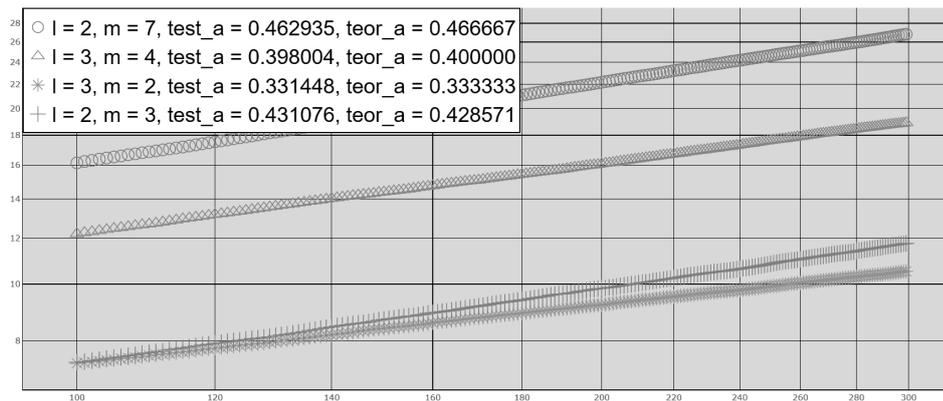


Рисунок 2 – Траектории $Ed_i(t)$ при t от 100 до 300 для узла v_{50} для различных m и l , построенные генерацией 1000 различных сетей обобщённой модели. Оси логарифмические. Здесь $test_a$ – регрессионная оценка параметра a , $teor_a$ – значение a по формуле (7)

Утверждение 2. *Распределение степеней вершин подчинено степенному закону*

$$\mathbf{P}(k) \propto k^{-\gamma}, \quad \gamma = 3 + \frac{l-1}{m}. \quad (8)$$

Утверждение 3.

$$Es_i(t) = a(m+l-1)^2 \left(\frac{t}{t_i}\right)^a (\ln t + C_s), \quad C_s = \text{const}. \quad (9)$$

Утверждение 4.

$$E\beta_i(t) = a \left(\frac{t_i}{t}\right)^a (\ln t + C_\beta), \quad C_\beta = \text{const}. \quad (10)$$

Утверждение 5.

$$E\alpha_i(t) = C_\alpha + a(m+l-1) \ln t + O(t^{-a} \ln t). \quad (11)$$

Утверждение 6.

$$Ed_i^2(t) = (m+l-1)(m+l) \left(\frac{t}{t_i}\right)^{2a} - (m+l-1) \left(\frac{t}{t_i}\right)^a. \quad (12)$$

Утверждение 7.

$$E \frac{s_i^2(t)}{d_i^3(t)} = (m+l-1) \left(\frac{t_i}{t}\right)^a \left(a^2 \ln^2 t + 2a^2 C_\beta \ln t + C_c \right), \quad C_c = \text{const}. \quad (13)$$

Следствие 1.

$$\text{Var } d_i(t) = (m+l-1) \left[\left(\frac{t}{t_i}\right)^{2a} - \left(\frac{t}{t_i}\right)^a \right]. \quad (14)$$

Утверждение 8.

$$E\alpha_i^2(t) = C_{\alpha^2} + a^2(m+l-1)^2 \ln^2 t + 2a(m+l-1)C_\alpha \ln t - \\ - 3a^2(m+l-1) \ln^2 t \left(\frac{t_i}{t}\right)^a + O(t^{-a} \ln t), \quad C_{\alpha^2} = \text{const}. \quad (15)$$

Следствие 2.

$$\text{Var } \alpha(t) = C_{\alpha^2} - C_{\alpha}^2 - a^2(m+l-1) \ln^2 t \left(\frac{t_i}{t}\right)^a + O(t^{-a} \ln t). \quad (16)$$

Утверждение 9.

$$\begin{aligned} E s_i(t_i) &\sim \\ &\sim (m+l-1)(l-1) + (m+l-1)(m+l) \frac{a}{1-2a} - (m+l-1) \frac{a}{1-a}. \end{aligned} \quad (17)$$

Утверждение 12.

$$E d_i^n(t) = C_1 \left(\frac{t}{t_i}\right)^a + C_2 \left(\frac{t}{t_i}\right)^{2a} + \dots + C_n \left(\frac{t}{t_i}\right)^{na}, \quad (18)$$

где C_1, \dots, C_n – некоторые константы от m, n, l .

Утверждение 14. Коэффициент асимметрии $\gamma_1(d_i(t))$ распределения величины $d_i(t)$ асимптотически следует

$$\gamma_1(d_i(t)) = \frac{2 \left(\frac{t}{t_i}\right)^a - 1}{(m+l-1)^{1/2} \left(\frac{t}{t_i}\right)^{a/2} \left(\left(\frac{t}{t_i}\right)^a - 1\right)^{1/2}}. \quad (19)$$

Утверждение 15. Куртозис величины $d_i(t)$ асимптотически описывается соотношением

$$\begin{aligned} \text{Kurt } d_i(t) &= \\ &= \frac{\left[\left(\frac{t}{t_i}\right)^{2a} - \left(\frac{t}{t_i}\right)^a\right] (3(m+l-1)(m+l+1) \left[\left(\frac{t}{t_i}\right)^{2a} - \left(\frac{t}{t_i}\right)^a\right] + (m+l-1))}{((m+l-1) \left[\left(\frac{t}{t_i}\right)^{2a} - \left(\frac{t}{t_i}\right)^a\right])^2}. \end{aligned} \quad (20)$$

Утверждение 17. При $l > 2$ средний коэффициент кластеризации сети

асимптотически следует

$$E\theta(t) \sim \frac{(l-1)(l-2)}{(m+l-1)(m+l-2)(1+2a)} := \Theta. \quad (21)$$

В соответствии с рисунком 3, предельные значения среднего коэффициента кластеризации полученные симуляцией близки к теоретическим, определяемым соотношением (21).

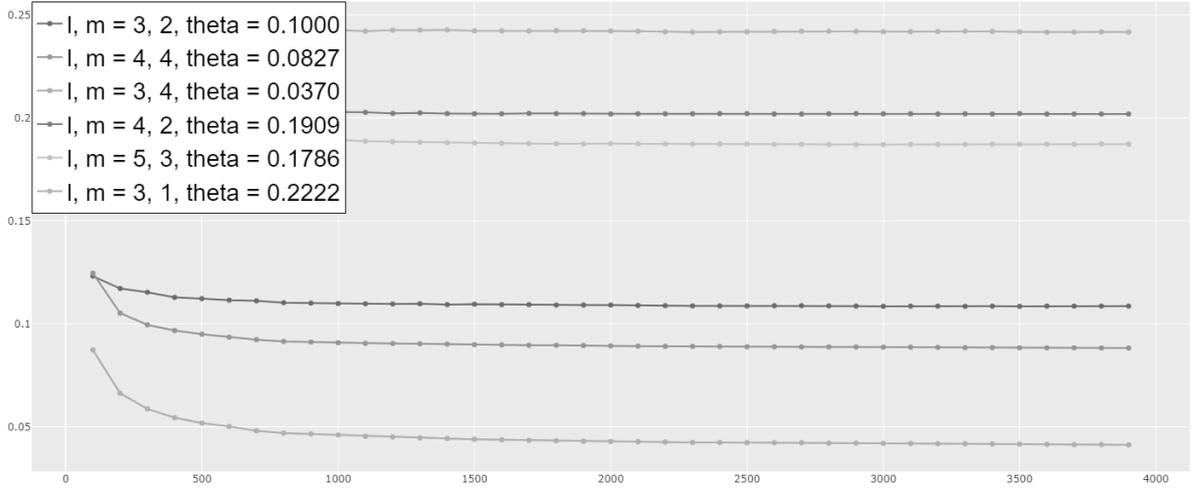


Рисунок 3 – Траектории $E\theta(t)$ при t от 100 до 3900 для различных m и l

Гипотеза 1. Средняя длина кратчайшего пути сети подчинена обобщенному логарифмическому закону

$$L = A \log(|V(G_t)| - B) + C, \quad (22)$$

где A, B, C – некоторые константы от m, l .

Утверждение 19. Для обобщенной модели

$$\langle k \rangle := \frac{1}{|V(G_t)|} \sum_{i: v_i \in V(G_t)} Ed_i(t) \sim \frac{(m+l-1)}{1-a}. \quad (23)$$

Утверждение 20. Для обобщенной модели, при $l > 1$

$$\langle k^2 \rangle := \frac{1}{|V(G_t)|} \sum_{i: v_i \in V(G_t)} Ed_i^2(t) \sim \frac{(m+l-1)(m+l)}{1-2a} - \frac{(m+l-1)}{1-a}. \quad (24)$$

Утверждение 21. Для обобщенной модели, при $l > 1$ доля узлов, необходимая для разрушения сети посредством случайной атаки

$$f_c \sim 1 - \frac{1}{(m+l)\frac{m+1-1}{l-1} - 2} = \text{const.} \quad (25)$$

В соответствии с рисунком 4, сети обобщенной модели по отношению к случайным атакам подобны сетям Эрдеша-Реньи. При $l > 1$ критический порог разрушения посредством случайных атак постоянен и не зависит от размера сети.

Robustness profile

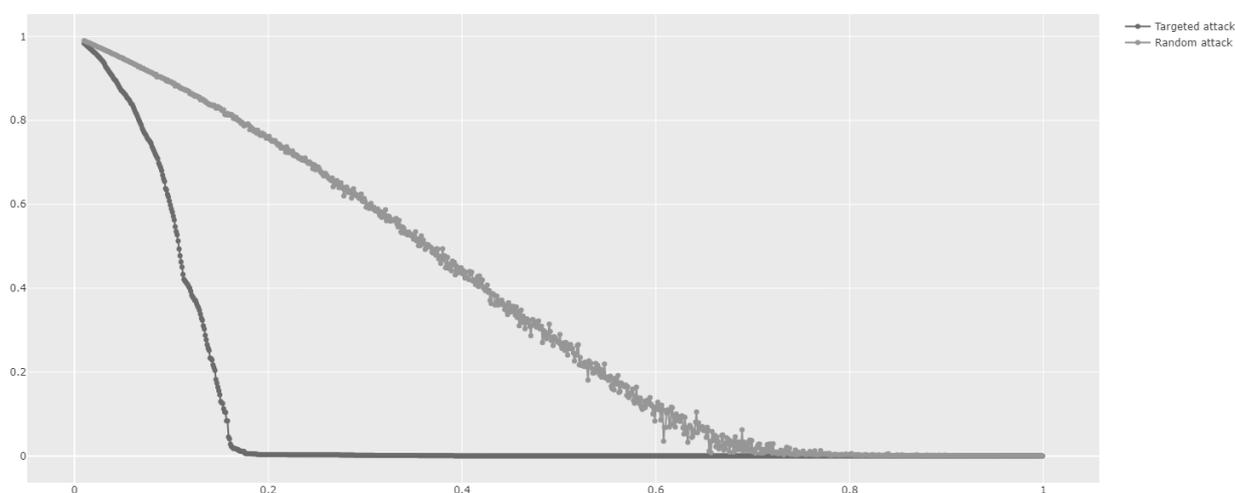


Рисунок 4 – Профиль надежности для сети обобщенной модели при $l = 2, m = 1$

Заключение

В настоящей работе рассмотрены модель Барабаши-Альберт и её обобщение. Получены теоретические оценки основных характеристик обобщённой модели. Установлен закон распределения степеней вершин. Для моделирования локальных характеристик модели были написаны программы на языке *python*. Динамика характеристик моделей подтверждена экспериментально.

Утверждения 1-8, 12, 15, полученные с использованием метода среднего поля, при $l = 1$ совпадают с соответствующими известными результатами для модели Барабаши-Альберт. Обобщённая модель изменяет $\gamma = 3$ и $a = \frac{1}{2}$ модели Барабаши-Альберт, в зависимости от параметров l и m . В отличие от модели Барабаши-Альберт для обобщенной модели ожидаемое значение

среднего значения квадратов степеней стремится к константе, иными словами существует второй момент распределения степеней. В следствии этого обобщенная модель при $l > 1$ менее устойчива к случайным атакам, чем модель Барабаши-Альберт. Также показано, что при $l > 2$ средний коэффициент кластеризации асимптотически стремится к отличной от нуля константе, а средняя длина кратчайшего пути подчинена обобщенному логарифмическому закону. Следовательно, при $l > 2$ обобщенная модель поражает сети малого мира.

Естественным развитием данной работы является рассмотрение общения, подобного обобщению модели Барабаши-Альберт, для модели Тriaдного Замыкания. Также интересной представляется модель, в которой параметр l является случайной величиной, то есть, модель со случайным размером присоединяемых групп.