

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической физики и вычислительной математики

Применение систем сдвигов и сжатия в обработке информации

название темы выпускной квалификационной работы полужирным шрифтом

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

Студента(ки) 2 курса 217 группы

направления 01.04.02 – Прикладная математика и информатика

код и наименование направления

механико-математического факультета

наименование факультета, института, колледжа

Яценко Микаела Андреевича

фамилия, имя, отчество

Научный руководитель

доцент, к.ф.-м.н.

должность, уч. степень, уч. звание

подпись, дата

Д.С. Лукомский

инициалы, фамилия

Заведующий кафедрой

д.ф-м.н., профессор

должность, уч. степень, уч. звание

дата, подпись

В.А. Юрко

инициалы, фамилия

Саратов, 2025 год

Введение. В эпоху стремительного развития цифровых технологий обработка и хранение графических данных приобретают все большее значение. Ежедневно генерируются терабайты изображений — от медицинских диагностических снимков до спутниковых фотографий Земли и мультимедийного контента для социальных сетей. В условиях экспоненциального роста объемов данных традиционные методы хранения и обработки изображений становятся неэффективными, что создает острую потребность в разработке и оптимизации алгоритмов сжатия.

Одним из эффективных методов решения задачи сжатия и обработки графической информации являются системы Хаара и Уолша. Исторически развитие методов сжатия связано с появлением ортогональных преобразований, которые позволяют представлять сигналы и изображения в более компактной форме.

Система Хаара, разработанная Альфредом Хааром в 1909 году, стала первым известным примером вейвлет-системы и получила широкое применение в обработке сигналов и изображений благодаря своей локальности, простоте реализации и высокой эффективности. Она основана на использовании простых фильтров, что позволяет быстро выполнять преобразование и легко внедрять его в различные алгоритмы сжатия, такие как стандарт JPEG 2000, системы компьютерного зрения и алгоритмы для интернета вещей (IoT).

В 1923 году Джозеф Уолш предложил систему ортогональных функций, обладающую свойствами, аналогичными тригонометрическим функциям, но принимающую только значения ± 1 . Это делает преобразование Уолша особенно полезным для цифровой обработки сигналов благодаря высокой скорости вычислений и низкой сложности реализации. Благодаря своей бинарной природе оно широко применяется в цифровых коммуникациях, включая технологии 5G, а также в обработке спутниковых изображений, где важна высокая скорость анализа данных.

Использование алгоритмов быстрого преобразования систем Хаара и Уолша позволяет не только значительно уменьшить объем данных при сохранении необходимого качества изображений, но и обеспечивает высокую скорость обработки — что особенно важно в современных приложениях реального времени.

В этой работе мы сосредоточимся на исследовании методов сжатия графической информации в формате ВМР (Bitmap) с помощью быстрых преобразований Хаара и Уолша. Формат ВМР является одним из наиболее распространенных способов хранения растровых изображений; однако он требует значительных объемов памяти. Благодаря своей простоте и некомпрессированному характеру ВМР широко используется в различных приложениях, но его объем недостаточно эффективен для хранения и передачи данных. Поэтому применение методов сжатия, таких как быстрое преобразование Уолша, становится важной задачей.

Целью данной работы является исследование применения систем Хаара и Уолша для обработки графической информации с целью определения оптимального порога сжатия, при котором достигается приемлемое качество восстановленных изображений. Также будет рассмотрена возможность повышения степени сжатия за счет перехода на цветовую модель YCbCr и анализа влияния этого метода на качество и эффективность сжатия.

Работа состоит из четырёх разделов, в которых рассматриваются теоретические основы систем и их применение в обработке информации. В первой главе описываются теоретические основы системы Хаара и её свойства. Во втором разделе рассматривается система Уолша и её основные свойства. Третий раздел посвящён описанию алгоритмов быстрого преобразования систем. В четвёртом разделе представлены практические цели работы, программа, разработанная для их достижения, а также описание формата ВМР, цветовых моделей и метрик оценки качества изображений. В конце этого раздела проводится анализ полученных результатов.

Основное содержание работы. Сначала дадим определение функции Хаара.

Функции Хаара. Перед этим введем стандартные обозначения двоичных интервалов.

Определение 1. *Двоичным интервалом называется интервал вида*

$$\left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k} \right), \quad \text{где } i = 1, 2, \dots, 2^k, k = 0, 1, \dots$$

Для $n = 2^k + i, i = 1, 2, \dots, 2^k, k = 0, 1, \dots$ обозначим

$$\Delta_n = \Delta_k^i = \left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k} \right); \quad \bar{\Delta}_n = \left[\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k} \right];$$

$$\Delta_1 = \Delta_0^0 = (0, 1); \quad \bar{\Delta}_1 = [0, 1].$$

Если $\delta \subset (0, 1)$ - какой-либо интервал, то через δ^+ и δ^- обозначаются соответственно левая и правая половины интервала δ (без включения средней точки). В частности $(n = 2^k + i)$,

$$\Delta_n^+ = (\Delta_k^i)^+ = \left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{2i-1}{2^{k+1}} \right) = \Delta_{k+1}^{2i-1},$$

$$\Delta_n^- = (\Delta_k^i)^- = \left(\frac{2i-1}{2^{k+1}}, \frac{i}{2^k} \right) = \Delta_{k+1}^{2i}.$$

Интервалы $\{\Delta_k^i\}_{i=1}^{2^k}$ мы будем называть интервалами k -й пачки, $k = 0, 1, \dots$.

Определение 2. Система Хаара - это система функций

$$\chi = \{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}, \quad x \in [0, 1]$$

в которой $\chi_1(x) \equiv 1$, а функция $\chi_n(x)$ с $2^k < n \leq 2^{k+1}$, $k = 0, 1, \dots$, определяется так:

$$\chi_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \notin \bar{\Delta}_n, \\ 2^{k/2} & \text{при } x \in \Delta_n^+, \\ -2^{k/2} & \text{при } x \in \Delta_n^-. \end{cases}$$

Функции Уолша. Для определения функций Уолша в дальнейшем будем использовать запись числа x в двоичной системе: для $x \geq 0$

$$x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \theta_k(x) 2^{-k}, \quad \text{где } \theta_k = 0 \text{ или } 1 \quad (21)$$

Коэффициенты $\theta_k(x)$ определяются однозначно, если дополнительно считать, что для двоично-рациональных x рассматривается разложение (21) с конечным числом ненулевых коэффициентов.

Ясно, что для $x \in (0, 1)$ $\theta_k(x) = 0$ при $k \leq 0$.

Если число $n > 0$ - целое, то

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} \theta_{-k}(n) 2^k = \sum_{k=0}^{k(n)} \theta_{-k}(n) 2^k$$

$$\theta_{-k(n)}(n) = 1, \quad k(n) = [\log_2 n].$$

Определение 5. Система Уолша - это система функций

$$W = \{w_n(x)\}_{n=0}^{\infty}, \quad x \in [0, 1]$$

в которой $w_0(x) \equiv 1$, а при $n \geq 1$

$$w_n(x) = \prod_{k=0}^{\infty} [r_{k+1}(x)]^{\theta_{-k}(n)} = r_{k(n)+1}(x) \prod_{k=0}^{k(n)-1} [r_{k+1}(x)]^{\theta_{-k}(n)}$$

где $r_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$, — функции Радемахера.

Быстрое преобразование Хаара

Пусть функции Хаара заданы на $[0, 1)$ ($N = 0, 1, \dots; j = 0, 1, \dots, 2^N - 1$).

Зафиксируем $N \in \mathbb{N}$ и представим $[0, 1)$ в виде объединения двоичных полуинтервалов

$$[0, 1) = \bigsqcup_{j=0}^{2^N-1} \Delta_j^{(N)} \quad \left(\Delta_j^{(N)} = [j2^{-N}, (j+1)2^{-N}) \right)$$

Любая двоично ступенчатая функция $f^{(N)}(t)$, постоянная на $\Delta_j^{(N)}$, есть полином по системе Хаара

$$f^{(N)}(t) = \sum_{j=0}^{2^N-1} \hat{f}(j) \chi_j(t) \quad (56)$$

Вектор $(\hat{f}(j))_{j=0}^{2^N-1}$ называют дискретным преобразованием Фурье - Хаара функции $f^{(N)}$. Для краткости будем обозначать $f_j^{(N)} = f(\Delta_j^{(N)})$, т.е. функцию f можно рассматривать как вектор $(f_j^{(N)})_{j=0}^{2^N-1}$.

Получим быстрый алгоритм нахождения $\hat{f}$. Запишем равенство (56) в виде

$$\begin{aligned}
f^{(N)}(t) &= \sum_{n=0}^{2^{N-1}-1} \hat{f}(n) \chi_n(t) + \sum_{n=2^{N-1}}^{2^N-1} \hat{f}(n) \chi_n(t) = \sum_{n=0}^{2^{N-1}-1} \hat{f}(n) \chi_n(t) + \\
&+ r_{N-1}(t) \sum_{j=0}^{2^{N-1}} \hat{f}(2^{N-1} + j) h_j^{(N-1)}(t) = f^{(N-1)}(t) + r_{N-1}(t) g^{(N-1)}(t), \quad (57)
\end{aligned}$$

где $h_j^{(N-1)}(t) = \chi_{\Delta_j^{(N-1)}}(t)$, $f^{(N-1)}(t)$ — двоично-ступенчатая функция, постоянная на $\Delta_j^{(N-1)}$, $g^{(N-1)}(t)$ — двоично ступенчатая, значения которой на $\Delta_j^{(N-1)}$ равно $\hat{f}(2^{N-1} + j)$. Записывая равенство (57) на полуинтервале $\Delta_j^{(N-1)} = \Delta_{2j}^{(N)} \sqcup \Delta_{2j+1}^{(N)}$, получим систему

$$\begin{cases} f_{2j}^{(N)} = f_j^{(N-1)} + g_j^{(N-1)} \\ f_{2j+1}^{(N)} = f_j^{(N-1)} - g_j^{(N-1)} \end{cases} .$$

Решая эту систему, находим

$$\begin{cases} f_j^{(N-1)} = \frac{1}{2} (f_{2j}^{(N)} + f_{2j+1}^{(N)}) , \\ g_j^{(N-1)} = \frac{1}{2} (f_{2j}^{(N)} - f_{2j+1}^{(N)}) , \end{cases} \quad (j = 0, 1, \dots, 2^{N-1} - 1) . \quad (58)$$

Таким образом, находим значения $f_j^{(N-1)}$ функции $f^{(N-1)}$ и значения $g_j^{(N-1)}$ функции $g^{(N-1)}$, причем $g_j^{(N-1)} = \hat{f}(2^{N-1} + j)$, т.е. мы нашли компоненты $\hat{f}$ с номерами $\geq 2^{N-1}$. Сделанный шаг удобно записать в следующем виде.

Пусть

$$(\lambda_n) = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{2^{N-1}-1}, \lambda_{2^{N-1}}, \dots, \lambda_{2^N-1})$$

вектор значений функции $f^{(N)}$. Равенства (58) для вектора (λ_n) запишем в виде

$$\begin{aligned}
\lambda_j &:= \frac{1}{2} (\lambda_{2j} + \lambda_{2j+1}) & (j = 0, 1, \dots, 2^{N-1} - 1) \\
\lambda_{2^{N-1}+j} &:= \frac{1}{2} (\lambda_{2j} - \lambda_{2j+1}) & (j = 0, 1, \dots, 2^{N-1}) \end{aligned} \quad (59)$$

Таким образом, проведя преобразования (59), мы получим новый вектор $(\lambda_n)_{n=0}^{2^N-1}$, в котором последние компоненты $\lambda_{2^{N-1}+j} = \hat{f}(2^{N-1} + j)$, а первые компоненты $(\lambda_n)_{n=0}^{2^{N-1}-1}$ есть значения функции

$$f^{(N-1)} = \sum_{n=0}^{2^{N-1}-1} \hat{f}(n) \chi_n(t)$$

кусочно постоянной на полуинтервалах ранга $N - 1$, причем коэффициенты Фурье - Хаара функции $f^{(N-1)}$ есть первые 2^{N-1} коэффициентов исходной функции $f^{(N)}$. Применяя к функции $f^{(N-1)}$, т.е. к вектору

$$(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{2^{N-1}-1})$$

преобразования (59), получим вектор

$$(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{2^{N-2}-1}, \lambda_{2^{N-2}}, \dots, \lambda_{2^{N-1}-1})$$

в котором последние 2^{N-2} компонент есть компоненты вектора $\hat{f}$.

Продолжая последовательное применение формул (59), получаем после N -го шага последовательность $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{2^N-1})$, которая совпадает с $\hat{f}$. Нетрудно посчитать, что число операций равно

$$2 \cdot 2^N + 2 \cdot 2^{N-1} + \dots + 2 \cdot 2^1 \approx 2^{N+2}$$

Быстрое преобразование Фурье-Уолша

Задача ставится аналогично дискретному преобразованию Хаара. Пусть $N \in \mathbb{N}$ фиксировано, $f^{(N)}(x)$ - двоично-постоянна на $[0, 1)$ и $f_j = f^{(N)}(\Delta_j^{(N)})$.

$$f^{(N)}(x) = \sum_{j=0}^{2^N-1} \hat{f}(j) w_j(x), \quad (60)$$

где $w_j(x)$ — функции Уолша на $[0, 1)$.

Для нахождения коэффициентов $\hat{f}(j)$. Записываем (60) в виде

$$\begin{aligned}
f^{(N)}(x) &= \sum_{j=0}^{2^N-1} \hat{f}(j) w_j(x) + r_{N-1}(x) \sum_{j=0}^{2^{N-1}-1} \hat{f}(2^{N-1} + j) w_j(x) = \\
&= f^{(N-1)} + r_{N-1}(x) g^{(N-1)}(x),
\end{aligned}$$

где $f^{(N-1)}$ и $g^{(N-1)}$ двоично-ступенчатые на интервалах ранга $N - 1$.

Аналогично получаем значения $f^{(N)}(x)$. Если значения функции $f^{(N)}(x)$ обозначим через λ_j ($j = 0, \dots, 2^N - 1$), то дискретное преобразование для вектора (λ_j) задается формулами (59).

$$\begin{aligned}
\lambda_j &:= \frac{1}{2} (\lambda_{2j} + \lambda_{2j+1}), \\
\lambda_{2^{N-1}+j} &:= \frac{1}{2} (\lambda_{2j} - \lambda_{2j+1}).
\end{aligned}$$

Как и в преобразовании Хаара, получаем вектор

$$(\lambda_n) = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{2^{N-1}-1}, \lambda_{2^{N-1}}, \dots, \lambda_{2^N-1})$$

в котором первые 2^{N-1} компонент есть значения функции $f^{(N-1)}$, а последние 2^{N-1} компонент - значения функции $g^{(N-1)}$. Но в отличие от преобразования Хаара, значения $\lambda_{2^{N-1}}, \dots, \lambda_{2^N-1}$ не будут коэффициентами Фурье-Уолша функции $g^{(N-1)}$, и поэтому нужно применять преобразование (58) и к левой половине вектора (λ_n) , и к правой половине. Повторяя эту процедуру N раз, получаем последовательность коэффициентов Фурье-Уолша. Непосредственный подсчет дает число операций $N2^{N+1}$.

В четвертой главе формулируется практическая цель исследования, методы его достижения. Практическая задача заключается в исследовании возможностей сжатия графической информации с помощью алгоритмов быстрого преобразования Хаара и Уолша. Для этого мы применим указанные алгоритмы к цветосодержащей части графического файла формата BMP и с помощью методов квантования определим порог удовлетворительного сжатия информации без значительной потери качества. Оценивать же качество сжатых изображений будем, используя метрики PSNR (Пиковое отношение сигнала к шуму), MSE (Среднеквадратическая ошибка) и SSIM (Индекс струк-

турного сходства), рассчитанные для восстановленных изображений после сжатия.

В рамках сравнения алгоритмов для прозрачности эксперимента квантование будет происходить путем обнуления наименьших коэффициентов, т.е. в приоритете будут высокочастотные коэффициенты, полученные в ходе преобразования. Мы также проанализируем методы сжатия данных с использованием перехода на цветовую модель YCbCr.

Формат BMP, будучи одним из самых распространенных форматов для хранения растровых изображений, зачастую характеризуется большим объемом данных, что делает его неэффективным для хранения и передачи. Сжатие изображений в этом контексте становится важной задачей для уменьшения размера файлов при сохранении качественных характеристик. Для работы с графической информацией нам понадобятся двумерные быстрые преобразования Хаара и Уолша, которые мы получим с помощью последовательного применения одномерного преобразования по строкам и по столбцам таблицы пикселей двумерного изображения.

Файл формата BMP имеет структуру, включающую заголовок файла (File Header), который содержит основную информацию о файле, затем идет заголовок изображения (DIB Header), в котором описываются параметры изображения, при необходимости может присутствовать палитра цветов для отображения цветовых данных, и наконец, непосредственно данные пикселей, хранящиеся в формате RGB.

Для более эффективного сжатия информации будем переходить на цветовую модель YCbCr, которая предназначена для эффективной передачи и хранения цветной информации благодаря своей структуре: поскольку компонент Y содержит информацию о яркости, которая критически важна для восприятия деталей и контраста изображения, компоненты Cb и Cr могут быть подвергнуты более агрессивному сжатию, что позволит уменьшить объем данных без значительного влияния на качество изображения.

Для оценки качества восстановленных изображений будут использоваться метрики MSE, которая оценивает количественную разницу между предсказанными моделью или обработанными значениями и истинными, PSNR, применяемая для оценки качества изображений и видео в контексте сжатия

и передачи данных, измеряющая отношение между максимально возможной мощностью сигнала и мощностью искажающего шума, а также SSIM — модель, основанная на восприятии, которая рассматривает ухудшение качества изображения как воспринимаемое изменение структурной информации и учитывает важные перцептивные явления, такие как маскировка яркости и контраста.

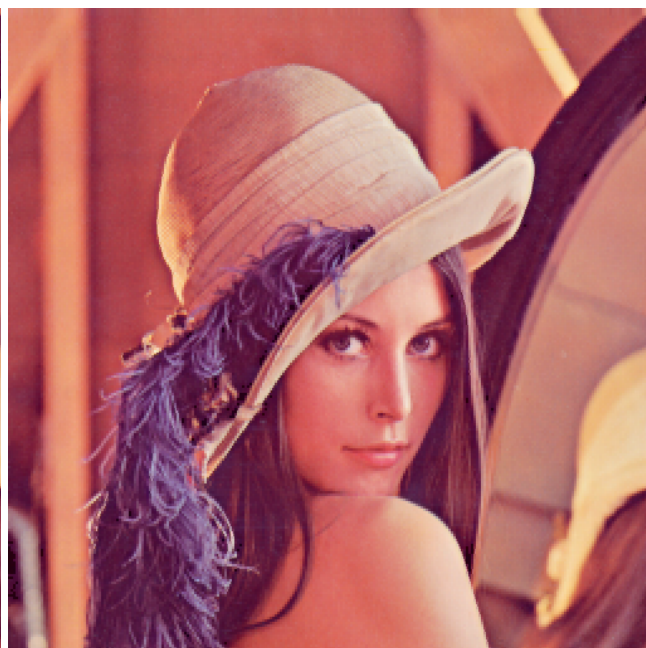
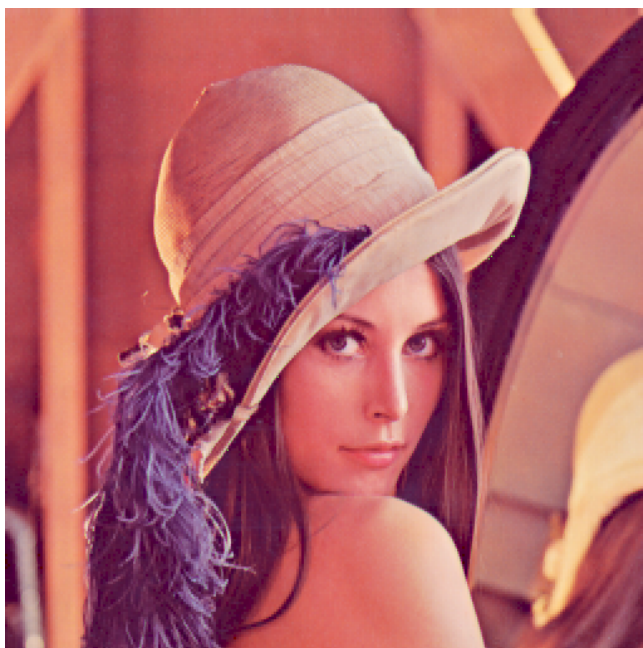
Эксперимент показывает, что до 70 процентов обнуления оба алгоритма показывают очень высокое качество восстановленного изображения. Однако при превышении этого порога наблюдается линейное ухудшение метрик, обусловленное критической зависимостью алгоритма от низкочастотных компонентов, что визуально проявляется в образовании блочных артефактов. Несмотря на это, при обнулении коэффициентов вплоть до 75% (рис. 1 а)) сохраняется хорошее качество.

Алгоритм Уолша же демонстрирует принципиально отличное поведение при агрессивном сжатии по сравнению с Хааром. Благодаря глобальному распределению информации алгоритм меньше страдает от нехватки информации и сохраняет хорошие показатели при обнулении до 90% коэффициентов, хотя уже наблюдаются артефакты в виде случайных цветовых пикселей (рис. 2 а)).

Для повышения эффективности сжатия имеет место переход на другие цветовые модели, поскольку они позволяют сохранить меньший объем данных по сравнению с классической RGB-моделью. Для этого мы перед применением алгоритмов перейдем на цветовую модель YCbCr.

Эксперименты показывают, что обнуление до 90% коэффициентов в компонентах Cb и Cr не приводит к заметной потере визуального качества. При этом достигается значительное сокращение объема данных - на 25-40% по сравнению с RGB-сжатием при равном визуальном качестве (рис. 2 б), рис. 2 б)).

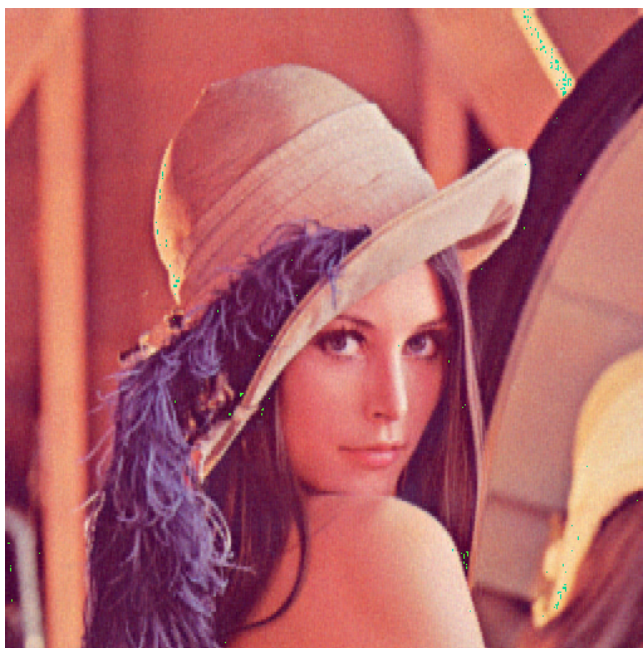
Как видно из таблицы метрик оценки качества 1, при переходе на цветовую модель YCbCr достигается такое же или лучшее качество восстановленных изображений.



а) Исходная цветовая модель RGB

б) Переход на модель YCbCr

Рисунок 1 – Результаты преобразования Хаара а) при обнулении 75 % RGB, б) при обнулении 75% процентов Y компонент.



а) Исходная цветовая модель RGB

б) Переход на модель YCbCr

Рисунок 2 – Результаты преобразования Хаара а) при обнулении 75 % RGB, б) при обнулении 75% процентов Y компонент.

В результате получаем, что преобразование Уолша демонстрирует существенно лучшую устойчивость к сжатию по сравнению с Хааром, сохраняя

Таблица 1 – Сравнение метрик алгоритмов при различных цветовых моделях

Алгоритмы	Цветовая модель	% обнуления	PSNR (дБ)	MSE	SSIM
Хаар	RGB	75%	31,71	43,911	0,879
	YCbCr	75% (Y)	31.58	45.210	0.920
Уолш	RGB	90%	30.64	56.144	0.793
	YCbCr	90% (Y)	31.22	49.117	0.8

приемлемое качество вплоть до 90% обнуления коэффициентов. Это делает его перспективным для применений, требующих агрессивного сжатия с сохранением общей структуры изображения. Для преобразование Хаара же подобная стратегия сжатия оказалось не очень подходящей, он требует более аккуратной обработки данных. Основной причиной ухудшения качества при сильном сжатии является накопление цветовых ошибок в отдельных участках изображения, хотя структурная информация сохраняется достаточно хорошо.

Также экспериментально подтвердилось, что использование цветовой модели YCbCr совместно с преобразованием Хаара и Уолша позволяет достичь оптимального баланса между степенью сжатия и качеством изображения.

Закключение. В ходе выполнения данной работы были рассмотрены системы преобразования Хаара и Уолша, их свойства и алгоритмы быстрого преобразования. Проведен анализ их применения в обработке графической информации, в частности, в задачах сжатия изображений. Особое внимание уделялось цветовым моделям RGB и YCbCr, а также метрикам оценки качества восстановленных изображений — MSE, PSNR и SSIM.

Практическая часть показала эффективность систем сжатия на базе преобразований Хаара и Уолша при использовании различных цветовых моделей. В результате было установлено, что переход на модель YCbCr способствует улучшению качества восстановления изображений по сравнению с RGB, что подтверждается значениями метрик PSNR и SSIM.

Таким образом, полученные результаты демонстрируют возможность применения систем Хаара и Уолша для эффективного сжатия графической информации с сохранением высокого качества изображения.