

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Экономические алгоритмы приближенного решения нелинейного уравнения Шрёдингера

Саратов, 2025 год

Введение. Современные оптоволоконные линии связи стали неотъемлемой частью глобальной телекоммуникационной инфраструктуры. Основу таких систем составляют световоды — оптические волокна, способные передавать информацию на огромные расстояния с минимальными потерями. Первые теоретические предпосылки для создания световодов появились еще в XIX веке, однако бурное развитие началось лишь во второй половине XX века с изобретением лазера и технологией получения стекла с крайне низким уровнем поглощения. К 1970-м годам были созданы первые практически пригодные оптоволоконные кабели, а в последующие десятилетия технологии совершенствовались, обеспечивая рост пропускной способности и снижение стоимости передачи данных.

Передача сигнала по световоду сопровождается рядом физических эффектов, существенно влияющих на форму и характеристики передаваемого импульса. Основными среди них являются дисперсия — различие фазовых скоростей компонентов сигнала с разной частотой, и нелинейные эффекты, обусловленные зависимостью показателя преломления среды от интенсивности света. Эти явления приводят к искажению сигнала, ограничивают дальность передачи без усиления и требуют учета при проектировании систем связи.

Математической моделью, описывающей распространение сигнала в нелинейной дисперсионной среде, является нелинейное уравнение Шрёдингера (НУШ). В общем виде НУШ записывается следующим образом:

$$\frac{\partial A(z, t)}{\partial z} = -\frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A(z, t)}{\partial t^2} + i\gamma |A(z, t)|^2 A(z, t) - \frac{\alpha}{2} A(z, t),$$

где z - координата вдоль волокна, t - отсчет по времени, β_2 - коэффициент групповой дисперсии, γ - коэффициент нелинейности, α - коэффициент затухания.

Для анализа и проектирования оптических систем связи широко применяются численные методы решения этого уравнения. Наиболее распространённым является метод расщепления по физическим факторам (split-step Fourier method, SSFM), который позволяет эффективно моделировать влияние дисперсии и нелинейности на сигнал в реальных условиях. Эти методы находят

применение при оптимизации параметров волокон, проектировании систем с управлением дисперсией, а также в моделировании сверхширокополосных каналов передачи.

Однако с ростом объема передаваемой информации и увеличением сложности систем возникает потребность в более экономичных (вычислительно эффективных) алгоритмах, способных обеспечивать приемлемую точность при существенно меньших ресурсных затратах.

Целью данной магистерской работы является исследование существующих методов приближенного решения задачи распространения сигнала.

Работа включает в себя шесть разделов. В первом разделе рассматривается математическая модель распространения сигнала в оптоволокне. Во втором, третьем, четвертом и пятом разделах содержится описание методов SSFM, PBM, VSTF, ESSFM соответственно: приведена необходимая теория, описаны алгоритмы, по которым можно реализовать численное решение. В шестом разделе проводится численный эксперимент вышеописанных методов для случайного сигнала, в ходе которого для каждого метода вычисляется точность в метрике NMSE и делается вывод об их эффективности.

Основное содержание работы. В первом разделе «Волоконные световоды и эффекты в них» рассматривается история создания световодов, их строение, а также эффекты действующие в них. Первые волоконные световоды по современным меркам имели очень большие потери (типичные потери составляли ~ 1000 дБ/км). Однако ситуация резко изменилась в 1970 г., когда благодаря высказанным ранее идеям потери кварцевых световодов были уменьшены до ~ 20 дБ/км. Дальнейший прогресс в технологии изготовления привел к появлению в 1979 г. волоконного световода с потерями около 0,2 дБ/км вблизи длины волны 1,55 мкм. Этот уровень потерь ограничен в основном фундаментальным процессом рэлеевского рассеяния. На сигнал в световоде действуют различные эффекты, среди которых дисперсия, нелинейность и затухание.

Дисперсия обусловлена тем, что разные частотные компоненты импульса распространяются с разной фазовой и групповой скоростью. Это приводит к временному растяжению импульса при его движении по волокну, что ограничивает пропускную способность системы. Для количественного выражения

дисперсии используется дисперсионный параметр D :

$$D = -\frac{2\pi c}{\lambda^2} \beta_2,$$

где γ - длина волны, β_2 - дисперсия групповых скоростей, c - скорость света в вакууме.

Нелинейность возникает при высоких интенсивностях света, когда отклик материала становится нелинейным. Основным источником нелинейности - нелинейная зависимость показателя преломления от интенсивности света:

$$n = n_0 + n_2 I,$$

где n - эффективный показатель преломления, n_0 - линейный показатель преломления, n_2 - коэффициент нелинейности, I - интенсивность светового сигнала. Наиболее важные нелинейные эффекты в волокне:

1. Фазовая самомодуляция (ФСМ)
2. Фазовая кросс модуляция (ФКМ)
3. Вынужденное рассеяние Мандельштама - Бриллюэна (ВРМБ)

Эффект затухания сигнала в световоде это уменьшение мощности оптического сигнала по мере его распространения вдоль волокна. Это один из факторов, ограничивающих дальность передачи без повторителей или усилителей. Основные причины затухания:

1. Поглощение - внутренняя потеря энергии из-за свойств материала
2. Рассеяние - в основном Рэлееское
3. Изгибы волокна - очень маленькие изгибы, которые вызывают утечку энергии

Формула затухания:

$$P_T = P_0 \exp(-\alpha L),$$

где P_0 -мощность, вводимая в волоконный световод длиной L , α - коэффициент затухания, P_0 - начальная мощность.

Далее начиная с уравнения Максвелла выводится основное уравнение распространения сигнала - нелинейное уравнение Шрёдингера:

$$\frac{\partial A(z, t)}{\partial z} = -\frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A(z, t)}{\partial t^2} + i\gamma |A(z, t)|^2 A(z, t) - \frac{\alpha}{2} A(z, t),$$

где z - координата вдоль волокна, t - отсчет по времени, β_2 - коэффициент групповой дисперсии, γ - коэффициент нелинейности, α - коэффициент затухания. Математическая постановка задачи завершает раздел и подготавливает почву для анализа методов численного решения НУШ.

Во втором разделе «Метод SSFM: основа численного моделирования НУШ» вводится один из наиболее распространённых и точных способов численного решения НУШ. SSFM (Split-Step Fourier Method, метод расщепления по шагам) — это численный метод для решения нелинейного уравнения Шрёдингера (NLSE), описывающего распространение оптического импульса в волокне с учетом дисперсии и нелинейности.

Идея метода SSFM заключается в разбишке решения уравнения на чередующиеся линейные (дисперсионные) и нелинейные (нелинейные фазовые сдвиги) этапы. Вся дистанция разделяется на отрезки (спаны). А далее эти отрезки делятся на большое количество маленьких отрезков - Δz . Такая стратегия позволяет эффективно моделировать сложные эффекты, возникающие при прохождении сигнала по волокну. Алгоритм SSFM (на каждом шаге Δz):

1. Линейный шаг (частотная область): Происходит прямое преобразование Фурье (сигнал переходит в частотную область), затем применяется дисперсионное преобразование:

$$A_{lin} = A_{fft} \cdot \exp(i \frac{\beta_2}{2} \omega^2 \Delta z).$$

Далее происходит обратное преобразование Фурье (сигнал переходит во временную область)

2. Нелинейный шаг (временная область):

$$A_{nl} = A_{lin} \cdot \exp(i\gamma |A|^2 \Delta z).$$

3. Далее учитывается затухание:

$$A = A_{nl} \cdot \exp\left(-\frac{\alpha}{2}\Delta z\right).$$

Этот метод широко используется в моделировании оптических систем, особенно для оценки искажений импульсов при передаче на большие расстояния. Несмотря на простоту реализации, точность метода напрямую зависит от величины шага Δz : слишком большой шаг приводит к накоплению ошибок, а слишком маленький — к чрезмерным затратам вычислительных ресурсов. Поэтому всегда необходимо искать баланс между точностью и скоростью расчёта.

Преимущества метода:

1. Метод хорошо приближает реальное поведение сигнала, если выбрать достаточно малый шаг по длине Δz ;
2. Использует Быстрое Преобразование Фурье (FFT), что делает его эффективным по времени выполнения;
3. Подходит для любой комбинации параметров: дисперсия, нелинейность, затухание, шум и даже усилители (EDFA);
4. Применяется как для прямого моделирования канала, так и для цифровой обратной передачи (DBP) на приёмной стороне.

В следующем разделе «Теория возмущений первого порядка для НУШ» анализируется подход первого порядка, в котором решение НУШ представляется как сумма линейного решения и малой нелинейной поправки.

Уравнение для члена первого порядка имеет вид:

$$\partial_z \Delta u_{nl} = -i \frac{\beta_2}{2} \partial_t^2 \Delta u_{nl} + i \gamma \mathcal{E} f(z) |u|^2 u,$$

решением которого является:

$$\begin{aligned} \Delta u_{nl}(z, t) = & i \gamma \mathcal{E} \exp\left(-i \int_0^z \frac{\beta_2 dz'}{2} \partial_t^2\right) \int_0^z f(z') dz' \\ & \times \exp\left(i \int_0^{z'} \frac{\beta_2 dz''}{2} \partial_t^2\right) |u(z', t)|^2 u(z', t). \end{aligned} \quad (1)$$

Нелинейное возмущение, вызванное детерминированными внутриканальными членами, обусловленными керровской нелинейностью волокна, составляет:

$$\Delta a_{0, \text{ intra}} = i\gamma\mathcal{E} \sum_{h,m,n} a_h a_m^* a_n C_{h,m,n}^{\text{intra}},$$

где

$$C_{h,m,n}^{\text{intra}} = \int_0^L dz f(z) \int dt u_f^*(z, t) u_0(z, t - T_h) u_0^*(z, t - T_m) u_0(z, t - T_n).$$

Этот метод подходит для слабых нелинейностей и малых расстояний, но при увеличении мощности или длины линии точность резко падает. Поэтому его практическое применение ограничено, например, короткими системами передачи или задачами с доминирующим линейным поведением. В основе метода лежит предположение, что нелинейные эффекты действуют как малая поправка к основному линейному решению, которое может быть получено с высокой точностью. Это позволяет избежать необходимости решать полное НУШ на каждом шаге, что существенно снижает вычислительные затраты.

Преимущества метода:

- Метод позволяет получить аналитические выражения для оценки нелинейных искажений, что удобно для теоретического анализа;
- Значительно быстрее численных методов (SSFM, ESSFM) при расчетах на больших дистанциях, особенно при слабой нелинейности;
- РВМ помогает проектировать и оптимизировать модуляции, форматы сигналов и фильтры, ориентируясь на минимизацию нелинейных искажений.

Следующий раздел — «Ряд Вольтерра для НУШ» — посвящён полуаналитическому подходу на основе теории систем. Здесь поведение сигнала моделируется как передаточная функция, разложенная в ряд Вольтерра.

Главной является формула:

$$\begin{aligned}
A(\omega, z) = & H_1(\omega, z)A(\omega) + \iint H_3(\omega_1, \omega_2, \omega - \omega_1 + \omega_2, z) \\
& \times A(\omega_1) A^*(\omega_2) A(\omega - \omega_1 + \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 \\
& + \iiint H_5(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega - \omega_1 + \omega_2 - \omega_3 + \omega_4) \\
& \times A(\omega_1) A^*(\omega_2) A(\omega_3) A^*(\omega_4) \\
& \times A(\omega - \omega_1 + \omega_2 - \omega_3 + \omega_4) d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 d\omega_4,
\end{aligned}$$

Этот метод обладает высокой точностью в условиях слабонелинейного распространения, но требует вычисления многомерных интегралов, что затрудняет практическое применение. Он может использоваться для аналитического анализа и теоретических оценок систем, где важна математическая строгость.

Преимущества метода VSTF:

1. Наличие замкнутой передаточной функции позволяет спроектировать полную систему или скомпоновать нелинейный эквалайзер для одновременной компенсации линейной дисперсии и нелинейности волокна.
2. В системе WDM влияние различных пользователей на производительность интересующего пользователя может быть разделено. В отличие от этого, метод SSF устанавливает нелинейные эффекты от других пользователей в ноль и анализирует индивидуальные эффекты каждого пользователя отдельно, таким образом решая уравнение NLS рекурсивно для каждого случая.
3. В системе WDM с широкополосными помехами (например, от других пользователей) мы можем вычислить частотное содержание интересующего нас сигнала отдельно, без необходимости вычислять эволюцию помех во всем спектре, что значительно сокращает количество необходимых вычислений.

Несмотря на математическую громоздкость, подход на основе ряда Вольтерра играет важную роль в построении моделей, сочетающих аналитическую строгость и инженерную применимость.

Пятый раздел «Метод ESSFM — усовершенствованный SSFM» описывает улучшенную версию SSFM. Этот метод отличается нелинейным шагом. Формула нелинейного шага выглядит так:

$$z_k = y_k e^{-j\gamma \Delta z_{\text{eff}}(c_0 |y_k|^2 + \sum_{i=1}^{N_c} c_i (|y_{k-i}|^2 + |y_{k+i}|^2))}, \quad k = 1, \dots, N,$$

Здесь c_k — веса (коэффициенты), которые подбираются численно. Данный подход позволяет учитывать влияние соседних временных отсчетов на нелинейное искажение, что значительно повышает точность по сравнению с классическим SSFM, учитывающим только локальную мощность сигнала.

Метод ESSFM применяется в:

1. Digital Backpropagation (DBP - цифровой метод компенсации нелинейных и дисперсионных искажений) в приёмниках когерентных оптических систем — для компенсации нелинейных искажений;
2. Моделирование широкополосных сигналов;
3. Оптимизация обработки сигналов в реальном времени на DSP-процессорах;
4. Разработке энергоэффективных алгоритмов компенсации нелинейности, что особенно важно для мобильных и встроенных систем связи.

Преимущества метода ESSFM:

1. Уменьшает количество шагов по длине Δz , сохраняя точность;
2. Позволяет ускорить моделирование или обратное распространение сигнала (DBP);
3. Гибко настраивается через выбор весов c_k ;
4. Обеспечивает баланс между вычислительной сложностью и точностью, что делает его предпочтительным в системах с ограниченными ресурсами.

Таким образом, ESSFM представляет собой практичное и мощное средство для повышения эффективности моделирования и компенсации нелинейных эффектов в современных оптических системах связи.

Наконец, в шестом разделе «Численный эксперимент» реализуется сравнительный анализ методов SSFM, ESSFM, PBT. Проведется моделирование распространения 16-QAM сигнала на различные дистанции под действием

эффектов дисперсии, нелинейности и затухания. Результаты метода SSFM рассматривались как точное решение. Для оценки точности используется метрика NMSE (Normalized Mean Square Error), которая рассчитывается как:

$$\left(\frac{\sum_{n=0}^{N-1} |u_n - \tilde{u}_n|^2}{\sum_{n=0}^{N-1} |u_n|^2} \right),$$

Так как в телекоммуникациях принято рассматривать оценку точности в дБ, полученное от NMSE переводим через логарифмическое преобразование: $NMSE_{db} = 10 \log_{10}(NMSE)$.

Сначала сравнивались точности линейного решения и PBM (относительно SSFM). Результаты в табличном формате:

N_{span}	Точность линейного решения	Точность PBM
1	-15.570986528739532	-39.10580982107654
2	-9.291483994603315	-24.568413589984296
3	-5.765721376189252	-17.23417798122509
4	-3.305510472810849	-12.153153556296104
5	-1.448447133432884	-8.302844521597262
6	0.012237662920557106	-5.230997884356375
7	1.2044780779085502	-2.648889598164858

Результаты сравнения показывают, что возмущение первого порядка хорошо работает только на первых спанах, разрушаясь ближе к седьмому спану.

Далее мы приходим к линейному нормированному решению, которое представляет собой самый простой случай метода ESSFM. А после улучшаем точность ESSFM с помощью нахождения лучшего количества N_c и значений c_k и сравниваем точности линейного нормированного решения и ESSFM (относительно SSFM). Реализован график зависимости точности ESSFM от количества весов (1), а также таблица лучших точностей ESSFM и максимального количества весов на каждой дистанции.

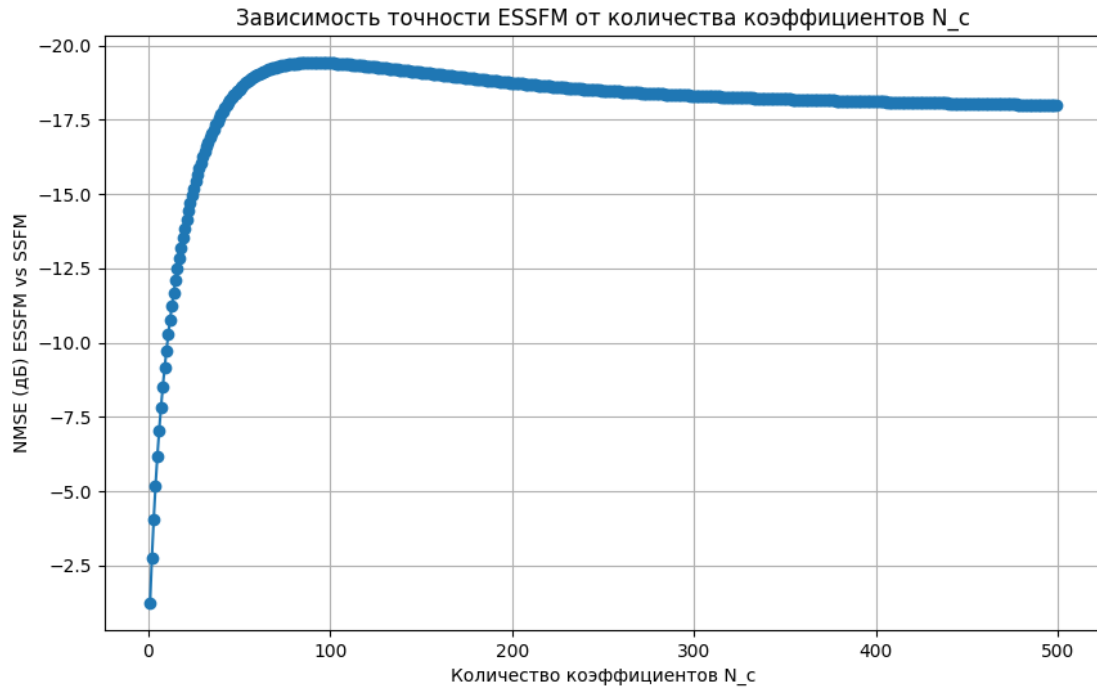


Рисунок 1 — Зависимость точности ESSFM от количества коэффициентов N_c

Результаты сравнения нормированного решения и ESSFM в табличном формате:

N_{span}	Точность линейного нормированного решения	Точность ESSFM
1	-27.587324306810007	-28.556190570560883
2	-22.935768574919887	-24.884126596595525
3	-20.63133095650422	-22.44319620406359
4	-18.918230302878808	-20.883701300986267
5	-17.68519777389029	-19.550366818172773
6	-16.773053597153332	-18.599167942382014
7	-15.854331047548836	-17.63887178776885

Вывод по результатам: даже в самом простом случае ESSFM (линейное нормированное решение) на 3 спанах по точности обгоняет РВМ, что говорит о его значительной эффективности в сравнении с РВМ. Помимо этого ESSFM может показывать хорошую точность даже на больших дистанциях - достаточно увеличить количество весов.

Заключение. В данной работе была рассмотрена математическая модель распространения сигнала в оптоволокне под действием эффектов дисперсии, нелинейности и затухания. Была исследована теория возмущения первого порядка, рассмотрена функция ряда Вольтерра (VSTF). Были реализованы приближённые численные методы: SSFM, PBM и ESSFM, позволяющие решать это уравнение с разной степенью точности и вычислительной затратности.

Метод ESSFM представляет собой эвристическую модификацию классического алгоритма SSFM, основанную на полуэмпирическом подходе к аппроксимации нелинейного шага. В условиях реальных оптических систем подобные эвристические методы демонстрируют более высокую точность по сравнению с теоретически обоснованными моделями, особенно при ограниченных вычислительных ресурсах. Это свидетельствует о высокой практической ценности такого подхода. Актуальность дальнейшего развития данной темы обусловлена необходимостью повышения эффективности цифровой компенсации нелинейных искажений, особенно в условиях роста скоростей передачи данных и увеличения длины оптических линий связи.