МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Педагогический институт

Кафедра математики и методики ее преподавания

# МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ТЕМЫ: «ФОРМУЛЫ СОКРАЩЕННОГО УМНОЖЕНИЯ» В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

АВТОРЕФЕРАТ
ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ
БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 5 курса 531 группы
направления 44.03.01 Педагогическое образование,
профиль подготовки «Математическое образование»
факультета физико-математических и естественно-научных дисциплин

**Афониной Амины Вячеславовны**

Научный руководитель
доцент, к.п.н. ____________________ О. М. Кулибаба
подпись дата

Зав. кафедрой
к.п.н., доцент ____________________ И. К. Кондаурова
подпись дата

Саратов 2025

**Введение.** Одним из ключевых аспектов математического образования является формирование у учащихся прочных знаний и умений, необходимых для успешного освоения курса математики в средней школе. В частности, важную роль играют формулы сокращённого умножения, так как они являются основой для решения многих задач по алгебре и позволяют значительно упростить вычисления. Однако их изучение часто вызывает затруднения у школьников.

Согласно Федеральному государственному образовательному стандарту основного общего образования, изучение формул сокращённого умножения входит в обязательную программу по математике. Это подчеркивает значимость данной темы для формирования базовых математических компетенций учащихся. В рамках стандартов учащиеся должны уметь применять эти формулы для упрощения алгебраических выражений и решать задачи, требующие использования этих формул. Таким образом, методика преподавания данной темы играет ключевую роль в достижении образовательных целей, установленных федеральным государственным образовательным стандартом.

Кроме того, современные образовательные стандарты акцентируют внимание на развитии критического мышления и креативного подхода к решению задач. Формулы сокращённого умножения предоставляют возможность ученикам научиться самостоятельно находить оптимальные способы решения математических проблем, что особенно важно в условиях быстро меняющегося мира, где требуется гибкость и адаптивность.

Актуальность выбранной темы обусловлена тем, что эффективное обучение формулам сокращённого умножения имеет большое значение для обеспечения качественного математического образования учащихся основной школы. Несмотря на то, что этот материал изучается уже много лет, методы его преподавания продолжают совершенствоваться, чтобы соответствовать современным требованиям и вызовам образовательной среды.

Вопрос методики преподавания темы «Формулы сокращённого умножения» в основной школе исследовался такими учёными и педагогами, как А. Н. Колмогоров, Ю. М. Колягин, Ю. Н. Макарычев, А. В. Шевкин и др.

Колмогоров А. Н. акцентировал внимание на развитии математического мышления у школьников и на том, чтобы учащиеся понимали не только сами формулы, но и их применение в различных ситуациях.

Колягин Ю. М. рассматривал способы эффективного усвоения формул сокращенного умножения учащимися.

Макарычев Ю. Н. уделял особое внимание алгоритмическому подходу к решению задач, что помогает ученикам лучше усваивать формулы сокращенного умножения.

При несомненной значимости проведенных исследований проблема совершенствования методики преподавания темы «Формулы сокращенного умножения» в основной школе остается открытой для изучения.

Цель работы: теоретически обосновать и выявить методические особенности преподавания темы «Формулы сокращённого умножения» в курсе алгебры основной школы.

Задачи бакалаврской работы:

1) рассмотреть основные теоретические аспекты темы «Формулы сокращенного умножения»;

2) продемонстрировать использование формул сокращенного умножения;

3) выявить основные трудности, с которыми сталкиваются учащиеся при изучении темы «Формулы сокращенного умножения»;

4) охарактеризовать методические особенности преподавания темы «Формулы сокращенного умножения» в курсе основной школы;

5) разработать и апробировать математическую игру «Алгебраическое домино» по теме «Формулы сокращённого умножения».

Методы исследования: изучение и анализ учебной, методической и педагогической литературы, разработка дидактических материалов.

Структура работы: введение; два раздела («Теоретические аспекты преподавания темы «Формулы сокращенного умножения» в курсе алгебры основной школы»; «Методические аспекты преподавания темы «Формулы сокращенного умножения» в курсе алгебры основной школы»); заключение; список использованных источников.

**Основное содержание работы.** Первый раздел «Теоретические аспекты изучения темы «Формулы сокращенного умножения» в курсе алгебры основной школы» посвящен решению первых двух задач бакалаврской работы.

Определенные способы сокращенного умножения применялись задолго до нашего времени, приблизительно четыре тысячелетия назад. Знаниями об этих способах обладали такие цивилизации, как Вавилон, Греция и ряд других народов древнего мира.

В ту эпоху было принято представлять все алгебраические утверждения в виде геометрических фигур. Современная символическая запись алгебраических тождеств появилась благодаря усилиям таких математиков, как Франсуа Виет и Рене Декарт в XVI веке. Многочисленные ученые продолжали исследовать свойства многочленов.

Важно отметить, что достижения восточных математиков оставались неизвестными в Европе вплоть до XVII века, что привело к повторному открытию многих результатов.

Формулы сокращенного умножения занимают важное место в школьной программе по математике. Они впервые вводятся в курсе алгебры в 7-м классе и продолжают активно использоваться вплоть до старших классов.

Формулы сокращенного умножения являются одними из ключевых инструментов алгебры, благодаря которым существенно облегчается работа с многочленами и алгебраическими выражениями. Они позволяют эффективно выполнять операции возведения в степень, разложения на множители и упрощения выражений.

Рассмотрим основные формулы.

**Квадрат суммы и квадрат разности.**

*Квадрат суммы:* $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

*Квадрат разности:* $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

**Разность квадратов.**

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

**Куб суммы и куб разности.**

*Куб суммы:* $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

*Куб разности:* $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ .

**Сумма и разность кубов.**

*Сумма кубов:* $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ .

*Разность кубов:* $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ .

**Формулы для степени n.**

n-я степень суммы: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(C\,{}^{n}_{k}\right) a^{n-k} b^k =$

$$= \left(C\,{}^{n}_{0}\right)a^n + \left(C\,{}^{n}_{1}\right)a^{n-1}b + \dots + \left(C\,{}^{n}_{k}\right)a^{n-k}b^k + \dots + \left(C\,{}^{n}_{n}\right)b^n, \quad C_n^k = \frac{(n!)}{k!(n-k)!}$$

$C_n^k$ – биномиальные коэффициенты, **n** – натуральное число.

Сумма n-ых степеней:

$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots - ab^{n-2} + b^{n-1})$, n – нечетное положительное число.

Разность n-ых степеней:

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$, n – любое натуральное число.

В работе рассмотрены типовые задачи на применение формул сокращенного умножения (упрощение выражений, разложение на множители, решение уравнений, вычисление значений выражений, доказательство тождеств).

Например, вычислить: $17{,}26^2 + 3{,}45^2 - 7{,}26^2 - 6{,}55^2$.

Решение. Используем формулу разности квадратов, тогда:
$(17{,}26 - 7{,}26)(17{,}26 + 7{,}26) + (3{,}45 + 6{,}55)(3{,}45 - 6{,}55) =$
$= 10 \cdot 24{,}52 + 10 \cdot (-3{,}1) = 10 \cdot 21{,}42 = 214{,}2.$

Ответ: 214,2.

Во втором разделе описаны основные трудности, с которыми сталкиваются учащиеся при изучении темы «Формулы сокращенного умножения» и предложены методические рекомендации по их преодолению.

При изучении темы «Формулы сокращенного умножения» в курсе алгебры основной школы учащиеся могут сталкиваться с некоторыми трудностями.

*1) Запоминание формул и их структуры.*

Учащиеся часто заучивают формулы механически, не понимая их логики, что приводит к ошибкам в знаках и коэффициентах. Например, при работе с квадратом разности $(a - b)^2$ ученики ошибочно записывают $a^2 + b^2$, игнорируя удвоенное произведение и знак минус. Психологически это объясняется перегрузкой рабочей памяти и отсутствием ассоциативных связей.

*2) Применение формул в нестандартных ситуациях.*

Учащиеся теряются, когда выражение требует предварительных преобразований. Например, в задании $(2x^3 - y^2)^2$ многие не видят, что $(2x^3)$ – это «$a$», а $(y^2)$ – «$b$». Затруднения усугубляются в задачах с группировкой, например, $(x + y + z)(x + y - z)$.

*3) Ошибки в знаках и коэффициентах.*

Ученики путают знаки в формулах куба суммы/разности, например, записывают $(a - b)^3 = a^3 - 3a^{2b} + 3ab^2 + b^3$ вместо правильного $a^3 - 3a^{2b} + 3ab^2 - b^3$.

*4) Непонимание области применения формул сокращенного умножения.*

Учащиеся не видят практической ценности формул сокращенного умножения, считая их абстрактными правилами. Например, не связывают упрощение выражения $(x+5)^2 - (x-5)^2$ с расчётом площади участка земли.

*5) Отсутствие навыка самопроверки.*

Школьники редко проверяют решения, что приводит к сохранению ошибок. Например, не замечают, что $(3x + 2)^2 = 9x^2 + 12x + 4$ вместо ошибочного $9x^2 + 6x + 4$.

*6) Страх перед абстрактными переменными.*

Учащиеся боятся работать с буквенными выражениями, считая их сложными. Например, $(a + b)^2$ вызывает тревогу, хотя числовой аналог $(5 + 3)^2$ решается легко.

*7) Неумение выбирать нужную формулу.*

Ученики путают условия применения формул сокращенного умножения. Например, пытаются применить квадрат разности к $a^2 - b^2$.

*8) Эмоциональные барьеры и низкая мотивация.*

Страх ошибок и негативное отношение к алгебре снижают вовлечённость. Ученики избегают заданий с формулами сокращенного умножения, считая их скучными.

Преодоление трудностей в изучении формул сокращенного умножения требует комплексного подхода, сочетающего:

– визуализацию для создания образных ассоциаций;

– практику с постепенным усложнением заданий;

– межпредметные связи для демонстрации практической ценности;

– эмоциональную поддержку для снижения тревожности.

В работе также выявлены методические особенности преподавания темы «Формулы сокращенного умножения» в курсе алгебры основной школы.

Разработка методического обеспечения для изучения темы «Формулы сокращённого умножения» в курсе алгебры основной школы представляет собой многоаспектный процесс, направленный на формирование у учащихся глубокого понимания структуры формул, их практического применения и преодоления типичных затруднений. Эффективное методическое обеспечение должно сочетать традиционные педагогические подходы с инновационными технологиями, учитывая возрастные и когнитивные особенности школьников.

Первым этапом разработки является логичное и последовательное структурирование материала. Формулы сокращённого умножения целесообразно вводить в следующем порядке:

1. Квадрат суммы и разности: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.
2. Разность квадратов: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.
3. Куб суммы и разности: $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2 b + 3ab^2 \pm b^3$.
4. Сумма и разность кубов: $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$.

Каждой формуле должна предшествовать геометрическая интерпретация. Такой подход не только облегчает запоминание, но и формирует пространственное мышление.

Система заданий для поэтапного закрепления должна охватывать все уровни сложности и типы познавательной деятельности.

Для повышения эффективности задания следует группировать по тематическим блокам, постепенно увеличивая сложность.

Интеграция цифровых инструментов в обучение позволяет сделать процесс более динамичным и персонализированным.

1) Онлайн-тренажёры (ЯКласс, Учи.ру): автоматическая генерация задач с мгновенной проверкой; возможность выбора уровня сложности и темпа работы.

2) Интерактивные презентации: анимации, раскрывающие структуру формул (например, как $2ab$ «соединяет» $a^2$ и $b^2$); виртуальные лаборатории для моделирования геометрических интерпретаций.

3) Геймификация: квесты, где за каждую решённую задачу ученик получает «ключ» к следующему уровню; соревнования между классами с отображением результатов в общем рейтинге.

Использование цифровых ресурсов особенно эффективно для организации самостоятельной работы. Например, ученики могут выполнять домашние задания на платформе «ЯКласс», получая статистику своих ошибок, которую учитель использует для коррекции знаний.

Учёт индивидуальных особенностей учащихся — ключевой принцип разработки методического обеспечения.

1. Для слабоуспевающих:

– задания с числами подстановками: $(5 + 3)^2 = 25 + 30 + 9$;

– шаблоны с выделенными компонентами: $(a + \_\_)^2 = a^2 + 2ab + \_$.

2. Для среднего уровня:

– уравнения с применением формул сокращённого умножения:

$x^2 + 6x + 9 = 25$.

3. Для продвинутых:

– доказательство тождеств:

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$;

– работа с многочленами высших степеней:

$x^6 - 64 = (x^3 - 8)(x^3 + 8)$.

Анализ и коррекция ошибок – важная часть методического обеспечения.

Стратегии коррекции могут быть следующими:

– разбор ошибок у доски: ученики объясняют свои решения, а класс совместно ищет неточности;

– создание «Карты ошибок» (таблица с примерами неправильных решений и правильными вариантами), карточек коррекции;

– индивидуальные консультации для учащихся, допускающих систематические ошибки.

В работе представлена разработка дидактической игры «Алгебраический турнир».

Проведение дидактической игры «Алгебраический турнир» способствует реализации деятельностного подхода в обучении математике. Данная форма работы позволяет:

– активизировать познавательную деятельность учащихся;

– создать условия для применения знаний в нестандартной ситуации;

– развивать коммуникативные навыки через работу в командах;

– осуществлять дифференцированный подход к обучению;

– формировать положительную мотивацию к изучению алгебры.

Игра «Алгебраический турнир» была проведена на базе Муниципального образовательного учреждения «Средняя общеобразовательная школа № 2 города Пугачева Саратовской области» после завершения изучения темы «Формулы сокращённого умножения» как форма итогового повторения и контроля усвоения материала.

Для игры было создано 7 идентичных комплектов карточек домино. Каждый комплект содержал 17 карточек размером 8×4 см, изготовленных из плотного картона.

Учащиеся были разделены на 7 команд по 3 человека с учётом их уровня подготовки.

Игра проходит в 3 тура:

Команды получали набор из 7 карточек с базовыми формулами. Все команды справились с заданием.

Карточки:

1)$(a + b)^2 =$ _____; 2)$(a - b)^2 =$ _____; 3)$a^2 - b^2 =$ _____;

4)$(a - b)^3 =$ _____; 5)$(a + b)^3=$______; 6)$a^3 + b^3 =$ ______;

7)$a^3 - b^3 =$ ______.

Наблюдались следующие трудности:

– 2 команды перепутали формулы куба суммы и куба разности;

– 3 команды допустили ошибки при расставлении знаков.

II тур "Комбинированный тур"

Набор из 5 карточек включал задания на применение одной формулы сокращенного умножения.

Карточки:

1) Выполните действия: $(2x-3y^3)^2$.

2)Выполните действия: $\left(3x^2y+\frac{1}{2}x^2\right)^2$.

3)Выполните действия: $(5a-4b)(2a-4b)-(a+4b)^2$.

4)Выполните действия: $(3x-2)^3-(3x-2)(9x^2+6x+4)$.

5) Разложите на множители: $(2a-3b)^2-(a+2b)^2$.

Результаты:

– 3 команды выполнили полностью правильно;

– 2 команды допустили 1–2 ошибки;

– 2 команды допустили 3 ошибки.

III тур "Творческий тур"

Самый сложный этап с заданиями повышенной сложности.

Карточки:

1)Разложите на множители: $125-(4x-3)^3$.

2)Разложите на множители: $(a+2)^2-8+a^3-2a$ .

3)Разложите на множители: $(x-y)^3+(x+y)^3-2x$.

4) Сократите дробь: $\frac{x^4-2x^2+1}{1-x^4}$.

5) Выполните действия: $\frac{4-x}{25-10x+x^2}-\frac{3}{x^2+10x+25}-\frac{x+4}{25-x^2}$ .

Результаты:

– 2 команды выполнили полностью;

– 1 команда – с 1 ошибкой;

– 4 команды не справились с 2-3 заданиями.

*Критерии оценивания.*

За правильное решение карточек начисляются баллы:

– I тур (базовые формулы) – 1 балл

– II тур (задания на применение одной формулы сокращенного умножения) – 2 балла;

– III тур задания повышенной сложности – 3 балла;

– за каждую ошибку снимается 1 балл;

– за скорость выполнения: 1 место – 5 баллов; 2 место – 3 балла; 3 место – 2 балла.

Разработанная игра «Алгебраический турнир» может быть использована: на уроках обобщающего повторения, в системе дополнительного образования; в работе математического кружка.

**Заключение.** Основные результаты, полученные в ходе написания бакалаврской работы.

1) Рассмотрены основные теоретические аспекты темы «Формулы сокращенного умножения».

2) Продемонстрировано использование формул сокращенного умножения при разложении на множители, упрощении выражений, решении уравнений, вычислении значений выражений и доказательстве тождеств.

3) Выявлены основные трудности, с которыми сталкиваются учащиеся при изучении темы «Формулы сокращенного умножения» и сформулированы методические рекомендации по их преодолению.

4) Охарактеризованы методические особенности преподавания темы «Формулы сокращенного умножения» в курсе основной школы.

5) Разработана и апробирована на базе Муниципального образовательного учреждения «Средняя общеобразовательная школа № 2 города Пугачева Саратовской области» математическая игра «Алгебраический турнир» по теме «Формулы сокращённого умножения».