

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра Геометрии

Аналоги локана Аньези на расширенной гиперболической плоскости

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студента 4 курса 421 группы

Направления 02.03.01 «Математика и компьютерные науки»

механико-математического факультета

Соколова Михаила Станиславовича

Руководитель практики от СГУ
доцент, к.ф.-м.н., доцент

подпись, дата

Л.Н. Ромакина

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н., доцент

подпись, дата

В.Б. Поплавский

Саратов 2025

Введение. Актуальность исследования. Как известно, одной из моделей плоскости Лобачевского Λ_2 служит внутренняя относительно некоторой овальной линии γ область проективной плоскости P_2 . Эта проективная модель названа моделью Кэли – Клейна в честь ее основателей, английского математика Артура Кэли и немецкого математика Феликса Клейна. Линию γ в данной модели называют *абсолютом* плоскости Λ_2 . На внешней относительно γ области плоскости P_2 , т. е. на идеальной области плоскости Лобачевского, может быть реализована геометрия *гиперболической плоскости положительной кривизны*, обозначаем эту плоскость $\hat{H}$. Совокупность плоскостей Λ_2 и $\hat{H}$, т. е. проективную плоскость P_2 с выделенной на ней овальной линией γ , называют *расширенной гиперболической плоскостью*. Обозначаем эту плоскость H^2 . Множество всех проективных автоморфизмов линии γ образует *фундаментальную группу* G каждой из плоскостей Λ_2 , $\hat{H}$ и H^2 .

На сегодняшний день исследование фигур на расширенной гиперболической плоскости H^2 — очень перспективное направление.

В частности, вызывают интерес кривые плоскости H^2 , которые по некоторым своим свойствам являются аналогами замечательных линий евклидовой геометрии. Например, в работах [13,24] исследованы аналоги локона Аньези, или верзиеры Аньези, на коевклидовой, псевдоевклидовой и эллиптической плоскостях. В данной исследовательской работе рассмотрим аналоги локона Аньези на расширенной гиперболической плоскости H^2 . В качестве базовой окружности для аналога локона Аньези выберем гиперцикл — один из четырех аналогов евклидовой окружности на плоскости H^2 .

Цели и задачи работы. Основной целью данной работы является исследование аналогов локона Аньези с гиперциклической базой на расширенной гиперболической плоскости H^2 . Для достижения данной цели были сформированы и решены следующие задачи.

1. Изучить модель Кэли-Клейна.
2. Изучить основные факты геометрии Лобачевского и геометрии гиперболической плоскости положительной кривизны. В частности, подробно изучить гиперцикл.
3. Изучить аналоги локона Аньези на евклидовой и коевклидовой плоскостях.

4. Рассмотреть различные определения аналогов локона Аньези на расширенной гиперболической плоскости.
5. Получить канонические уравнения аналогов локона Аньези с гиперциклической базой и выбором в определении двух пар взаимно перпендикулярных или взаимно параллельных прямых.
6. Исследовать полученные кривые.
7. Написать программу для визуализации аналогов.

Содержание работы. Работа состоит из введения, двух разделов, списка литературы, содержащего 25 наименований, и двух приложений. Объем работы составляет 50 страниц.

В первом разделе рассмотрена модель Кэли-Клейна. Приведены основные факты геометрии гиперболической плоскости положительной кривизны. Подробно рассмотрены гиперциклы данной плоскости как невырожденные линии второго порядка, имеющие с абсолютом две мнимо сопряженные касательные. Рассмотрено построение локона Аньези и его свойства.

Во втором разделе самостоятельно решена исследовательская задача — изучены аналоги локона Аньези с гиперциклической базой на плоскости $\hat{H}$. Доказано, что один из полученных аналогов является кубической кривой с узловой точкой. Так же изучен другой аналог локона, который разбивается на отдельные интервалы. Написана программа на языке C#, для визуализации аналогов.

Методы исследования. При подготовке работы проанализирован и систематизирован материал научных публикаций по теме исследования, дано краткое изложение основных фактов геометрии плоскости $\hat{H}$ в ее проективной интерпретации. Основным методом исследования является метод проективных координат.

Апробация работы. Основные результаты работы доложены.

1. Установочная конференция к 200 летию неевклидовой геометрии
2. Празднования дня математика на мех-мате СГУ.
3. Научная конференция СГУ «актуальные вопросы математики и механики».

По кубическому аналогу результаты опубликованы в работе [18]. По коническому аналогу локона Аньези подготовлен материал для публикации.

Основное содержание работы

Теорема 2. Гиперцикл с центром S и высотой h является множеством всех точек плоскости $\hat{H}$, удаленных от точки S на расстояние $r = \frac{i\pi\rho}{2} - h$.

Радиусом гиперцикла является комплексное число r . $\omega(S; r)$ - гиперцикл с центром S и радиусом r . Согласно теореме 2 радиус и высота связаны как $r + h = \frac{i\pi\rho}{2}$, следовательно, уравнение гиперцикла $r. \omega(S; r)$ в присоединенных реперах первого типа можно записать в виде

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 \operatorname{th}^2 \frac{r}{\rho} = 0, r \neq \frac{i\pi\rho}{2}. \quad (1.3)$$

Любая прямая, проходящая через центр гиперцикла - ось данного гиперцикла

Теперь следует ввести несколько вспомогательных теорем.

Теорема 4. В каждой точке гиперцикла плоскости $\hat{H}$ существует касательная к нему эллиптическая прямая, ортогональная оси гиперцикла, проведенной в точке касания.

Теорема 5. Касательная к гиперциклу в плоскости $\hat{H}$ в каждой его точке разделена точкой касания и базой гиперцикла пополам.

Теорема 7. На плоскости $\hat{H}$ действительного радиуса кривизны ρ касательные гиперцикла $\omega(l, h)$ в его диаметрально противоположных точках образуют эллиптический угол постоянной величины $\phi = \frac{2h}{\rho}$.

Для ввода аналогов, нам потребуются канонические реперы на гиперболической плоскости их выделяют 2 типа. Кратко опишу их

Каноническим репером первого типа плоскости $\hat{H}$ назовем присоединение абсолютной к линии γ проективный репер $R^* = \{A_1, A_2, A_3, E\}$. Где E единичная точка, которая лежит на пересечении касательных к абсолюту, проведенных через вершины $A_1 A_2$ а трехвершинник A_1, A_2, A_3 является относительно линии γ автополярным первого рода. Все эти вершины являются полюсами относительно γ прямой, которая соединяет 2 другие вершины.

В каноническом репере первого типа абсолютная линия γ задана уравнением

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0 \quad (1.4)$$

Каноническим репером второго типа плоскости $\hat{H}$ назовем проективный репер $R = \{A_1, A_2, A_3, E\}$, присоединенный к абсолютной овальной линии γ . В каноническом репере R второго типа вершины A_1, A_2, E принадлежат абсолюту, вершина A_3 является полюсом прямой A_1A_2 относительно абсолюта.

В таком каноническом репере R второго типа абсолютная линия γ задана уравнением

$$x_1x_2 - x_3^2 = 0 \quad (1.5)$$

и если γ плоскости $\hat{H}$ в некотором репере задана (1.5), то такой репер для $\hat{H}$ является каноническим репером второго типа.

Для дальнейшего изучения, требуется ввести какие углы и линии бывают на гиперболической плоскости. В некоторых случаях вычисление длин и углов невозможно, поэтому важно понимать классификацию линий. В учебнике Л. Н. Ромакиной Геометрия гиперболической плоскости положительной кривизны Ч2 очень подробно изложено, в каких случаях пересечения прямых можно вычислить длины и углы, а в каких они будут вещественные или мнимые.

Пара параболических прямых a, b образуют валиану W_D и ковалиану $\widehat{W}_D$ точки D их пересечения. В случае если прямая d является полярной точки D относительно абсолюта, то валиану (ковалиану) точки будем так же называть влианой W_d (ковалианой $\widehat{W}_d$) прямой d .

Если взять параболическую прямую a и гиперболическую прямую b , которые пересекаются в собственной точке в плоскости $\hat{H}$, то они образуют вертикальные гиперболические флаги (ГФ) и смежные с каждым из них гиперболические псевдо флаги (ГПФ).

Если точка пересечения прямых a параболической и b гиперболической принадлежит абсолюту, то области плоскости $\hat{H}$, определенные парой a, b называем параболическими флагами, смежными по отношению друг к другу.

Параболическая прямая a и эллиптическая прямая b при пересечении образуют эллиптический флаг (ЭФ), который не содержит точек абсолюта, и смежный с ним эллиптический псевдофлаг (ЭПФ).

Пара расходящихся гиперболические прямые a, b образует на $\hat{H}$ две смежные по отношению друг к другу полуплоскости (ПП).

Две пересекающихся гиперболические прямые a, b при пересечении образуют два вертикальных гиперболических угла (ГУ) и смежный с каждым из них гиперболическим псевдоуглом (ГПУ).

Если взять 2 параллельные гиперболические прямые a, b то они образуют на плоскости $\hat{H}$ полосу (П) и смежную с ней псевдополосу (ПсП), которая содержит параллельную параболическую прямую обоим прямым a и b .

Области плоскости $\hat{H}$, образованные гиперболической прямой a и эллиптической прямой b , называем квазиуглами (КУ), смежными по отношению друг к другу.

Две эллиптических прямых a, b образуют эллиптический угол (ЭУ), не содержащий точек абсолюта, и смежный с ним эллиптический псевдоугол (ЭПУ).

Измерение в пучках прямых плоскости $\hat{H}$ введено с помощью касательных к абсолютной линии, проведенных через центр пучка. Угол на плоскости между прямыми является измеримым только в том случае если через точку пересечения прямых a, b проходят две различные касательные k_1, k_2 к абсолюту, отличные от самих прямых. Если касательные k_1, k_2 являются действительными, то измерение в пучке прямых с центром D является гиперболическим (эллиптическим).

Измеримым на плоскости $\hat{H}$ являются углы шести типов. Это полуплоскость, гиперболический угол, гиперболический псевдоугол, квазиугол, эллиптический угол и эллиптический псевдоугол. Углы 3-х типов имеют действительные меры (полуплоскость, гиперболический угол и эллиптический угол).

Основным результатом работы является вывод аналогов кривой локона Аньези с гиперциклической базой в расширенной гиперболической плоскости.

Пусть ω — гиперцикл плоскости $\hat{H}$ (или окружность плоскости Λ_2) с центром S и высотой h (радиусом r), где $h \in \mathbb{R}_+$ ($r \in \mathbb{R}_+$). Пусть прямые $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ — касательные к ω в диаметрально противоположных точках A и B соответственно. Через точку A проведем произвольную прямую AX и обозначим точку ее пересечения с прямой $\tilde{b}$ через D , а отличную от A точку пересечения с ω — через C . Ортогонально прямой AB через точку C проведем прямую $\tilde{c}$, а ортогонально прямой $\tilde{a}$ через точку D — прямую $\tilde{d}$. Точку пересечения прямых $\tilde{c}$ и $\tilde{d}$ обозначим M . При всех возможных положениях прямой AX

точка M описывает линию, обозначим эту линию σ и назовем *локоном Анъези* с базой ω и опорной точкой A . Поскольку окружность плоскости Λ_2 можно рассматривать как гиперцикл вещественного радиуса плоскости $\hat{H}$, обобщая оба случая, будем называть линию σ *локоном Анъези с гиперциклической базой*.

Исследуем локон Анъези на каждой компоненте плоскости H^2 . Для этого введем на $\hat{H}$ (Λ_2) канонический репер R^* , $R^* = \{A_1, A_2, A_3, E\}$, первого типа так, чтобы его третья вершина A_3 совпала с центром S гиперцикла (окружности) ω , а вершина A_1 лежала на прямой AB . При таких условиях вершина A_2 совпадает с полюсом прямой AB относительно абсолюта γ . В репере R^* точки A и B можно задать координатами $(q : 0 : 1)$ и $(-q : 0 : 1)$ соответственно, а гиперцикл (окружность) ω — уравнением

$$x_1^2 + x_2^2 - q^2 x_3^2 = 0, \quad q = \operatorname{cth} \frac{h}{\rho} > 1 \quad \left(q = \operatorname{th} \frac{r}{\rho} < 1 \right), \quad (2.1)$$

где ρ — радиус кривизны плоскости $\hat{H}$ (модуль радиуса кривизны плоскости Λ_2). Точке M присвоим в R^* координаты $(m_1 : m_2 : m_3)$.

Прямые $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ ортогональны прямой SA как касательные к ω в точках A и B соответственно (см. [16], теорема 2.4.4), поэтому они содержат точку A_2 и в репере R^* заданы координатами: $\tilde{a}(1 : 0 : -q)$, $\tilde{b}(1 : 0 : q)$.

Учитывая условия $M \in \tilde{c}$, $\tilde{c} \perp SA$ и $M \in \tilde{d}$, $\tilde{d} \perp \tilde{a}$, найдем координаты прямых $\tilde{c}$ и $\tilde{d}$: $\tilde{c}(m_3 : 0 : -m_1)$, $\tilde{d}(qm_2 : m_3 - qm_1 : -m_2)$. Теперь координаты точки D пересечения прямых $\tilde{b}$ и $\tilde{d}$ можно записать в виде $(q^2 m_1 - qm_3 : (q^2 + 1)m_2 : m_3 - qm_1)$. Прямая AD задана в R^* координатами $(-(q^2 + 1)m_2 : 2q(qm_1 - m_3) : q(q^2 + 1)m_2)$ и пересекает прямую $\tilde{c}$ в принадлежащей конике ω точке

$$C(2qm_1(m_3 - qm_1) : (q^2 + 1)m_2(qm_3 - m_1) : 2qm_3(m_3 - qm_1)).$$

По смыслу задачи прямая $\tilde{a}$ не лежит целиком в σ , поэтому из условия $C \in \omega$ находим уравнение локона Анъези σ в репере R^* :

$$\begin{aligned} 4q^4 x_1^3 + 4q^3 (q^2 - 2) x_1^2 x_3 + (q^2 + 1)^2 x_1 x_2^2 \\ + 4q^2 (1 - 2q^2) x_1 x_3^2 - q (q^2 + 1)^2 x_2^2 x_3 + 4q^3 x_3^3 = 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Назовем уравнение (1) *каноническим* уравнением локона Аньези с гиперциклической базой в плоскости H^2 .

Поскольку переменная x_2 входит в уравнение (1) только в четной степени, кубика σ симметрична относительно прямой $SA(0 : 1 : 0)$. Исследуя совместно уравнения (1), (1), выясняем, что точка B является точкой касания линий σ и ω , а прямая $\tilde{a}$ — касательной к σ в точке A_2 .

Заметим, что точка $A^*(1 : 0 : q)$, ортогональная на прямой SA точке A , лежит на σ . По знаку характеристики $1 - q^2$ вещественных координат $(1 : 0 : q)$ точки A^* (см. [14], с. 88) находим: $A^* \in \Lambda_2$, если $q > 1$; $A^* \in \hat{H}$, если $q < 1$. Чтобы выяснить тип кубики σ , перейдем к реперу R_0^* , где $R_0^* = \{A_1, A_2, A^*, E\}$, по формулам: $\lambda x_1 = (q - 1)\bar{x}_1 + \bar{x}_3$, $\lambda x_2 = q\bar{x}_2$, $\lambda x_3 = q\bar{x}_3$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Уравнение локона Аньези σ в R_0^* принимает вид

$$x_1^3 + \frac{q^2+1}{q-1} x_1^2 x_3 + \frac{(q^2+1)^2}{4q^2(q-1)^2} x_1 x_2^2 - \frac{(q+1)(q^2+1)^2}{4q^2(q-1)^2} x_2^2 x_3 = 0. \quad (2.3)$$

Проводя рассуждения работы [24] и сравнивая уравнение (1) с уравнением (1) из [24], находим уравнения касательных $\tilde{k}_1, \tilde{k}_2$ к σ в точке A^* в репере R_0^* : $2q(q-1)x_1 \pm \sqrt{q^4-1}x_2 = 0$. Осуществляя обратный переход к реперу R^* , уравнения касательных $\tilde{k}_1, \tilde{k}_2$ запишем в виде

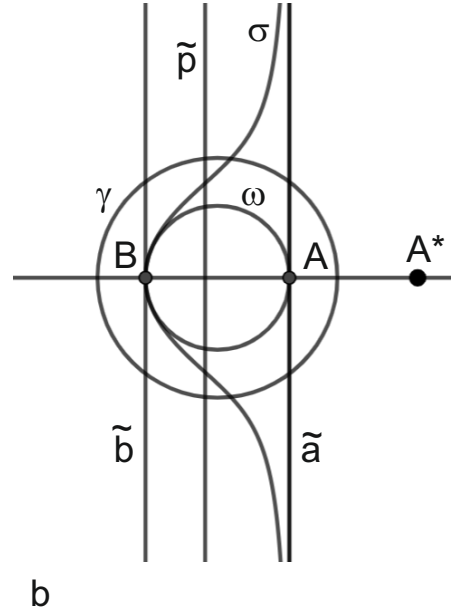
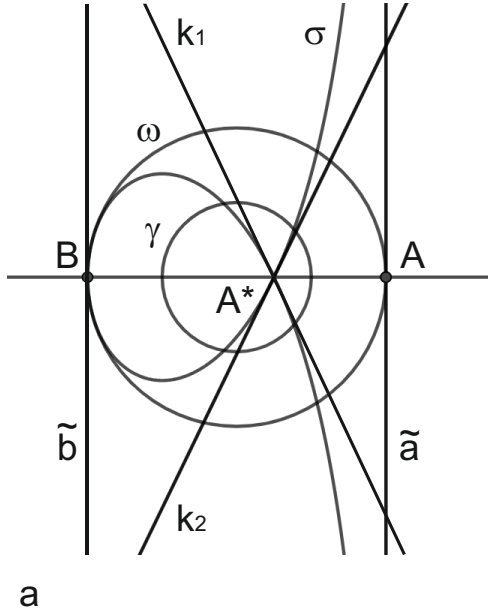
$$2q^2x_1 \pm \sqrt{q^4-1}x_2 - 2qx_3 = 0. \quad (2.4)$$

В зависимости от содержащей конику ω компоненты плоскости H^2 различимы два следующих случая.

1. Если $\omega \in \hat{H}$, то $q > 1$. В этом случае прямые $\tilde{k}_1, \tilde{k}_2$ (1) вещественные, а их общая точка A^* лежит в плоскости Λ_2 и является узловой точкой линии σ . Значит, σ — крунодальная кубика 1.

Поскольку $A^* \in \Lambda_2$, прямые $\tilde{k}_1, \tilde{k}_2$ образуют на $\hat{H}$ две смежные полуплоскости (см. [14], с. 108). Выразим меру φ меньшей из них по второй формуле из (4.55) в [14]. Используя зависимость q от h из (1), находим:

$$\cos \varphi = \frac{3q^2 - 1}{5q^2 + 1} = \frac{2ch^2 \frac{h}{\rho} + 1}{6ch^2 \frac{h}{\rho} - 1}. \quad (2.5)$$



Абсолют γ и локон Аньези σ с базой ω и опорной точкой A , где линия ω является: 1) гиперциклом плоскости $\hat{H}$ (a); 2) окружностью плоскости Λ_2 (b)

Отметим, что прямые $\tilde{k}_1, \tilde{k}_2$ не ортогональны, так как при $q > 1$ выражение из (1) накладывает на φ ограничения: $\cos \varphi \in (\frac{1}{3}, \frac{3}{5})$.

2. Если $\omega \in \Lambda_2$, то $q < 1$. Поэтому прямые $\tilde{k}_1, \tilde{k}_2$ (1) мнимо сопряжены, их общая вещественная точка A^* лежит в $\hat{H}$ и является изолированной точкой линии σ . Значит, σ — акнодальная кубика (рис. 1, b).

В первом (втором) случае линия σ как крунодальная (акнодальная) кубика имеет одну вещественную и две мнимо сопряженные (три вещественные) отличные от двойной точки перегиба. (см. [19], с. 96). Поскольку σ симметрична относительно прямой SA , точка A_2 , абсолютный полюс прямой SA , является вещественной точкой перегиба на σ . Две другие точки перегиба, обозначим их I_1, I_2 , заданы в R^* координатами

$$\left(\sqrt{3}q(2q^2 - 1) : \pm 4q\sqrt{1 - q^4} : \sqrt{3}(2 - q^2) \right). \quad (2.6)$$

Прямая $\tilde{p}$ точек перегиба имеет в R^* координаты $(q^2 - 2 : 0 : 2q^3 - q)$, характеристика $(1 - q^2)(4q^4 - q^2 + 4)$ которых (см. [14], с. 89) при $q > 1$ ($q < 1$) меньше (больше) нуля. Следовательно, прямая точек перегиба локона Аньези при $q > 1$ ($q < 1$) является эллиптической (гиперболической). Точка $I_0(q^2 - 2 : 0 : 2q^2 - 1)$ пересечения прямых $\tilde{p}$ и SA отстоит от точки A на

гиперболическое расстояние m , для которого согласно второй формуле из (4.32) в [14] справедливо выражение

$$ch \frac{m}{\rho} = \frac{2(q^2+1)}{\sqrt{4q^4-q^2+4}}. \quad (2.7)$$

При $q < 1$ точки I_1, I_2 вещественные, оценивая характеристику их координат из (1), убеждаемся, что I_1, I_2 принадлежат плоскости Λ_2 , абсолютной линии γ или плоскости $\hat{H}$ при условии $q^2 < Q$, $q^2 = Q$ или соответственно $q^2 > Q$, где $Q = (\sqrt{553} - 19)/8$. Используя зависимость q от r из (1), получаем зависящие от r условия принадлежности точек I_1, I_2 той или иной компоненте плоскости H^2 .

Так же я получил другие аналоги немного изменив способ построения локона на гиперболической плоскости.

Пусть ω — гиперцикл плоскости $\hat{H}$ (см. [6, 14]) (или окружность плоскости Λ_2 (см. [6, 7])) с центром S и высотой h (радиусом r), где $h \in \mathbb{R}_+$ ($r \in \mathbb{R}_+$). Пусть прямые $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ — касательные к ω в диаметрально противоположных точках A и B соответственно. Через точку A проведем произвольную прямую AX и обозначим точку ее пересечения с прямой $\tilde{b}$ через D , а отличную от A точку пересечения с ω — через C . Параллельно прямой AB через точки C и D проведем непараллельные между собой прямые $\tilde{c}$ и $\tilde{d}$ соответственно, точку их пересечения обозначим M . При всех возможных положениях прямой AX точка M описывает линию, обозначим эту линию σ и назовем *коникой Анъези с гиперциклической базой ω и опорной точкой A* . Коникой Анъези отнесем к *первому (второму)* роду, если при ее построении прямая $\tilde{c}$ параллельна направленной прямой BA (AB) в содержащей базу ω компоненте плоскости H^2 .

Исследуем коники Анъези с гиперциклической базой ω в плоскостях $\hat{H}$ и Λ_2 . Выберем для этого канонический репер R^* , $R^* = \{A_1, A_2, A_3, E\}$, первого типа (см. [14, с. 87]) так, чтобы его третья вершина A_3 совпала с центром S гиперцикла (окружности) ω , вершина A_1 лежала на прямой AB , а вершина A_2 совпала с полюсом прямой AB относительно абсолюта. В репере R^*

уравнение абсолюта γ имеет вид

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0, \quad (2.8)$$

точки A и B можно задать координатами $(q : 0 : 1)$ и $(-q : 0 : 1)$ соответственно, а гиперцикл (окружность) ω — уравнением

$$x_1^2 + x_2^2 - q^2 x_3^2 = 0, \quad |q| = \operatorname{cth} \frac{h}{\rho} > 1 \quad \left(|q| = \operatorname{th} \frac{r}{\rho} < 1 \right), \quad (2.9)$$

где ρ — радиус кривизны плоскости $\widehat{H}$ (модуль радиуса кривизны плоскости Λ_2). Точке M присвоим в R^* координаты $(m_1 : m_2 : m_3)$.

Как касательные к ω в точках A и B прямые $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ ортогональны прямой SA (см. [14, теорема 2.4.4]), поэтому они содержат точку A_2 и заданы в R^* следующим образом: $\tilde{a}(1 : 0 : -q)$, $\tilde{b}(1 : 0 : q)$.

Прямая SA пересекает абсолют в точках $E_{13}(1 : 0 : 1)$, $E_{31}(-1 : 0 : 1)$. Учитывая, что $\tilde{c} \parallel SA$ и $\tilde{d} \parallel SA$, и полагая, что $E_{13} \in \tilde{c}$, $E_{31} \in \tilde{d}$, прямые $\tilde{c}$ и $\tilde{d}$ зададим координатами соответственно $(-m_2 : m_1 - m_3 : m_2)$ и $(-m_2 : m_1 + m_3 : -m_2)$. Координаты точки D пересечения прямых $\tilde{b}$ и $\tilde{d}$ имеют в R^* вид $(-q(m_1 + m_3) : (1 - q)m_2 : m_1 + m_3)$, а прямая AD задана координатами $((1 - q)m_2 : 2q(m_1 + m_3) : -q(1 - q)m_2)$ и пересекает $\tilde{c}$ в принадлежащей конике ω точке

$$C((3q - q^2)m_1 + (q + q^2)m_3 : -(q - 1)^2 m_2 : (1 + q)m_1 + (3q - 1)m_3).$$

Используя уравнение (2.9) коники ω и условие $C \in \omega$, находим каноническое уравнение коники Аньези σ в репере R^* :

$$8q^2 x_1^2 + (1 - q)^3 x_2^2 + 8q^3 x_3^2 + 8q^2(1 + q)x_1 x_3 = 0. \quad (2.10)$$

Это уравнение разлагается на 6 случаев.

$$1) (-\infty, -1); \quad 2) (-1, 0); \quad 3) (0, \frac{1}{3}); \quad 4) \frac{1}{3}; \quad 5) (\frac{1}{3}, 1); \quad 6) (1, +\infty).$$

В бакалаврской работе подробно описаны, каждый из интервалов.

Обобщить полученные результаты можно в виде 3-х теорем которые так же представлены в конце практической части бакалаврской работы.

Я получил большое количество аналогов в ходе бакалаврской работы, для их визуализации мной была написана программа, код которой находится в приложении бакалаврской работы. Эта программа позволяет с заданной точностью строить аналоги для любых значений q , что делает ее довольно наглядной. Примеры аналогов, которые визуализирует программа так же находятся в приложении бакалаврской работы

Заключение. Таким образом я в работе получил аналоги локона Аньези на расширенной гиперболической плоскости с гиперциклической базой. Написал программу для визуализации их при любых q которые может задать пользователь.