МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра физики открытых систем

Численный анализ возможности существования мультистабильности вблизи границ режимов обобщенной синхронизации и синхронизации, индуцированной шумом

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

Студента 2 курса __2241__ группы
Направления__09.04.02 «Информационные системы и технологии»_______
код и наименование направления
института физики____
наименование факультета, института, колледжа
Илларионовой Екатерины Дмитриевны_____________________________
фамилия, имя, отчество

Научный руководитель
профессор, д.ф.-м.н., профессор ________________ О.И. Москаленко
должность, уч. степень, уч. звание дата, подпись инициалы, фамилия

Заведующий кафедрой
профессор, д.ф.-м.н., профессор ________________ А.А. Короновский
должность, уч. степень, уч. звание дата, подпись инициалы, фамилия

Саратов_2024_год

Введение. В мире науки явление синхронизации, принадлежащее к числу фундаментальных понятий теории нелинейной динамики и хаоса, привлекает к себе широкое внимание исследователей [1-3] и имеет важное как теоретическое, так и практическое значение, например, в биологических и физических задачах [4,5], при скрытой передаче информации с помощью хаотических сигналов [6,7], при управлении системами сверхвысокочастотной электроники [8] и т.п.

С развитием теории динамического хаоса было обнаружено множество типов хаотического синхронного поведения динамических систем с различной связью, такие как: синхронизация с запаздыванием, полная синхронизация, фазовая синхронизация, обобщенная синхронизация, индуцированная шумом синхронизация [9] и т.д. Каждый из них имеет свои особенности и способы диагностики. В данной работе мы остановимся на изучении двух из вышеназванных режимов синхронизации. Это обобщенная синхронизация и индуцированная шумом синхронизация. Данные режимы среди различных типов синхронизации являются одними из наиболее интересных и сложных. В частности, обобщенная синхронизация может наблюдаться как в однонаправленно и взаимно связанных динамических системах, так и в сложных сетях из нелинейных элементов [10], а режим синхронизации, индуцированной шумом, является обобщением режима обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных системах на тот случай, когда детерминированный сигнал одной из взаимодействующих систем оказывается замененным на стохастический [11].

Как известно, вблизи границы режима обобщенной синхронизации наблюдается перемежающееся поведение [12,13]. Под перемежающимся поведением в данном контексте понимается чередование синхронного и асинхронного поведения динамических переменных систем. Аналогичный режим наблюдается и вблизи границы индуцированной шумом синхронизации, что еще раз говорит о схожести данных режимов синхронизации [14].

Несмотря на то, что изучение режимов обобщенной синхронизации и синхронизации, индуцированной шумом, происходит уже достаточно долгий период времени, множество вопросов в этой области остается нерешенным. В их число входит выявление наличия феномена мультистабильности [15] в режиме перемежающегося поведения вблизи границ обобщенной синхронизации и синхронизации, индуцированной шумом, в том числе в осцилляторах со сложной топологией аттрактора.

Целью данной магистерской работы является изучение возможности существования мультистабильности вблизи границ обобщенной синхронизации и синхронизации, индуцированной шумом, в различных классах динамических систем при помощи численного моделирования. С этой целью рассмотрены ансамбли несвязанных между собой систем, находящихся под воздействием общего случайного (индуцированная шумом синхронизация) или детерминированного (обобщенная синхронизация) сигнала. Кроме того, дополнительно изучен еще один тип поведения – обобщенная синхронизация в присутствии шума, когда детерминированный и случайный сигналы оказывают воздействие на ансамбль одновременно. Для него также исследована возможность существования мультистабильности на границе синхронного режима. В качестве объектов исследования взяты ансамбли систем Лоренца и логистических отображений. Для реализации численного исследования выбран язык программирования C++ в среде разработки Qt creator, а также, для наглядной визуализации данных, – язык программирования Python.

Магистерская работа содержит 68 страниц, включая 31 рисунок, приведённый список литературы включает 30 наименований.

Основное содержание работы. Магистерская работа состоит из введения, трех глав и заключения.

В первой главе сначала приводятся теоретические сведения по обобщенной синхронизации: введено в рассмотрение понятие этого режима, описаны методы его диагностики – метод вспомогательной системы и вытекающий из него расчет средней разности между состояниями ведомой и вспомогательной систем, методы расчета меры мультистабильности и ошибки синхронизации. Далее приведены результаты применения данных методов к анализу обобщенной синхронизации и полученные при этом закономерности.

В первом разделе описывается обобщенная синхронизация и метод ее получения. Под синхронизацией принято понимать одинаковое функционирование в один и тот же момент времени двух или большего числа процессов. Одним из возможных способов синхронизации ансамбля однонаправленно связанных осцилляторов является появление между ними некоторой функциональной зависимости, вид которой может быть достаточно сложным. Такой режим называется обобщенной синхронизацией [10, 16]. Для диагностики обобщенной синхронизации выбраны наборы из N ведомых систем с непрерывным (осцилляторы Лоренца) и дискретным (логистические отображения) временем.

Осцилляторы Лоренца описываются набором следующих систем ведомых уравнений (формула (2)), находящихся вод воздействием одной и той же ведущей системы (формула (1)):

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \sigma(y_1 - x_1) \\ \frac{dy_1}{dt} = x_1(r_1 - z_1) - y_1 \\ \frac{dz_1}{dt} = x_1 y_1 - \beta z_1 \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} \frac{dx_2^i}{dt} = \sigma\left(y_2^i - x_2^i\right) + \varepsilon(x_1 - x_2^i) \\ \frac{dy_2^i}{dt} = x_2^i\left(r_2 - z_2^i\right) - y_2^i \\ \frac{dz_2^i}{dt} = x_2^i y_2^i - \beta z_2^i,\ i = 1, \dots, N \end{cases} \tag{2}$$

Здесь $\sigma = 10$, $r_1 = 28$, $\beta = \frac{8}{3}$ и $r_2 = 30$ – некоторые положительные числа, называемые параметрами систем, которые в детерминированном случае приводят к хаотическому поведению, $x_1 = (x_1, y_1, z_1)$ и $x_2^i =$

(x_2^i, y_2^i, z_2^i) – векторы состояний взаимодействующих ведущей и ведомых систем, а ε – параметр связи.

Для логистических отображений уравнения набора ведомых систем (формула (4)) и ведущей системы (формула (3)) имеют следующий вид:

$$x_{n+1}^0 = f(x_n^0, \lambda) \quad (3)$$

$$x_{n+1}^i = f(x_n^i, \lambda_2) + \varepsilon\left(f\left(x_n^0, \lambda\right) - f(x_n^i, \lambda_2)\right), \quad (4)$$

где $f(x, \lambda) = \lambda x(1-x)$, $\lambda = 3.8$, $\lambda_2 = 3.75$ – управляющие параметры, $i = 1,2$ в случае классической обобщенной синхронизации, ε – параметр связи.

Увеличивая параметр связи между ведущей системой и ансамблем идентичных по управляющим параметрам ведомых систем, можно добиться идентичности их колебаний. Таким образом, наступает режим обобщенной синхронизации.

Во втором разделе описывается метод вспомогательной системы [17]. При использовании данного подхода вводится дополнительная ведомая система (вспомогательная), но с иными начальными условиями. Тогда, критерием возникновения обобщенной синхронизации будет эквивалентность состояний ведомой и вспомогательной систем. Так, были построены зависимости координаты x_1 ведомой системы от координаты x_2 вспомогательной системы, а также для системы Лоренца – фазовые портреты ведомой системы при различных значениях параметра связи. Установлено, что с увеличением параметра связи точки на плоскости $(x_1;x_2)$ выстраиваются вдоль главной диагонали, а в случае систем Лоренца аттрактор ведомой системы деформируется.

В данном разделе рассмотрен еще один метод диагностики обобщенной синхронизации – расчет средней разности между состояниями ведомой и вспомогательной систем Лоренца и логистических отображений, и построена зависимость этой характеристики от параметра связи.

Расчет средней разности производился по формуле:

$$S = \frac{1}{T-T_0}\int_{T_0}^{T}\sqrt{(x_2^1 - x_2^2)^2 + (y_2^1 - y_2^2)^2 + (z_2^1 - z_2^2)^2 dt}, \quad (5)$$

где T_0 – время переходного процесса, T – время расчета, $(x_2^1;y_2^1;z_2^1)$ и $(x_2^2;y_2^2;z_2^2)$ – координаты ведомой и вспомогательной систем Лоренца, соответственно. Для логистических отображений в формуле (5) пропадают y и z составляющие. Из построенных зависимостей сделан вывод о том, что при увеличении параметра связи средняя разность стремится к нулю, отражая переход от асинхронного состояния к режиму обобщенной синхронизации.

В третьем разделе описан метод вычисления меры мультистабильности по аналогии с работами [15,18], позволяющий перейти от рассмотрения двух систем к ансамблю. Диагностика синхронного режима производилась с помощью сравнения систем «каждая с каждой». В рамках данного метода считалась разность состояний траекторий между каждой парой систем (i-ой и j-ой) по формуле (6):

$$\mathrm{D}ifferent = \sqrt{(\mathrm{x_j} - \mathrm{x_i})^2 + (\mathrm{y_j} - \mathrm{y_i})^2 + (\mathrm{z_j} - \mathrm{z_i})^2}, i,j = 1,..,N\,; i \neq j \quad (6)$$

Далее производился подсчет числа осцилляторов, находящихся в одинаковом состоянии с i-ым осциллятором, после чего считалась вероятность обнаружения асинхронного режима (турбулентной фазы):

$$P_a = 1 - \sum_{i=1}^{N}\frac{n}{N(N-1)}, \quad (7)$$

где N – количество рассматриваемых систем.

Сама диагностика синхронного режима производилась путем расчета усредненной по времени вероятности обнаружения турбулентной фазы:

$$P_{av} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T P_a(t)dt \quad (8)$$

В четвертом разделе приведены результаты численного анализа систем ниже границы обобщенной синхронизации, где присутствует перемежающееся поведение, то есть разность между состояниями взаимодействующих систем выглядит как чередование синхронных и асинхронных фаз, с точки зрения наличия мультистабильности [15]. Для доказательства данного феномена были построены бассейны притяжения одной из ведомых систем, находящихся под действием детерминированного сигнала, начальные точки которой задают плоскость значений, при фиксированных начальных условиях другой системы.

Далее произведен переход к ансамблям рассматриваемых систем Лоренца и логистических отображений и построена усредненная по времени зависимость вероятности обнаружения турбулентной фазы от параметра связи. Установлено что вероятность обнаружения турбулентной фазы стремится к нулю при увеличении интенсивности детерминированного сигнала, а порог синхронизации, найденный таким способом, идентичен результатам, полученным во втором разделе.

Также для проверки достоверности метода сравнения систем «каждая с каждой» была рассчитана по формуле

$$S = \frac{1}{(T-T_{0)}N^2} \sum_0^T \sqrt{(x_2^j - x_2^i)^2 + (y_2^j - y_2^i)^2 + (z_2^j - z_2^i)^2}, i, j = 0, .., N;\ i \neq j, \quad (9)$$

(где T_0 – время переходного процесса, T – время расчета, N – количество ведомых систем) ошибка синхронизации и построена ее зависимость от параметра связи, что позволило убедиться, что синхронизация наступает при тех же по величине значениях параметра связи.

Во второй главе рассмотрена обобщенная синхронизации в присутствии шума с точки зрения мультистабильности.

В первом разделе второй главы говорится о том, что при практическом применении обобщенной синхронизации всегда присутствуют посторонние шумы. Для диагностики обобщенной синхронизации в присутствии шума, также как и в главе 1, были выбраны набор из N ведомых систем с непрерывным (осцилляторы Лоренца) и дискретным (логистические отображения) временем. Но в отличие от первой главы, в ведомые системы (формула (2)) для осцилляторов Лоренца был добавлен шум в каждое уравнение дополнительным слагаемым ξD, где D – интенсивность шума, а ξ белый гауссов шум, идентичный для всех уравнений системы, $\langle\xi_i(t)\rangle = 0$, $\langle\xi_i(t)\xi_j(t)\rangle = \delta_{ij}\delta(t-t')$, $\forall\ i, j$, а для ведомых логистических отображений (формула (4)) – $\mathrm{D}\big(f(\xi_n,\lambda) - f(x_n^0,\lambda_2)\big)$, где ξ_n – гауссов шум со средним μ = 0.5 и стандартным отклонением σ = 0.12. Увеличивая параметр связи (воздействие детерминированного сигнала) на ансамбль идентичных по управляющим параметрам хаотических систем, предполагалось, что вне зависимости от воздействия внешнего шумового сигнала, можно добиться идентичности их колебаний.

Во втором разделе второй главы с помощью метода вспомогательной системы получены зависимости координаты x_1 ведомой системы от координаты x_2 вспомогательной системы, а также для системы Лоренца – фазовые портреты ведомой системы при различных значениях параметра связи и шумового сигнала. Установлено, что при увеличении значения интенсивности шума граница наступления обобщенной синхронизации немного сдвигается по сравнению с классической обобщенной синхронизацией, как для систем Лоренца, так и для логистических отображений. Также показано, что внешнее шумовое воздействие «зашумляет» аттрактор Лоренца, но при этом не нарушает его двулистную структуру.

Кроме того, в данном разделе произведена диагностика обобщенной синхронизации в присутствии шума при помощи расчета средней разности между состояниями ведомой и вспомогательной систем (формула (5)) и построена ее зависимости от параметра связи при различных значениях интенсивности шумового воздействия для систем Лоренца и логистических отображений. Выяснено, что при любых значениях шумового воздействия зависимость средней разности обращается в ноль, что свидетельствует о наличии обобщенной синхронизации.

В третьем разделе второй главы построены бассейны притяжений одной из ведомых систем, находящихся под действием детерминированного и внешнего шумового сигналов по аналогии с разделом 4 первой главы, по которым установлено, что для обеих рассмотренных систем в фиксированные моменты времени в режиме перемежающейся обобщенной синхронизации в присутствии шума, имеет место мультистабильность.

Осуществлен переход от рассмотрения двух систем к ансамблю с помощью метода сравнения систем «каждая с каждой», рассчитана и построена зависимость усредненной по времени вероятности обнаружения асинхронной фазы (формула (8)) от параметра связи. Сделали вывод, что вне зависимости от шумового воздействия, усредненная по времени вероятность обнаружения турбулентной фазы с увеличением параметра связи обращается в ноль, что свидетельствует о наступлении обобщенной синхронизации.

Помимо этого, отдельно рассчитана по формуле (9) ошибка синхронизации для ансамблей осцилляторов Лоренца и логистических отображений. Оказалось, что при увеличении параметра связи ошибка синхронизации стремится к нулю, свидетельствуя о переходе от асинхронного состояния ансамбля систем к режиму обобщенной синхронизации. Таким образом, режим обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных осцилляторах Лоренца и логистических отображениях оказывается устойчивым по отношению к шумам.

Наконец, в главе 3 представлено исследование индуцированной шумом синхронизации и эффектов вблизи ее границы с точки зрения мультистабильности. В данной главе приведены аргументы в пользу того, что индуцированная шумом синхронизация схожа с обобщенной синхронизацией и отличается от нее только характером внешнего сигнала.

В первом разделе дано определение режима синхронизации, индуцированной шумом, в том числе в случае воздействия общего шумового сигнала на ансамбль [19]. Для иллюстрации поведения ансамбля хаотических осцилляторов рассмотрен следующий набор из N хаотических осцилляторов Лоренца под общим источником шума:

$$
\begin{cases}
\frac{\mathrm{dx}_i}{\mathrm{dt}} = \sigma(\mathrm{y}_i - \mathrm{x}_i) + \xi\mathrm{D} \\
\frac{\mathrm{dy}_i}{\mathrm{dt}} = x_i(r - z_i) - y_i + \xi\mathrm{D} \\
\frac{\mathrm{dz}_i}{\mathrm{dt}} = x_i y_i - \beta\mathrm{z}_i + \xi\mathrm{D},\ i = 1, \dots, N
\end{cases} \tag{10}
$$

(где $\sigma = 10$, $r = 28$, $\beta = \frac{8}{3}$ – по-прежнему параметры систем, ξ – белый гауссовский шум с нулевым средним значением, а D – управляющий параметр, с помощью которого изменяется интенсивность шумового воздействия [20]) и такой же набор логистических отображений:

$$
x_{n+1}^i = f\left(x_n^i, \lambda\right) + \mathrm{D}\left(f(\xi_n, \lambda) - f\left(x_n^i, \lambda\right)\right), \tag{11}
$$

где ξ_n – гауссов шум со средним $\mu = 0.5$ и стандартным отклонением $\sigma = 0.12$, $f(x, \lambda) = \lambda x(1\text{-}x)$, $\lambda = 3.75$ – управляющий параметр, $i = 1,2$ в случае классической синхронизации, индуцированной шумом, D – параметр связи.

Так, индуцированную шумом синхронизацию можно добиться, увеличивая интенсивность шума на ансамбль идентичных по управляющим параметрам несвязанных друг с другом хаотических систем.

Во втором разделе рассматривается классическая индуцированная шумом синхронизацию пары систем Лоренца (формула (10) при $i = 1,2$) и логистических отображений (формула (11) при $i = 1,2$), одинаковых по управляющим параметрам, подвергающиеся одному и тому же источнику шума и стартующих из разных начальных точек. Как и в предыдущих главах, для данных систем были построены зависимости координаты x_1 первой системы от координаты x_2 второй системы, а для системы Лоренца – фазовые портреты при различных значениях параметра шума. По данным полученных зависимостей показано, что по мере увеличения шумового параметра координаты x_1 первой и x_2 второй рассматриваемых систем становятся идентичными по своей величине, что говорит о начале синхронного режима, что проявляется как появление диагональной линии на плоскости $(x_1; x_2)$, при этом в случае систем Лоренца аттрактор при увеличения шумового параметра деформируется.

Кроме того, была рассчитана средняя разность между состояниями двух систем (формула (5)) Лоренца и логистических отображений, стартующих с разных значений начальных условий, и построена ее зависимость от параметра шума. Из полученных рисунков сделан вывод о том, что с увеличением параметра связи средняя разность стремится к нулю, говоря о том, что рассматриваемые системы, находящиеся под воздействием шума, переходят к синхронному состоянию.

В разделе 3 построены в определенные моменты времени бассейны притяжения одной из систем, находящихся под действием шума, при фиксированных начальных условиях другой системы. Установлено, что как для систем Лоренца, так и для логистических отображений в фиксированные моменты времени в режиме перемежающейся синхронизации, индуцированной шумом, имеет место мультистабильность.

Далее, как и в предыдущих главах рассчитана (формула (8)) и построена вероятность обнаружения асинхронной фазы от параметра шумового воздействия. По данным зависимостей прослеживается, что по мере увеличения интенсивности шумового воздействия мера мультистабильности в обоих ансамблях систем почти все время плавно уменьшается от 1 до 0, и когда она обнуляется, это свидетельствует о наступлении индуцированной шумом синхронизации. Отметим, что также как и для обобщенной синхронизации, рассмотренной в главе 1, вблизи границы синхронного режима мера мультистабильности в обоих случаях оказывается положительной, что свидетельствует о наличии мультистабильности в режиме перемежающейся синхронизации, индуцированной шумом.

Также была рассчитана ошибка синхронизации (формула (9)), которая в точности совпала с результатами, полученными при расчете усредненной по времени меры мультистабильности.

Заключение. В рамках данной магистерской работы была произведена диагностика нескольких типов синхронизации: обобщенной синхронизации, индуцированной шумом синхронизации, а также обобщенной синхронизации в присутствии шума – для двух однонаправленно связанных (для обобщенной синхронизации и обобщенной синхронизации в присутствии шума) и несвязанных (для индуцированной шумом синхронизации) систем Лоренца и логистических отображений с использованием метода вспомогательной системы и в ансамбле однонаправленно связанных и несвязанных динамических систем Лоренца и логистических отображений посредством сравнения «каждой системы с каждой». В рамках первого метода были построены плоскости состояний ведомой и вспомогательной систем, фазовые портреты для ведомой системы Лоренца и разность состояний ведомой и вспомогательной систем в зависимости от параметра связи и шумового параметра. Кроме того, для второго метода диагностики обобщенной синхронизации были рассчитаны количественная мера мультистабильности и усредненная по времени вероятность обнаружения асинхронной фазы при различных значениях параметра связи и шумового параметра, а также было произведено сравнение данных расчетов для диагностики индуцированной шумом и обобщенной синхронизации. Также для метода сравнения «каждой системы с каждой» была рассчитана ошибка синхронизации.

Установлено, что во всех рассмотренных случаях для данных подходов диагностики синхронизация наступает при одном и том же значении детерминированного и шумового сигналов, а количественная мера мультистабильности при увеличении детерминированного и шумового сигналов стремится к нулю. Это свидетельствует о том, что количество турбулентных (асинхронных) фаз при большом значении параметра связи сильно уменьшается, а ламинарных (синхронных) фаз становится больше, что говорит о наступлении синхронизации. Так, предполагая, что обобщенная и индуцированная шумом синхронизации схожи по своей природе, впервые была обнаружена мультистабильность на границе индуцированной шумом синхронизации и предложен метод ее диагностики с использованием количественной меры мультистабильности.

Также стоит отдельно отметить режим обобщенной синхронизации в присутствии шума. При его диагностике было выяснено, что независимо от интенсивности внешнего шумового воздействия синхронизация наступает, то есть можно утверждать, что обобщенная синхронизация в системах со сложной топологией аттрактора и отображениях не сильно зависит от шумового воздействия, что является актуальным в вопросе скрытой передачи информации. Однако, при больших воздействиях шума может произойти незначительный сдвиг границы обобщенной синхронизации.

Список использованной литературы

[1] Блехман И. И. Синхронизация в природе и технике. [текст] / Блехман И. И. // URSS, 2015. – С. 432-432.

[2] Anishchenko V.S. Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems. [текст] / Anishchenko V.S., Astakhov V.V., Neiman A.B., Vadivasova T.E., Schimansky-Geier L.// Tutorial and Modern Developments. Springer-Verlag, Heidelberg, 2001.

[3] Boccaletti S. Synchronization: From Coupled Systems to Complex Networks. [текст] / Boccaletti S., Pisarchik A.N., del Genio C. I., Amann A.// 1st Edition Cambridge University Press, 2018.

[4] Glass L. Synchronization and rhythmic processes in physiology. [текст] / Glass L. //Nature. – 2001. – Т. 410. – №. 6825. – С. 277-284.

[5] Rosenblum M.G. Synchronization approach to analysis of biological systems [текст] / Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J // Fluctuation and Noise Letters. 2004. V. 4. N. 1. P. L53-L62. DOI: 10.1142/S0219477504001653.

[6] Murali K. Drive-response scenario of chaos synchronization in identical nonlinear systems. [текст] / Murali K., Lakshmanan M. // Physical review E. – 1994. Vol 48. N 3. R1624–R1626.

[7] Короновский А.А. О применении хаотической синхронизации для скрытой передачи информации [текст] / Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов

А.Е.// Успехи физических наук. 2009. Т. 179. № 12. С. 1281-1310. DOI: 10.3367/UFNr.0179.200912c.1281.

[8] Короновский А. А. Влияние внешнего сигнала на автоколебания в распределенной системе винтовой электронный поток-встречная электромагнитная волна. [текст]/ Короновский А. А., Трубецков Д. И., Храмов А. Е.//Известия высших учебных заведений. Радиофизика. – 2002. – Т. 45. – №. 9. – С. 773-792.

[9] Пиковский А. С. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. [текст]/ Пиковский А. С., Розенблюм М. Г., Куртс Ю. М.// Техносфера. (2003).

[10] Moskalenko, O. I. Generalized synchronization in mutually coupled oscillators and complex networks. [текст]/ Moskalenko, O. I., Koronovskii, A. A., Hramov, A. E., & Boccaletti, S.// Physical Review E. – 2012. – 036216.

[11] Hramov A.E. Are generalized synchronization and noise-induced synchronization identical types of synchronous behavior of chaotic oscillators? [текст] /Hramov A.E., Koronovskii A.A., Moskalenko O.I. // Phys.Let A 354. 2006. 423-427

[12] Hramov A.E. Intermittent generalized synchronization in unidirectionally coupled chaotic oscillators. Europhysics Letters. [текст] / Hramov A.E., Koronovskii A.A.// 70, 2 (2005) 169-175

[13] Koronovskii A.A. Jump intermittency as a second type of transition to and from generalized synchronization. [текст] / Koronovskii A.A., Moskalenko O.I., Pivovarov A.A., Khanadeev V.A., Hramov A.E., Pisarchik A.N.// Jump intermittency as a second type of transition to and from generalized synchronization. Phys. Rev. E. 102, (2020) 012205

[14] Москаленко О.И. Перемежающееся поведение на границе индуцированной шумом синхронизации. [текст] / Москаленко О.И., Короновский А.А., Шурыгина С.А.// ЖТФ. 81, 9 (2011) 150-153

[15] Moskalenko O.I. On multistability near the boundary of generalized synchronization in unidirectionally coupled chaotic systems. [текст] /Moskalenko,

O. I., Koronovskii, A. A., Selskii, A. O., & Evstifeev, E. V. // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science 31.8 (2021): 083106.
[16] Rulkov Nikolai F. Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems. [текст] / Rulkov Nikolai F., Sushchik M. M., Tsimring L. S., Abarbanel H. D.I. // Phys. Rev. E. 51 (2) (1995) 980-994
[17] Abarbanel H. D.I. Generalized synchronization of chaos: The auxiliary system approach. [текст] / Abarbanel H. D.I., Rulkov Nikolai F., Sushchik M. M.// Phys. Rev. E. 53 (5) (1996) 4528-4535
[18] Москаленко О.И. О существовании мультистабильности вблизи границы обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных системах со сложной топологией аттрактора, [текст] /Москаленко О.И., Евстифеев Е.В.// Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2022. Т. 30. № 6. С. 676-684. DOI: 10.18500/0869-6632-003013.
[19] Pikovsky A.S. Synchronization and stochastization of the ensemble of autogenerators by external noise [текст] /Pikovsky A.S.// Radiophys. Quantum Electron. 1984. Vol. 27. P. 576–581
[20] Москаленко О.И. Мультистабильность вблизи границы индуцированной шумом синхронизации в ансамблях несвязанных хаотических систем, [текст] /Москаленко О.И., Илларионова Е.Д.// Изв. Высших учебных заведений Прикладная нелинейная динамика. 2023. Т. 31. № 5. С. 566-574