

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра физики открытых систем

**Изучение особенностей численного расчёта показателей Ляпунова для  
нерегулярных траекторий дискретных отображений**

**АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ**

студента 4 курса 4041 группы

направления

09.03.02 «Информационные системы и технологии»

института физики

Маврина Валерия Николаевича

Научный руководитель  
доцент кафедры физики  
открытых систем, к.ф.-м.н.

\_\_\_\_\_

подпись, дата

Савин Д.В.

Заведующий кафедрой  
физики открытых систем,  
д.ф.-м.н., профессор

\_\_\_\_\_

подпись, дата

А.А. Короновский

Саратов 2024 г.

## Введение

Хаотическая динамика систем представляет собой актуальную исследовательскую тему, значимость которой возрастает как в научных, так и в практических приложениях. Так, в области информационных систем и технологий такие системы могут, например, применяться для создания систем передачи информации [1-3]. Одной из ключевых характеристик таких систем является ляпуновский показатель (ЛП) [4]. Основным алгоритмом его расчёта при численном анализе поведения нелинейной системы является известный алгоритм Бенеттина. Однако получаемое таким способом значение ЛП представляет собой лишь некоторое приближение к значению ЛП, характеризующего аттрактор. Вопрос о точности этого приближения может быть довольно важным в определённых случаях, и, следовательно, актуальной задачей представляется изучение того, как параметры расчёта влияют на получаемые результаты и как точность расчёта связана с видом распределения локальных, т.е. рассчитанных на коротком промежутке времени, ЛП на аттракторе [5]. **Цель** настоящей работы заключается в исследовании влияния параметров расчёта ЛП на получаемый результат и, в частности, получение некоторых количественных оценок, позволяющих сформировать представление о точности получаемого результата и её изменении при увеличении времени расчёта. В качестве объекта для исследования выбрана простейшая модель хаотической динамики - логистическое отображение [4]. В ходе выполнения работы решались следующие **задачи**: изучение теоретических основ хаотической динамики и методов расчета ЛП; анализ изменений ЛП в зависимости от параметров системы; построение и анализ распределений значений ЛП для различных условий эксперимента; сравнение результатов с классическими теоретическими моделями и анализ статистических характеристик распределений. Для эффективного выполнения всех поставленных задач был использован язык программирования Python. В частности, в работе активно применялись библиотеки NumPy и Plotly, NumPy —

библиотека для работы с массивами, Plotly — мощный инструмент для создания графиков и визуализаций. Работа состоит из двух глав.

## Основное содержание работы

**1 Системы с хаотической динамикой и методы анализа устойчивости их траекторий.** Когда речь идет о хаосе, обычно подразумевается, что изменение состояния системы во времени является случайным и невоспроизводимым. Это означает, что его нельзя однозначно предсказать и процесс нельзя повторить. С этой точки зрения понятия "детерминизм" и "хаос" являются противоположными по смыслу. Детерминизм предполагает полную предсказуемость и воспроизводимость процесса, при которой заданное начальное состояние системы однозначно определяет ее состояние в любой момент времени.

В данной главе было рассмотрено, что упомянутое противоречие между детерминизмом и хаосом лишь кажущееся, и было продемонстрировано присутствие хаоса в динамических системах. В качестве исследуемых моделей рассматривались одномерные дискретные отображения.

**1.1 Отображение "Зуб пилы".** Рассмотрим систему, оператор эволюции которой задан следующим правилом определения нового состояния по предыдущему:

$$x_{n+1} = \{2x_n\}, \quad (1)$$

где фигурные скобки обозначают дробную часть числа. Данное отображение представляет собой одномерную динамическую систему, в которой каждое следующее состояние зависит от предыдущего по заданному закону эволюции. Динамическая система, определяемая уравнением (1), является детерминистической, так как для любого заданного начального условия  $x_0$  можно однозначно вычислить состояния на последующих временных шагах. Однако несмотря на детерминизм, система проявляет хаотическое поведение. Для иллюстрации хаотического поведения системы (1) была построена итерационная диаграмма (Рис1.1.1), где на оси абсцисс откладывались значения  $x_n$ , а на оси ординат —  $x_{n+1}$ . Также на Рисунке 1.1.1 представлен графиком самого отображения (1) и биссектриса, которая отмечает точки, где  $x_n = x_{n+1}$ . Рис1.1.1

демонстрирует, как система переходит между левой и правой половинами единичного интервала, что и является проявлением хаоса в динамической системе, описываемой детерминированным уравнением.

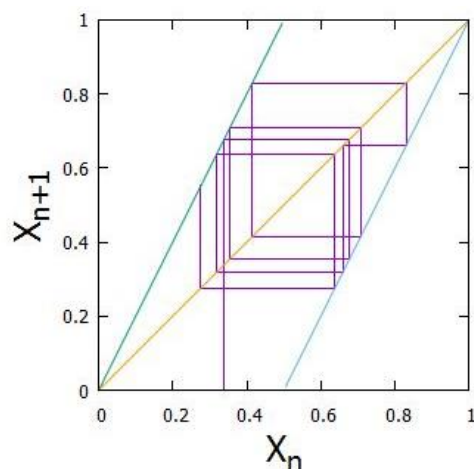


Рис 1.1.1 Итерационная диаграмма отображения (1) - фиолетовый цвет; график отображения (1) - синий цвет; биссектриса - желтый цвет

В процессе исследования чувствительности системы к начальным условиям были проведены вычисления при различных значениях  $x_0$  с небольшими вариациями  $\Delta x$ . Анализ результатов показал, что при меньших начальных различиях  $\Delta x$  траектории оставались близкими друг к другу на более продолжительном временном интервале, в то время как с увеличением  $\Delta x$  они расходились быстрее.

**1.2 Логистическое отображение.** Нелинейные отображения могут демонстрировать сложное хаотическое поведение, для этого достаточно, чтобы функция  $f(x)$  имела квадратичный экстремум. Простейшей такой функцией является парабола, а соответствующее отображение называют логистическим. Оно имеет вид [6]

$$x_{n+1} = 1 - rx_n^2, \quad (2)$$

где  $x_n$  - динамическая переменная, а  $r$  – параметр отображения, от величины которого зависит характер динамики. В данном разделе были рассмотрены основные свойства логистического отображения и методы его анализа. Например, были построены итерационные диаграммы отображения (2) для различных значений  $r$ . Визуализация процесса перехода между периодическими

режимами и хаосом позволила наблюдать формирование сложных устойчивых структур и бифуркационные процессы при изменении параметра  $r$ . Так при  $r > 1.41$  наблюдался переход к сложному, неповторяющемуся поведению системы — это ещё один пример динамического хаоса. [6]

**1.3 Ляпуновские показатели.** Одним из ключевых методов анализа хаотических систем является вычисление ЛП. Этот показатель оценивает степень хаотичности системы и её чувствительность к начальному состоянию, что является важным для понимания её динамики.

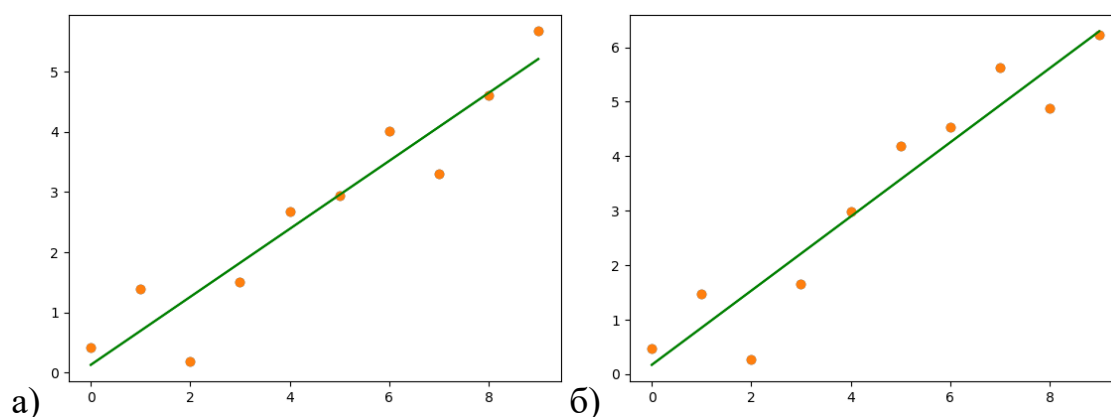


Рисунок 1.3.1 - Графики зависимости  $\ln \frac{\Delta x}{\Delta x_0}$  от  $n$  с аппроксимирующей прямой. Значения параметра  $r$ : а) 1.89; б) 2

Значение углового коэффициента прямой  $\Lambda$  (Рис.1.3.1), на которую ложатся точки в координатах  $(\ln \frac{\Delta x}{\Delta x_0}; n)$ , можно считать оценкой значения ЛП, характеризующего устойчивость данной конкретной траектории к возмущению [6]. По результатам исследования в этой главе было обнаружено, что в хаотической области расстояние между изначально близкими траекториями с течением времени растет, и значения  $\Lambda$  положительны, а для периодических режимов — уменьшается, и  $\Lambda$  получается отрицательным.

**2 Особенности численного определения показателя Ляпунова.** Результаты, полученные в предыдущем разделе, показывают, что локальный ляпуновский показатель (ЛЛП), который рассчитывается для определенного, очень короткого, участка траектории, различен в разных точках аттрактора. ЛП же показатель характеризует траекторию целиком. В идеале для траекторий, стартующих из

любой точки на аттракторе, ЛП должен быть одинаковым при расчёте по бесконечно длинной траектории [4]. В реальности это невозможно, но можно взять достаточно большую траекторию и посчитать значение ЛП. Целью этого раздела было изучение того, как длина такой траектории влияет на получаемый результат.

**2.1 Изучение ляпуновского показателя одной траектории.** Основным методом для численного расчёта показателя Ляпунова является алгоритм Бенеттина, который предлагает вычислить усредненное значение локальных ЛП путем проведения множества итераций. [6] В качестве рассматриваемой модели для изучения особенностей процесса расчета ЛП использовалось логистическое отображение, записанное в виде уравнения (2). Уравнение, описывающее малое возмущение, оно же уравнение в вариациях, имеет вид:

$$\tilde{x}_{n+1} = -2rx_n(\tilde{x}_n) \quad (3)$$

Процедура вычисления ЛП начинается с того, что производится численное решение динамических уравнений на интервале времени, достаточном, чтобы иметь уверенность в выходе траектории на аттрактор. В результате получается некоторая точка фазового пространства  $x_0$ , которая принимается за исходную [4]. Дальнейшая последовательность действий записана в виде уравнения:

$$\Lambda \cong \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M \ln \frac{|\tilde{x}_n|}{\varepsilon} \quad (4)$$

Рассматривалась траектория исходящая из точки  $x_0$ , и возмущенная траектория, стартующая при условии  $\tilde{x}_0 = \varepsilon$ . Для расчета ЛП одновременно итерировалось отображение (2) и уравнение в вариациях (3). На каждом шаге,  $\tilde{x}_n$  переопределялся в зависимости от значения  $x_n$ , а  $\tilde{x}_{n-1}$  был равен  $\varepsilon$ . Значение длины траектории  $M$ , при этом было достаточно большим.

В этом разделе было изучено как меняется отклонение от среднего значения ЛП  $\Lambda_{cp}$ , определенного на длинных траекториях, с увеличением  $M$ . В качестве условий для проведения исследования, было использовано: значение интервала времени для выхода на аттрактор  $t_{at} = 2000$  итераций и значение

$\varepsilon = 1$ . Сначала было изучено как значение  $\Lambda_{\text{ср}}$  изменяется в зависимости от длины отрезка траектории, на котором оно рассчитывается, а также в зависимости от количества значений ЛП, используемых для подсчета  $\Lambda_{\text{ср}}$ . Для данных расчетов использовалось  $M = 5 \cdot 10^5$ . По полученным результатам стало ясно, что при разных параметрах расчета значения  $\Lambda_{\text{ср}}$  равны с разной точностью:  $10^{-5}$  при  $r=1.53$ ;  $10^{-4}$  при  $r=1.64$ ;  $10^{-6}$  при  $r=1.76$ ;  $10^{-5}$  при  $r=1.89$ ;  $10^{-6}$  при  $r=2$ . Для дальнейших расчётов использовались значения  $\Lambda_{\text{ср}}$ : 0.29364 при  $r=1.53$ , 0.3855 при  $r=1.64$ , -0.267618 при  $r=1.76$ , 0.52954 при  $r=1.89$  и 0.693147 при  $r=2$ .

Для анализа поведения ЛП был построен график зависимости модуля разности ЛП со средним значением ЛП от длины траектории  $M$ . В двойном логарифмическом масштабе график выглядит следующим образом:

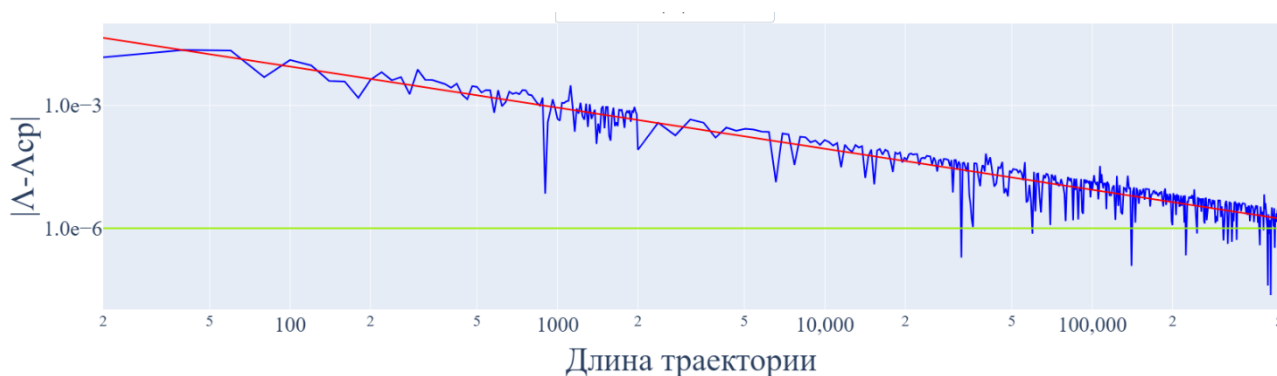


Рисунок 2.1.1 - График зависимости  $|\Lambda - \Lambda_{\text{ср}}|(M)$ , при  $r=2$ , в двойном логарифмическом масштабе – синий цвет, аппроксимирующая прямая – красный цвет, прямая  $y=10^{-6}$  – зеленый цвет

Так как  $\Lambda_{\text{ср}}$  при  $r=2$  было подсчитано с точностью  $10^{-6}$ , на график была добавлена соответствующая прямая. В равномерном масштабе зависимость модуля разности ЛП со средним значением ЛП от длины траектории  $M$  выглядела так, что она должна хорошо аппроксимироваться прямой, эта прямая была построена методом наименьших квадратов, после чего был подсчитан угловой коэффициент (наклон) этой прямой, он оказался равен -0.969. Полученное значение параметра аппроксимирующей прямой показывает, как быстро меняется отклонение с увеличением длины траектории. В равномерном

масштабе будем иметь степенную зависимость с показателем, близким к -1, т.е. обратную пропорциональность. Наблюдается сходимость отклонения к значению  $\approx 10^{-6}$ . При  $r=1.76$  наблюдался явно периодический режим, с хорошей сходимостью. При остальных значениях  $r$  режим хаотический, но сходимость гораздо хуже, чем в режиме развитого хаоса при  $r=2$ . Отметим качественное сходство графиков при всех значениях  $r$  кроме 1.76 и 2. Графики при других параметрах  $r$  далеки от прямых. Благодаря исследованиям в этой главе также стало ясно, что увеличение  $M$ , как правило, приводит к повышению точности на один знак.

**2.2 Изучение распределения ляпуновских показателей при разном значении параметра отображения.** Для изучения того, как получаемое значение ЛП будет изменяться для разных траекторий на аттракторе, был выполнен расчет набора ЛП по набору траекторий. Использовались траектории, полученные из  $n$  случайных значений  $x_0$ , в интервале от -1 до 1. Для анализа ЛП было построено распределение полученных значений. График распределения представляет собой гистограмму, где по оси абсцисс размещаются интервалы значений ЛП, которые можно называть "корзинами". По оси ординат отображается - относительная частота, она вычисляется путем деления частоты в каждом интервале на общее количество траекторий. При построении интервал между максимальным и минимальным значением в наборе ЛП разбивался на 30 корзин. После чего была исследуема зависимость вида распределения от различных параметров расчета ЛП таких как: значение интервала времени для выхода на аттрактор  $t_{at}$ , количество траекторий  $n$  и длина траектории  $M$ . Пример распределения показан на Рисунке 2.2.1. В результате исследования было выявлено что форма распределения воспроизводилась при разном значении параметра  $t_{at}$  и с увеличением  $M$  распределения сходятся друг к другу и приближаются к общему предельному состоянию при различных значениях  $r$ , таких как 1.53, 1.64, 1.89 и 2. Для значений  $r$ , при которых режим является непериодическим, (т.е. для  $r=1.53$ ,  $r=1.64$  и  $r=1.89$ ) ширина распределения получилась больше.



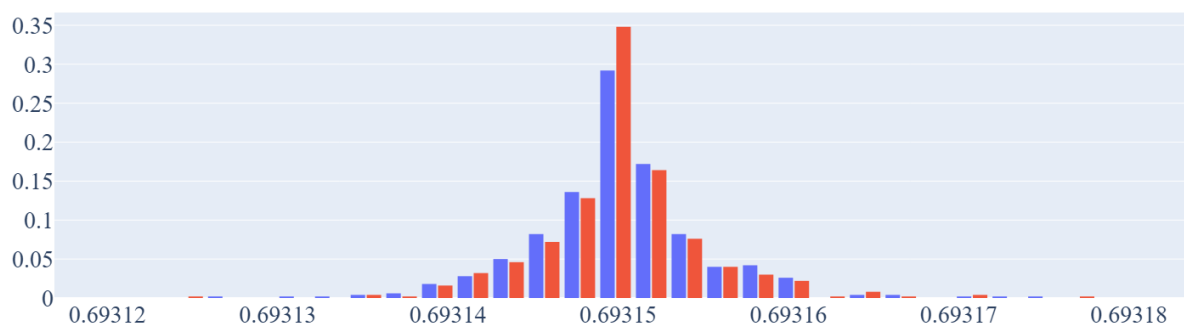


Рисунок 2.2.1 - Распределение ЛПП по набору траекторий на аттракторе.

$r = 2$ ,  $t_{at} = 2000$ ,  $n = 500$ , значения  $M$ : 35060 – синий цвет;  
97000 – красный цвет.

Далее была оценена мера разброса или вариативности значений в наборе ЛПП. Для этого были выполнены стандартные процедуры статистической обработки: определено среднее арифметическое (математическое ожидание), пик распределения (наиболее вероятное значение) и стандартное отклонение распределения ЛПП. Чтобы визуально оценить, как характеристики распределения изменяются в зависимости от длины траектории, были построены зависимости соответствующих значений от длины траектории  $M$  (Рис2.2.2). Также было изучено влияние количества траекторий  $n$  на результаты – зависимости были построены при разных значениях  $n$ .

Из рисунка 2.2.2а хорошо видно, что при разном количестве траекторий зависимости имеют схожий вид, но с увеличением  $n$  линии становятся более гладкими и менее изменчивыми. Отметим, что приблизительно начиная с длины  $M=10^4$  график превращается в прямую. Похожая картина наблюдалась также при других значениях  $r$ . Из рисунка 2.2.2б видно, что графики имеют схожий вид при разном значении  $r$ . В двойном логарифмическом масштабе зависимость между переменными становится линейной. Это означает, что в равномерном масштабе зависимость будет иметь степенной вид с показателем степени  $\approx -0.9$  (этот результат согласуется с предыдущим разделом, где отклонение от среднего также было равно  $-0.969$ .); при  $r = 1.89, 1.64$  и  $1.53$  графики имеют схожий вид, а показатель степени  $\approx -0.5$ . Отрицательный показатель степени указывает на обратную зависимость между переменными, то есть с увеличением длины траектории стандартное отклонение уменьшается по степенному закону.

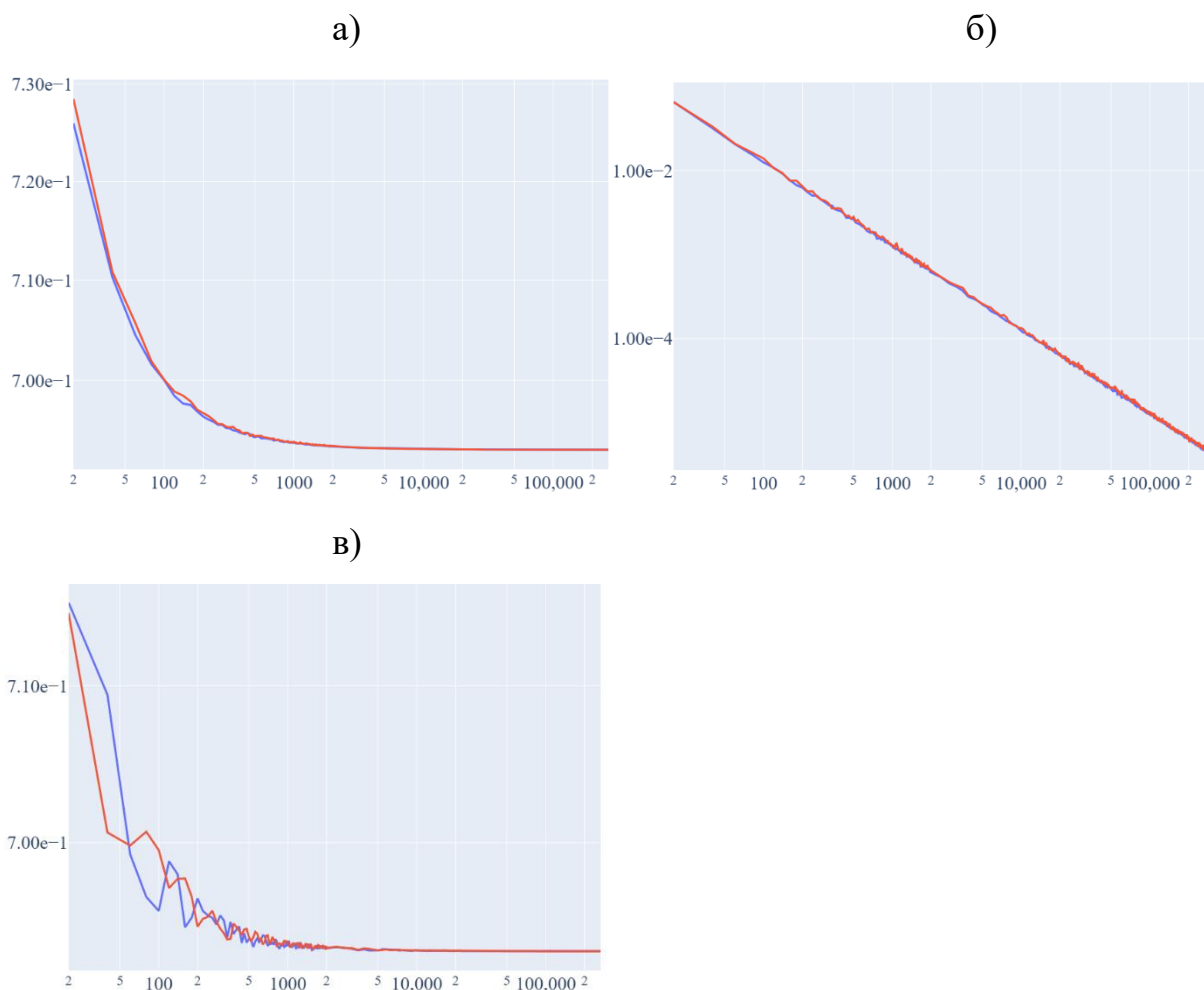


Рисунок 2.2.2 – Зависимости: **а)** среднего значения; **б)** стандартного отклонения; **в)** пика распределения от длины траектории при  $r = 2$  в двойном логарифмическом масштабе.  $n = 500$  – красный цвет,  $n = 1500$  – синий цвет

Из рисунка 2.2.2в видно, что при разном количестве траекторий зависимости имеют схожий вид. Отметим, что приблизительно начиная с длины  $M=10^4$  график превращается в прямую. Похожая картина наблюдалась также при других значениях  $r$ .

**2.3 Сравнение полученных результатов с распределением локальных показателей на аттракторе.** В этом разделе приведено сравнение результатов с распределением локальных показателей на аттракторе, полученных в первой главе. Для этого были визуализированы распределения показателей при различных значениях параметра отображения с помощью гистограммы:

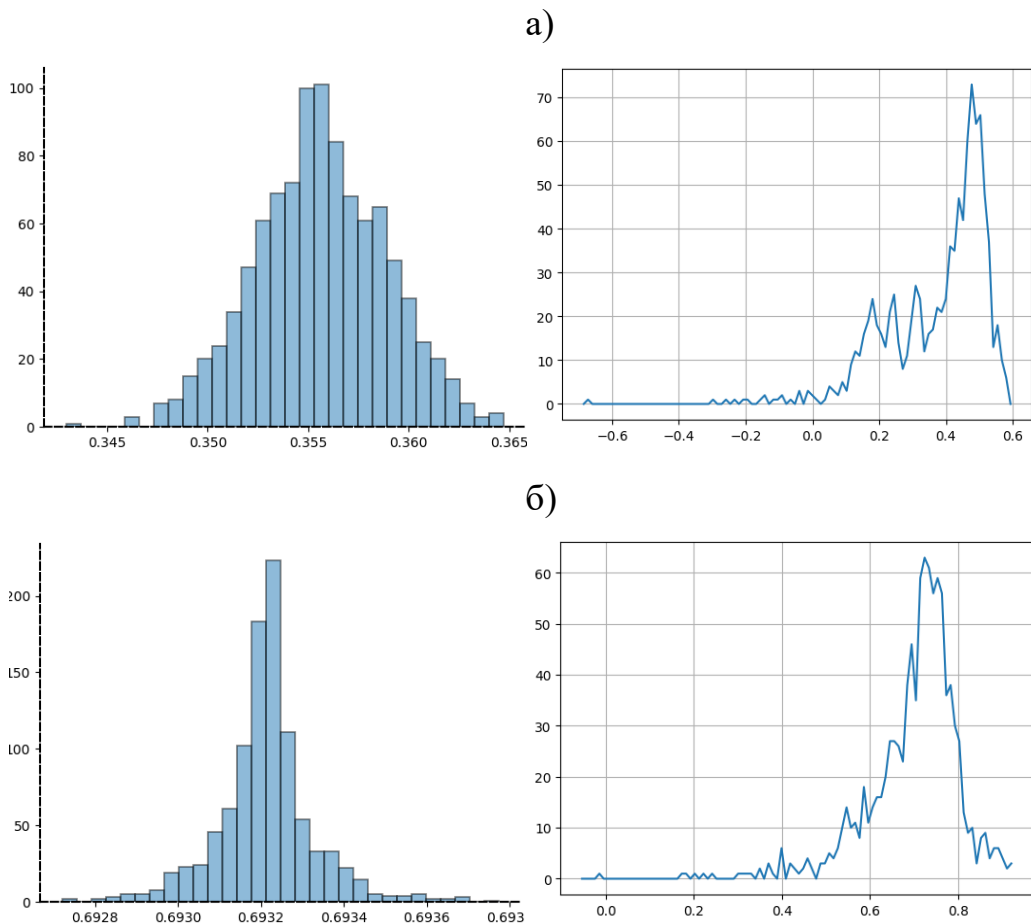


Рисунок 2.3.1 - Распределение значений ЛП и ЛЛП по набору траекторий на аттракторе (слева и справа соответственно). Значения параметра  $r$ : **а)** 1.64; **б)** 2

Из рисунка 2.3.1 мы видим, что распределения значений ЛП в основном симметрично, что нельзя сказать про распределение ЛЛП. Отметим, что распределения имеют разные пики и граничные значения. Также можно сделать следующие наблюдения: средние значения для ЛП и ЛЛП различаются в обоих случаях. Стандартное отклонение для ЛП и ЛЛП также различается. При значении параметра отображения  $r = 1.64$ , стандартное отклонение для ЛП значительно меньше, чем для ЛЛП. Однако, при значении параметра отображения  $r = 2$ , стандартное отклонение для ЛП становится еще меньше, в то время как стандартное отклонение для ЛЛП остается значительно больше.

### **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Работа была посвящена исследованию хаотической динамики через анализ показателей Ляпунова на примере логистического отображения. В рамках исследования изучены основные теоретические аспекты хаоса и разработаны

алгоритмы моделирования и визуализации динамических систем с хаотической природой. Особенное внимание уделено чувствительности к начальным условиям и процессу сходимости показателей Ляпунова к предельным значениям. На основе алгоритма Бенеттина был проведен расчет ЛП как для отдельных траекторий, так и для набора траекторий на аттракторе. Построены распределения полученных значений, выявлена их зависимость от длины траектории и параметра отображения. Показано, что форма распределения изменяется с изменением этих параметров.

В работе получены зависимости среднего значения, относительного пика распределения и стандартного отклонения от длины траектории. Выявлено, что стандартное отклонение уменьшается по степенному закону с увеличением длины траектории, что соответствует степенной зависимости с показателем, близким к  $-0.9$  при одних значениях параметра и  $-0.5$  при других. Также проведено сравнение полученных результатов с распределением локальных показателей на аттракторе, что демонстрирует их схожесть и отличия. Исследована скорость сходимости рассчитываемых значений показателей Ляпунова к предельным значениям, выявлена степенная зависимость от времени расчета с угловым коэффициентом, близким к  $-1$  в двойном логарифмическом масштабе. Результаты данной работы могут быть полезны для дальнейших исследований в области хаотических систем и их устойчивости.

### **Список литературы**

1. Дмитриев, А.С. Динамический хаос: новые носители информации для систем связи / А.С. Дмитриев, А.И. Панас. - М. : Издательство Физико-математической литературы, 2002. - 252 с.
2. Короновский, А.А. О применении хаотической синхронизации для скрытой передачи информации / А.А. Короновский, О.И. Москаленко, А.Е. Храмов // УФН. - 2009. - Т. 179, № 12. - С. 1281-1310.
3. Kuptsov, P.V., Kuznetsov, S.P. Lyapunov Analysis of Strange Pseudohyperbolic Attractors: Angles Between Tangent Subspaces, Local Volume

Expansion and Contraction / P.V. Kuptsov, S.P. Kuznetsov // Regular and Chaotic Dynamics. - 2018. - Т. 23, № 7-8. - С. 908-932.

4. Кузнецов, С. П. Динамический хаос (курс лекций). / С.П. Кузнецов – М.: Издательство Физико-математической литературы, 2001.- 296 с.

5. Lau, F.C.M. Chaos-Based Digital Communication Systems: Operating Principles, Analysis Methods, and Performance Evaluation / F.C.M. Lau, C.K. Tse. - Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 2003. - 228 p.

6. Кузнецов, А.П. Введение в физику нелинейных отображений / А.П. Кузнецов, А.В. Савин, Л.В. Тюрюкина – Саратов : Научная книга, 2010. - 134 с.