

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра физики открытых систем

**Изучение колебательной динамики сложных систем в пакете
Wolfram Mathematica**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студенки 4 курса 4041 группы
направления (специальности) 09.03.02 «Информационные системы и
технологии»

код и наименование направления (специальности)

Института физики

наименование факультета, института, колледжа

Бугаевой Анастасии Романовны

фамилия, имя, отчество

Научный руководитель

Зав. кафедрой физики

открытых систем,

д.ф.-м.н., профессор

должность, уч. степень, уч. звание

дата, подпись

инициалы, фамилия

Заведующий кафедрой

д.ф.-м.н., профессор

должность, уч. степень, уч. звание

дата, подпись

инициалы, фамилия

Саратов 2024 год

Введение

Изучение колебательной динамики сложных систем представляет собой увлекательное и многогранное исследование, охватывающее различные области науки и техники [1]. Колебания играют важную роль в понимании поведения систем, будь то механические конструкции, электрические цепи, биологические организмы или экономические процессы [2-4].

Синхронизация – одно из фундаментальных нелинейных явлений природы. В классическом понимании синхронизация означает регулирование частот периодических самоподдерживающихся генераторов за счет слабого взаимодействия. Во многих ситуациях взаимодействуют более двух, а иногда и трех объектов. Поэтому, если два осциллятора способны к подстройке частоты, то можно ожидать такой способности и от большого количества осцилляторов. Такая система является ансамблем или сетью.

В настоящей выпускной квалификационной работе для изучения явления синхронизации были рассмотрены в качестве базовых моделей системы осцилляторов Ресслера [5] и осцилляторов Курамото [6].

Целью работы является исследование колебательной динамики сложных систем осцилляторов с использованием программного пакета Wolfram Mathematica. Предметом исследования является колебательная динамика сложных систем. Объектом исследования служат математические модели сложных систем, включающие в себя множество компонентов.

Выпускная квалификационная работа состоит из 4 глав:

1. Сложное поведение системы Ресслера;
2. Исследование топологических особенностей сложных сетей;
3. Сеть фазовых осцилляторов Курамото;
4. Численное моделирование и анализ поведения ансамбля осцилляторов Ресслера.

Бакалаврская работа содержит 48 страниц, приведённый список литературы включает 50 наименований.

Глава 1. Сложное поведение системы Ресслера

В первой главе выпускной квалификационной работы рассматривается сложное поведение системы Ресслера. В качестве объекта исследования была выбрана система Ресслера [5], представляющая собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\dot{x} = y - z, \quad \dot{y} = x + ay, \quad \dot{z} = b + (x - r)z. \quad (1.1)$$

Эта простая система имеет только один нелинейный член, произведение переменных x и z в третьем уравнении, что приводит к хаотическому поведению системы. [7]. Значения управляющих параметров были заданы следующим образом: $a = 0.2$, $r = 5.7$, $b = 0.2$, впервые изученные Ресслером. Параметры a , b и c взяты в диапазоне, обеспечивающем хаотичное поведение.

В настоящей выпускной квалификационной работе был выбран метод Рунге-Кутты четвертого порядка для решения системы дифференциальных уравнений (1.1) в Wolfram Mathematica. Получив численное решение ОДУ (1.1), были построены графики временных реализаций – зависимость переменных x , y , z от времени $t \in [0; 100]$, для того, чтобы пронаблюдать динамику переменных при выбранных значениях управляющих параметров.

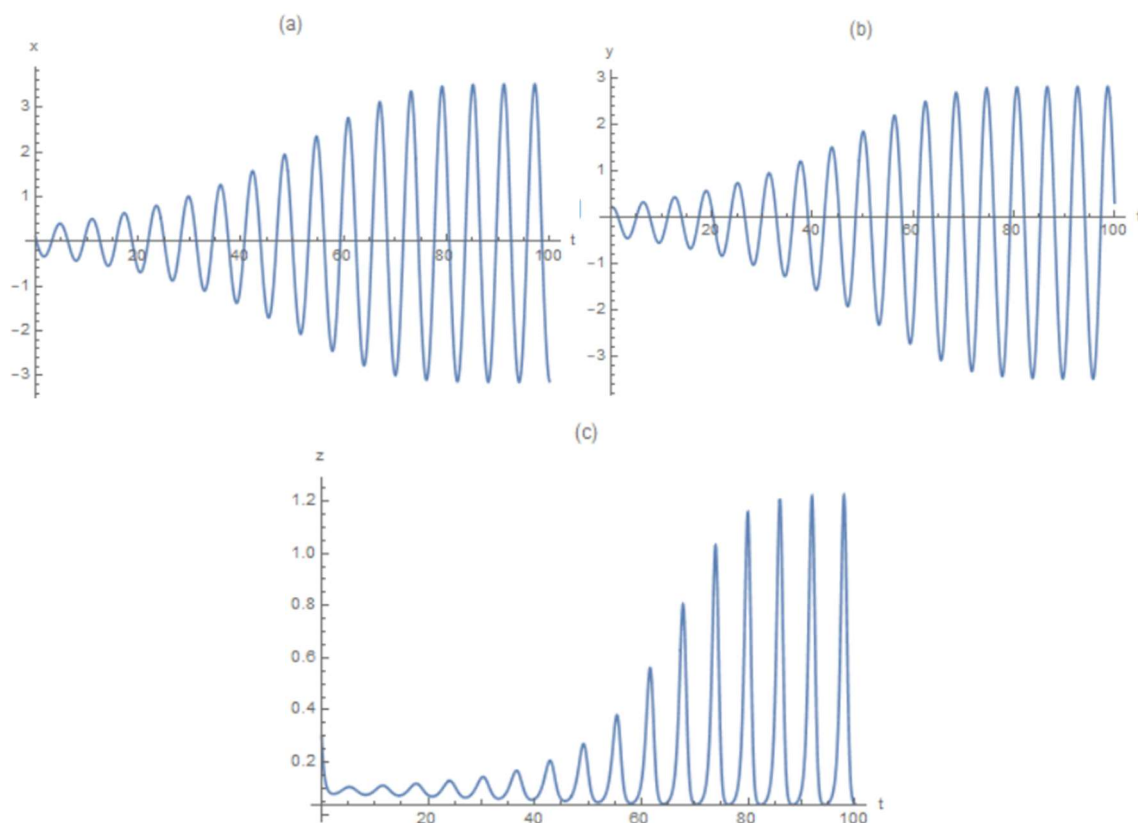


Рис. 1.1 – Временные реализации. (a) – зависимость $x(t)$, (b) – зависимость $y(t)$, (c) – зависимость $z(t)$.

На Рис. 1.1 можно увидеть, что переходной процесс не выброшен и приведенные зависимости имеют длительность 100 единиц безразмерного времени, которая как раз примерно соответствует переходному процессу.

Важным инструментом в рассмотрении поведения динамических систем является фазовый портрет. Построив в системе компьютерной алгебры Wolfram Mathematica график при заданных значениях управляющих параметров, можно получить в фазовом пространстве вид хаотического аттрактора для системы Ресслера. На Рис. 1.2 представлен хаотический аттрактор, видно, что траектории не пересекают сами себя и расходятся от начала координат по спирали.

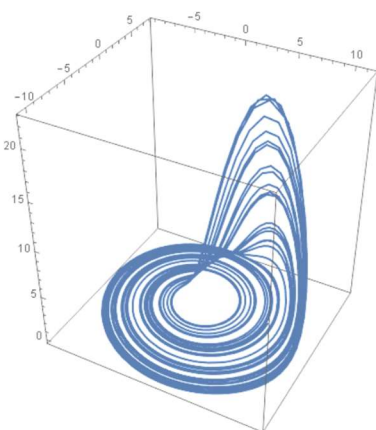


Рис. 1.2 – Фазовый портрет системы Ресслера (1.1) при $a = 0.2$, $b = 0.2$, $r = 5.7$, $t \in [100, 300]$.

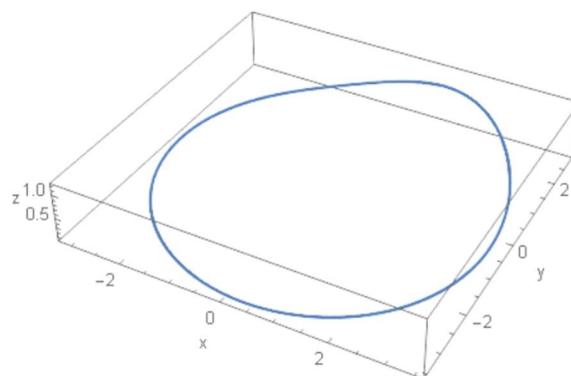


Рис. 1.3 – Фазовый портрет системы Ресслера (1.1) при $a = 0.11$, $b = 0.2$, $r = 2.25$, $t \in [100, 300]$.

На Рис. 1.3 представлен случай, в котором результатом будет периодический аттрактор, с новыми выбранными значениями управляющих параметров. Этот тип аттрактора характеризуется тем, что система возвращается к одному и тому же состоянию через определенные промежутки времени, демонстрируя периодическое повторение своего движения.

Глава 2. Исследование топологических особенностей сложных сетей

Сложными сетями (*complex networks*) называют большие сети – сети с очень большим количеством узлов (десятки тысяч и более). Математическим аппаратом исследования сетей традиционно является теория графов [8]. Впервые модели случайных графов (*random graph*) были представлены венгерскими математиками П.Эрдешем и А.Реньи в 1959 году. Случайная сеть, – это тип случайной сети, которая генерируется при жестко заданном количестве узлов сети и, в первом случае, по заданному количеству связей в сети, в другом – по параметру, который задает вероятность наличия связи между двумя узлами.

Безмасштабная сеть или масштабно-инвариантная сеть (*scale-free network*) — граф, в котором степени вершин распределены по степенному закону. Термин «безмасштабный» исходит из того факта, что это распределение настолько экстремально, что приближается к экспоненциальному распределению. Самым ранним опубликованным примером сети без масштабирования, вероятно, является сеть цитирования Прайса [9] между научными работами.

В 1998 году Дункан Уоттс и Стивен Строгац опубликовали в журнале Nature статью «Коллективная динамика сетей «малого мира» [10], в которой предлагалось объяснение феномена малого мира (*small-world network*). Авторы исследовали регулярные и случайные графы, показав, что ни одна из этих моделей не является хорошей моделью социальных сетей. Их целью было создание генеративной модели социальной сети, которая объясняла бы явление «малого мира». Они предложили процесс построения модели, которая начинается с создания одномерной регулярной решетки, состоящей из N вершин, причем каждая из них соединена только с k ближайшими соседями. После этого каждая связь с заданной вероятностью p перебрасывалась на другую случайно выбранную вершину.

Глава 3. Сеть фазовых осцилляторов Курамото

Классическая модель Курамото описывает фазовую эволюцию системы осцилляторов посредством системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка [6]:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\varphi_j - \varphi_i), i = 1, \dots, N, \quad (3.1)$$

где φ – фаза i -го осциллятора; ω_i – собственная частота i -го осциллятора; i, j – номер осциллятора; K – параметр связи (*coupling parameter*), отвечающий за интенсивность связей осцилляторов друг с другом; N – количество осцилляторов в ансамбле.

Для диагностики наличия или отсутствия синхронизации в сети часто используется параметр порядка (*order parameter*), определяемый с помощью следующего соотношения:

$$R e^{i\psi} = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N e^{i\omega_l}, \quad (3.2)$$

где R – глобальный параметр порядка; ω_l – фаза осциллятора; ψ – средняя фаза осцилляторов в ансамбле; N – количество осцилляторов в ансамбле. Этот параметр варьируется от 0 до 1, где 0 соответствует полностью асинхронному режиму, а 1 — полностью синхронному режиму.

В рамках выполнения выпускной квалификационной работы была написана программа в Wolfram Mathematica, решающая систему дифференциальных уравнений, описывающих сеть осцилляторов Курамото (3.1).

Топология сети, где каждый осциллятор связан с каждым в осцилляторах Курамото, относится к особому типу сетей, используемых в теории синхронизации колебательных систем, что означает полную связность между всеми узлами сети. Для подходящей силы связи осцилляторы синхронизируются, как показано на рисунке 3.1, при этом разности фаз осцилляторов остаются постоянными с течением времени.

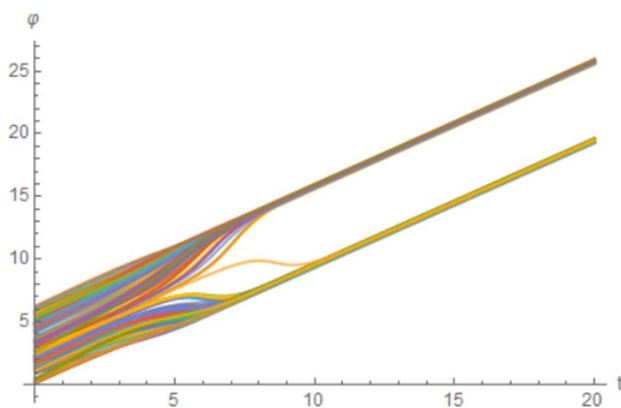


Рис. 3.1 – Зависимость $\varphi(t)$ для параметра $K = 1.5$. Синхронизация осцилляторов при $N=100$.

Для численного моделирования случайной сети модель Курамото была переписана в следующем виде [6]:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = \omega_i + \lambda \sum_{j=1}^N A_{ij} \sin(\varphi_j - \varphi_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.3)$$

где λ – параметр связи, ω_i – собственная частота i -го осциллятора и A_{ij} – элементы матрицы связей A , определяющей топологию сложной сети.

В рамках выполнения работы была написана программа в Wolfram Mathematica, решающая систему дифференциальных уравнений, описывающих сеть осцилляторов Курамото (3.3), с топологией связей между элементами типа «случайная сеть». Каждый осциллятор стремится колебаться независимо, но связь между ними стремится синхронизовать их так, чтобы все осцилляторы колебались с одинаковой частотой:

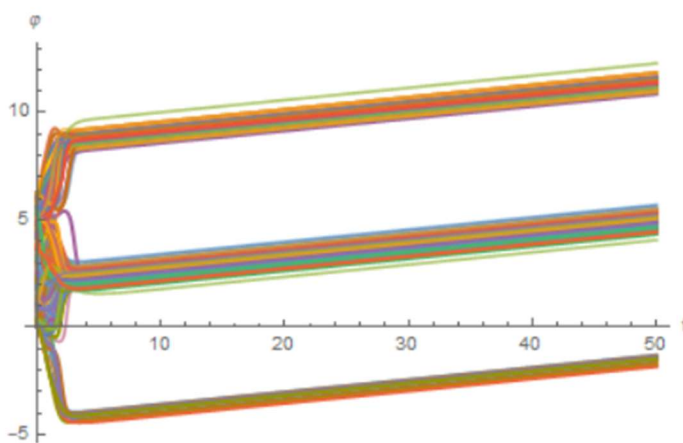


Рис. 3.2 – Зависимость $\varphi(t)$ для параметра $K = 1.0$. Синхронизация осцилляторов при $N = 500$.

В рамках выполнения работы была написана программа в Wolfram Mathematica, решающая систему дифференциальных уравнений (3.3), описывающих сеть осцилляторов Курамото, с топологией связей между элементами типа «малый мир».

Программа смоделировала график динамики фазовых переменных с течением времени, который показывает эволюцию фазовых переменных во времени и иллюстрирует наличие полностью синхронного состояния в сети при значении параметра связи $K=1$:

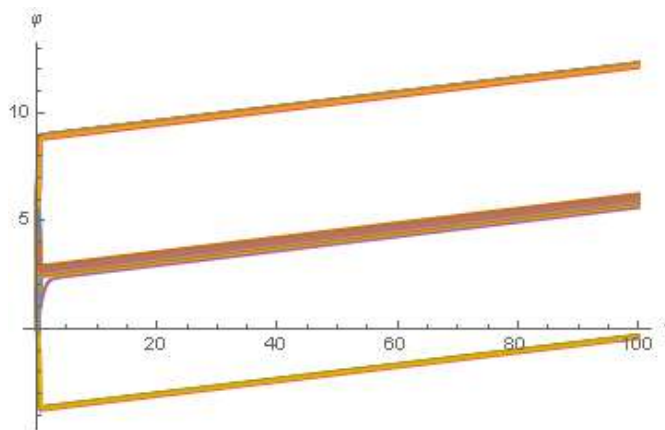


Рис. 3.3— Зависимость $\varphi(t)$ для параметра $K = 1.0$. Синхронизация осцилляторов при $N = 500$, $k = 1$ и $p = 0.1$.

Глава 4. Численное моделирование и анализ поведения ансамбля осцилляторов Ресслера

В рамках выполнения работы была написана программа в Wolfram Mathematica, решающая систему дифференциальных уравнений (1.1), описывающих ансамбль фазовых осцилляторов Ресслера со случайной связью. Попарно было взято $N = 5$ осцилляторов, глобальный параметр связи $K = 0.1$ со значениями управляющих параметров: $a = 0.2$, $r = 5.7$, $b = 0.2$.

Для того чтобы понять, происходит ли в нашей системе синхронизация, нужно использовать способ введения фазы как угла в полярной системе координат [11]:

$$\varphi = (-1)^k \arctg \frac{y}{x} + \pi k, k = 0, 1, \dots, \quad (4.1)$$

где слагаемое πk обеспечивает формирование полного угла вращения для данной фазы, тогда φ бесконечно возрастает. После этого производится деление на интервалы, лежащие в пределах $[0; 2\pi]$.

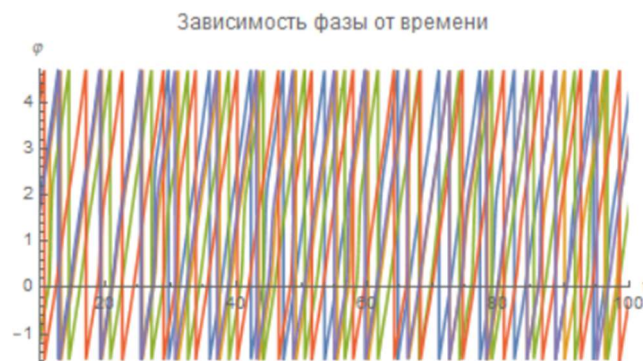


Рис. 4.1 – Зависимость $\varphi(t)$ для $N = 5$ осцилляторов.

На данном этапе, визуально по рисунку 4.1 определить существование синхронного или асинхронного состояния в системе нельзя, поэтому необходимо рассмотреть разность фаз $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$.

Для рассматриваемой сети (ансамбля) из пяти осцилляторов Ресслера со слегка различающимися значениями управляющих параметров для двух произвольно выбранных осцилляторов, была рассмотрена зависимость от времени разности фаз $\varphi_1 - \varphi_2$ этих осцилляторов при нулевом ($K = 0.00$) значении параметра связи осцилляторов в сети.

Значения управляющих параметров были заданы следующим образом:

$$a = \{0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2\}, b = \{0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2\}, c = \{3.7, 3.8, 3.9, 4.0, 4.1\}, x_0 = \{0.12, 0.14, 0.16, 0.18, 0.2\}, K = 0.00;$$

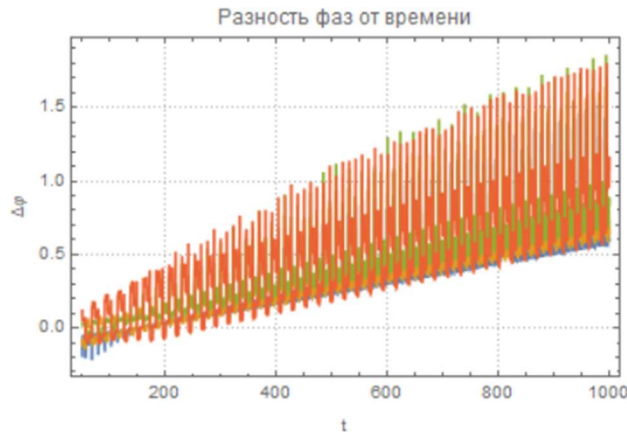


Рис. 4.2 – Зависимость $\Delta\varphi(t)$ ансамбля осцилляторов Ресслера при $K = 0.00$.

Исходя из рисунка 4.2, был сделан вывод о том, что разность фаз $\varphi_1 - \varphi_2$ неограниченно нарастает с течением времени при малом значении параметра связи ($K = 0.00$). Это указывает на отсутствие синхронизации между осцилляторами.

Точно так же была рассмотрена разность фаз $\varphi_1 - \varphi_2$ при значениях управляющих параметров заданными следующим образом:

$$a = \{0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2\}, b = \{0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2\}, c = \{3.7, 3.8, 3.9, 4.0, 4.1\}, x_0 = \{0.12, 0.14, 0.16, 0.18, 0.2\}, K = 0.08;$$

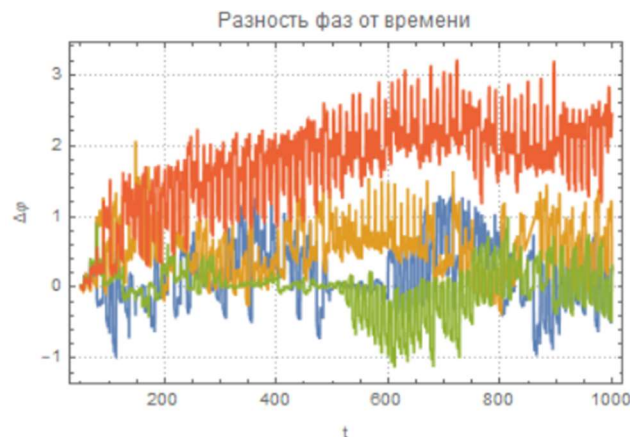


Рис. 4.3 – Зависимость $\Delta\varphi(t)$ ансамбля осцилляторов Ресслера при $K = 0.08$.

Исходя из рисунка 4.3, был сделан вывод, что разность фаз $\varphi_1 - \varphi_2$ остается ограниченной в диапазоне шириной 2π при большом значении параметра связи ($K = 0.08$). Это указывает на синхронизацию выбранных осцилляторов.

Заключение

Изучение колебательной динамики сложных систем представляет собой важный аспект в современной науке и технике. Понимание колебательных процессов в сложных системах имеет решающее значение для различных областей.

В данной выпускной квалификационной работе изучалась колебательная динамика сложных систем с использованием пакета компьютерной алгебры Wolfram Mathematica. Этот пакет предоставил мощные инструменты для решения дифференциальных уравнений, построения графиков и проведения анализа.

Особое внимание уделялось системе Ресслера, топологическим особенностям сложных сетей и сетям осцилляторов Курамото. Исследование выявило взаимосвязи между этими тремя темами, демонстрируя, как они вместе могут предоставить ценную информацию о поведении сложных систем.

Список использованных источников

- [1] Strogatz S. H. Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering. – CRC press, 2018. - URL: <https://doi.org/10.1201/9780429492563>
- [2] Berthier L. et al. Spontaneous and induced dynamic fluctuations in glass formers. I. General results and dependence on ensemble and dynamics //The Journal of chemical physics. – 2007. – Т. 126. – №. 18. - URL: <https://doi.org/10.1063/1.2721554>
- [3] Moullia B., Douady S., Hamant O. Fluctuations shape plants through proprioception //Science. – 2021. – Т. 372. – №. 6540. – С. eabc6868.
- [4] Sato K. et al. On the relation between fluctuation and response in biological systems //Proceedings of the National Academy of Sciences. – 2003. – Т. 100. – №. 24. – С. 14086-14090.
- [5] Кузнецов С. П. Динамический хаос //Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. – 2002. – Т. 10. – №. 1-2. – С. 77.
- [6] Касаткин Д. В., Емельянова А. А., Некоркин В. И. Нелинейные явления в осцилляторных сетях Курамото с динамическими связями //Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. – 2021. – Т. 29. – №. 4. – С. 635-675.
- [7] Park J. H. Adaptive synchronization of Rossler system with uncertain parameters //Chaos, Solitons & Fractals. – 2005. – Т. 25. – №. 2. – С. 333-338.
- [8] Gould R. Graph theory// Dover Publications – Courier Corporation, 2012.
- [9] Модель Прайса - Price's model, Википедия [Электронный ресурс]. - URL: https://wiki5.ru/wiki/Price%27s_model
- [10] Watts D. J., Strogatz S. H. Collective dynamics of ‘small-world’ networks //nature. – 1998. – Т. 393. – №. 6684. – С. 440-442.
- [11] Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление //Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. – 2003. – Т. 11. – №. 3. – С. 195-201.