

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра дискретной математики и информационных технологий

**ИНФОРМАЦИОННАЯ (АВТОМАТНАЯ) МОДЕЛЬ
ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 421 группы
направления 09.03.01 — Информатика и вычислительная техника
факультета КНиИТ
Джашитова Алексея Алексеевича

Научный руководитель
доцент, к. ф.-м. н.

Л. Б. Тяпаев

Заведующий кафедрой
доцент, к. ф.-м. н.

Л. Б. Тяпаев

Саратов 2024

ВВЕДЕНИЕ

Первые работы положившие начало p -адическому подходу к квантовой механике - статьи П. Г. О. Фройнда, Э. Витте и И. В. Воловича - появились в 1987 году, после чего он начал активно развиваться. Важную роль в нем играют 1-Липшицевые функции - детерминированные автоматы - они непрерывны относительно p -адической метрики и могут быть представлены в виде аналитической функции. "Посмотреть" на них позволяют предельные графики автоматов.

Базовым понятием в квантовой механике является волновая функция, согласно информационной (автоматной) модели она представляет из себя конечный детерминированный автомат, предельный график которого - это набор предельных графиков аффинных функций с рациональными p -адическими целыми коэффициентами, а они, в свою очередь, являются обмотками тора. После проведения экспериментов возникает проблема аппроксимации полученных измерений, т.е. необходимость подобрать такой детерминированный автомат, который дает наиболее близкие к исходным данным значения. Это можно сделать сравнив измерения с предельным графиком автомата.

Целью бакалаврской работы является создание программы для построения предельных графиков аффинных автоматов. Для достижения цели необходимо решить следующие задачи:

- изучить материал по p -адической квантовой механике;
- разработать программу для построения предельных графиков аффинных автоматов.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В первой главе происходит описание понятия основных понятий и математический аппарат интерпретации квантового формализма.

Понятие p -адического числа было введено в 1897 году Куртом Гензелем. Оно опирается на p -адическую норму $|\cdot|_p$, определяемую следующим образом: если $x = 0$, то $|\cdot|_p = 0$, иначе, если рассмотреть число $x = \frac{a}{b}p^v$ ($a \not\equiv 0 \pmod{p}$ и $b \not\equiv 0 \pmod{p}$), тогда $|x|_p = p^{-v}$. $|\cdot|_p$ порождает p -адическую метрику $|x - y|_p$. Согласно теореме Островского[1] существуют только 2 возможные нормы на поле \mathbb{Q} рациональных чисел - вещественная норма и p -адическая норма, тогда из \mathbb{Q} , аналогичным получению поля \mathbb{R} вещественных чисел способом, рождается поле \mathbb{Q}_p p -адических чисел.

На \mathbb{Z}_p определена вероятностная мера Хаара μ , элементарными измеримыми объектами которой являются шары $B_{p^{-r}}(a) = \{b \in \mathbb{Z}_p : b \equiv a \pmod{p^r}\}$, где a - центр шара ($a \pmod{p^r}$ - редукция числа a по модулю p^r - фактически получение первых r его элементов), мера такого шара $\mu(B_{p^{-r}}(a)) = p^{-r}$.

Детерминированный автомат (ДА) представляет из себя $(\Sigma, O, S, s_0, \delta, \phi)$ [2], где:

- Σ - входной алфавит,
- O - выходной алфавит,
- S - множество состояний,
- s_0 - начальное состояние,
- $\delta : \Sigma \times S \rightarrow S$ - функция переходов,
- $\phi : \Sigma \times S \rightarrow O$ - функция выхода.

Σ (или O) можно рассматривать как множество вычетов по модулю n (m для O), где n (m) - размер алфавита (для этого можно пронумеровать все символы числами от 0 до $n - 1$). Т.к. автомат может преобразовывать бесконечные влево строки, то при $m = n = p$ (p - простое) он становится преобразователем \mathbb{Z}_p в \mathbb{Z}_p .

Если ДА может быть преобразователем \mathbb{Z}_p в \mathbb{Z}_p , тогда существуют автоматные функции $f : \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_p$. В 1969 году в [3] была доказана (в иной формулировке) следующая теорема: "Функция $f : \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_p$ автоматна тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию Липшица с константой 1 (функция 1-Липшицева), т.е. $|f(x) - f(y)|_p \leq |x - y|_p$ ".

Динамическая система это тройка[4] (S, μ, f) , где S - измеримое про-

странство с мерой μ , а $f : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$ есть измеримая функция, определенная и принимающая значения на \mathbb{S} . f -прообраз каждого измеримого множества измерим.

Интерпретация квантового формализма[5] исходит из 4х основных постулатов. Из работ И. В. Воловича[6] берутся постулаты:

- 1) В природе наблюдаются только рациональные числа.
- 2) Величины меньше планковских не измеримы.
- 3) Фундаментальные физические законы должны быть инвариантны относительно числового поля.

Из работы Г. 'т Хоофта "The Cellular Automaton Interpretation of Quantum Mechanics"[7] берется последний постулат: на фундаментальном уровне в природе не существует случайности, любое событие происходит по какой-либо причине.

Из них следует, что время дискретно, при этом согласно текущим физическим представлениям о вселенной существует начало времени, значит время можно представить в виде \mathbb{N}_0 . Т.о. на физическом микроуровне в дискретные моменты времени происходят события, которые можно назвать элементарными, их можно разделить на элементарные причины (elementary causes) и элементарные следствия (elementary effects). Формально это можно представить в виде функции f - причинной функции (causal function) - удовлетворяющей следующим условиям:

- 1) f преобразует все последовательности $a = (a_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ в $b = (b_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$, $a_i \in A$, $b_i \in B$, где B - элементарные следствия, A - элементарные причины.
- 2) Если $f(a) = (b_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$, тогда b_i не зависит от a_{i+1}, a_{i+2}, \dots для всех $i \in \mathbb{N}_0$. Такие функции можно считать ДА. Если принять, что $\#A = \#B = p$ (p - простое, $\#\cdot$ - мощность множества), то причинные функции являются 1-Липшицевыми функциями на \mathbb{Z}_p .

На основе этого определения можно сформулировать условия для функции, удовлетворяющей постулатам Воловича и постулату 'т Хоофта. Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывная вещественная функция.

- 1) Ограничение $f|_{\mathbb{N}_0}$ должно быть причинной функцией над дискретным временем \mathbb{N}_0 . Т.е. должно удовлетворять условию Липшица с константой 1: $|f(x) - f(y)|_p \leq |x - y|_p$, где $x, y \in \mathbb{N}_0$, для каждого простого p .

2) Т.к. \mathbb{N}_0 всюду плотно в \mathbb{Z}_p (для каждого простого p), тогда существует $f_p : \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_p$ расширение $f|_{\mathbb{N}_0}$ в \mathbb{Z}_p . Чтобы быть неизменной относительно изменения поля f должна принимать значения на $\mathbb{Z}_p \cap \mathbb{Q}$ (оно всюду полно в \mathbb{Z}_p и в \mathbb{R}) и $f|_{\mathbb{Z}_p \cap \mathbb{Q}}(r) = f_p|_{\mathbb{Z}_p \cap \mathbb{Q}}(r)$, для любого $r \in \mathbb{Z}_p \cap \mathbb{Q}$.

Классом функций, удовлетворяющим этим условиям, является класс полностью согласованных функции (totally consistent functions) $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.

Но этот класс накладывает слишком сильные ограничения на функцию, т.к. условия должны выполняться для всех p , т.к. по физическим причинам число элементарных событий не может быть бесконечно большим, значит оно не превосходит некоторого p . Класс функций, которые удовлетворяют условиям причинности для заданного p - это p -согласованные функции (p -consistent functions) $\mathcal{C}_p(\mathbb{R})$.

Функции из $\mathcal{C}_p(\mathbb{R})$ существуют в архимедовом и в неархимедовом пространстве одновременно, так как $\mathbb{Z}_p \cap \mathbb{Q}$ всюду плотно в \mathbb{R} (относительно архимедовой метрики) и в \mathbb{Z}_p (относительно неархимедовой метрики), а ряд Малера для них сходится относительно обоих метрик.

Любая конечно-автоматная функция (автоматная функция, для которой существует эквивалентный ей ДА с конечным числом состояний) $f \in \mathcal{C}_p^\infty(\mathbb{R})$ является аффинной функцией $f(x) = ax + b$, при $a, b \in \mathbb{Z}_p \cap \mathbb{Q}$.

Пусть $f_A = \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_p$ автоматная функция, пусть ее ДА будет A , совокупность $\mathcal{P}(f_A) = \mathcal{P}(A)$ всех

$$e_k^f = \left(\frac{z \bmod p^k}{p^k}, \frac{f_A(z) \bmod p^k}{p^k} \right),$$

$k \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{Z}_p$ на единичном квадрате $[0, 1] \times [0, 1] = \mathbb{I}^2 \subset \mathbb{R}^2$ называется графиком (plot) автомата A (автоматной функции f_A). $\mathcal{P}'(f_A) = \mathcal{P}'(A)$ называется предельным графиком (limit plot) и состоит из всех пределов графика $\mathcal{P}(f_A) = \mathcal{P}(A)$, поэтому $\mathcal{P}'(f_A)$ является закрытым множеством, это означает, что он имеет меру Лебега на \mathbb{R}^2 $\alpha(A) = \alpha(f_A)$.

Фактически предельный график автомата позволяет "посмотреть" на автомат для функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f \in \mathcal{C}_p(\mathbb{R})$. Такой график можно построить взяв все значения функции по модулю 1.

Согласно теореме: "Для произвольного автомата A справедливо следующее: либо $\alpha(f_A) = 0$, либо $\alpha(f_A) = 1$ ", при $\alpha(f_A) = 1$ $\mathcal{P}(A)$ всюду плотно в \mathbb{I}^2 ,

при $\alpha(f_A) = 0$ - не плотно в \mathbb{I}^2 . Т.о. предельный график автомата представляет из себя или полностью заполненный квадрат в случае, если он единичной меры, или какой-либо "рисунок" в ином случае. На рисунке 1 представлен график автомата $z \rightarrow 5z$, имеющий $\alpha(f_A) = 0$, а на рисунке 6 представлен его предельный график.

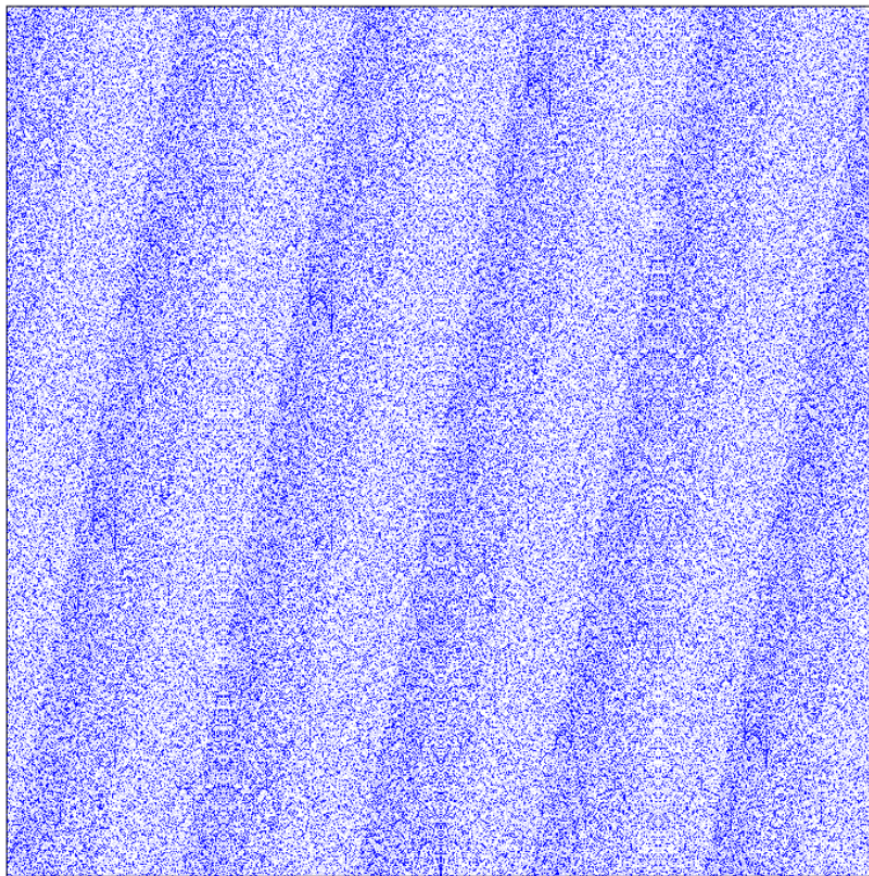


Рисунок 1 – График автомата $z \rightarrow 5z$

Предельный график $\mathcal{P}'(f)$ аффинной функции $f : z \rightarrow az + b$ на \mathbb{Z}_p , где $a, b \in \mathbb{Z}_p \cap \mathbb{Q}$ - несократимые дроби $a = \frac{c}{d}$, $b = \frac{c'}{d'}$ и $c, d, c', d' \in \mathbb{Z}$, $a, d, d' \equiv 0 \pmod{p}$, на торе \mathbb{T}^2 представляет собой зацепление N торических узлов и каждый торический узел является обмоткой тора[8]. $N = mult_n p$, где $n = \frac{d'}{\text{НОД}(d, d')}$, и $N = 1$, если $\frac{d'}{n} = 1$. Каждая обмотка тора является графиком комплексной функции $\psi(\rho, k) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ на \mathbb{T}^2 для $k = 0, 1, \dots, mult_n p - 1$, где $\psi(\rho, k) = e^{i(a\rho - 2\pi p^k b)}$, $\rho \in \mathbb{R}$. На рисунке 3 представлен график обмоток на поверхности тора.

Любой аффинный автомат $A_{a,b}$ (эквивалентный функции $f(x) = ax + b$) имеет, в силу конечности, минимальные подавтоматы. Последовательность, полученная во время пути до минимального автомата, является префиксным

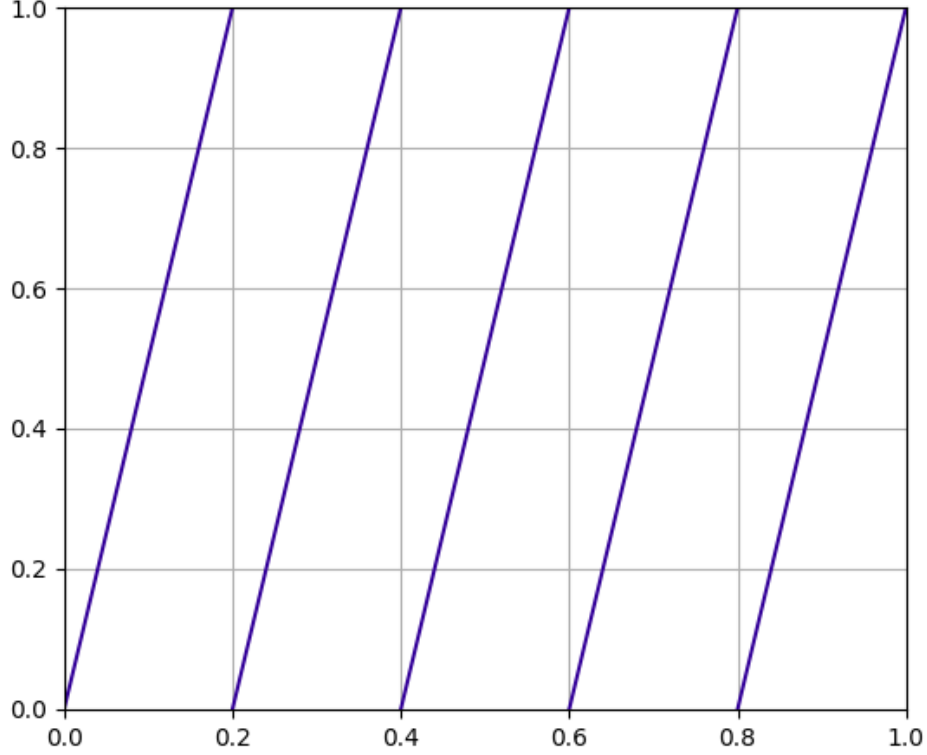


Рисунок 2 – Предельный график автомата $z \rightarrow 5z$

кодом и определяет каждый такой подавтомат. Так как префиксный код у всех слов попавших в один автомат одинаков, то они ограничены некоторым шаром (или объединением нескольких шаров) $\mathbf{B}(A')$ (A' - произвольный подавтомат $A_{a,b}$) ненулевого радиуса, и если l - длина общего префикса, то радиус будет p^{-l} . $\mathbf{B}(A')$ имеет меру Хаара, которую можно принять за вероятность попадания в A' .

Пусть $Spec(A)$ - множество всех классов эквивалентности порожденных минимальными подавтоматами A , тогда

$$\Psi_A(\rho, k) = \sum_{[A_{a,b}] \in Spec(A)} q_{[A_{a,b}]} e^{i(a\rho - 2\pi p^k b)}, \rho \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z},$$

$\Psi_A(\rho, k)$ - точная волновая функция (sharp wave function), абсолютно сходящийся ряд.

Непрерывная волновая функция строится на основе β -представлений вещественных чисел[9]. β -представление числа $b \geq 0$ это последовательность $\chi_0 \chi_1 \dots$, при $\chi_i \in \mathcal{B} = \{0, 1, \dots, [\beta]\}$, такая, что $b = \sum_{j=-k}^{\infty} \chi_{j+k} b^{-j-k}$. Если рассмотреть автоматы на \mathcal{B} , при $\beta = 1 + \tau, 0 < \tau \ll 1$, рассмотрим $\beta^k =$

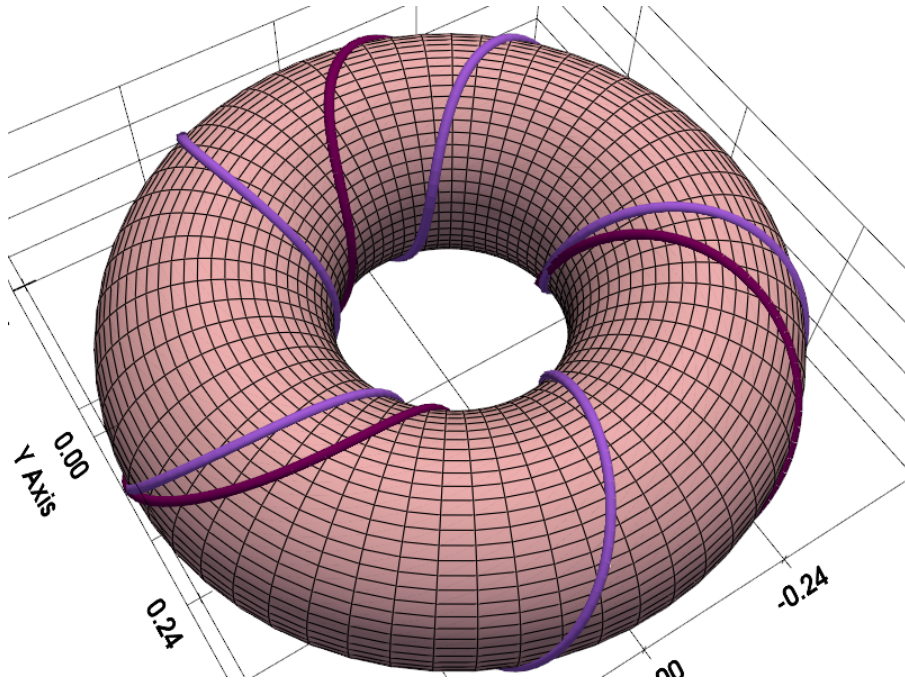


Рисунок 3 – График обмоток на поверхности тора

$(1 + \tau)^k \approx 1 + k\tau, t = k\tau$, существует

$$\Psi_A(\rho, k) = \sum_{[A_{a,b}] \in \text{Spec}(A)} q_{[A_{a,b}]} e^{i(a\rho - 2\pi tb)}, \rho, t \in \mathbb{R},$$

такая $\Psi_A(\rho, k)$ называется грубой волновой функцией (fuzzy wave function). Параметр t можно интерпретировать как непрерывное время. При переходе от дискретного времени к непрерывному пропадает параметр p , хотя алфавит и состоит из 0 и 1, т.е. наблюдатель из микромира и наблюдатель из макромира видят различные представления одних и тех же чисел.

Грубая волновая функция соответствует автомату с алфавитом из 2^N символов - $f : \mathbb{Z}_2^N \rightarrow \mathbb{Z}_2^N$ или $\mathbb{Z}_2(\sqrt[N]{2}) \rightarrow \mathbb{Z}_2(\sqrt[N]{2})$, где $\mathbb{Z}_2(\sqrt[N]{2})$ - кольцо целых чисел поля $\mathbb{Q}_2(\sqrt[N]{2})$.

В многомерном случае точная волновая функция $\Psi_A(\rho, k)$ выглядит:

$$\Psi_A(\vec{x}, k) = \sum_{[A_{A, \vec{b}}] \in \text{Spec}(A)} q_{[A_{A, \vec{b}}]} e^{i(A\vec{x} - 2\pi p^r b)}, x \in \mathbb{R}^m, b \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{Z},$$

где A - матрица $m \times n$. Из этого следует, что одномерная грубая волновая функция является многомерной точной волновой функцией.

Т.о. наблюдателя из микромира события (и время) предстают в дискретном виде, для наблюдателя из макромира в непрерывном. Предельные аффинные автоматы меры 0 можно рассматривать как модели физических систем, имеющих дискретные спектры, а предельные аффинные автоматы меры 1 можно рассматривать как модели физических систем, имеющих непрерывные спектры.

Во второй главе происходит описание реализации программы отрисовки предельных графиков аффинных автоматов.

Программа рассчитана на рисование графиков линейной функции с рациональными целыми 2-адическими коэффициентами. Пользователь вводит коэффициенты, точность и получает представление коэффициентов в 2-адическом виде, информацию о количестве обмоток, график на плоскости и график на торе. Пользователь может одновременно получить графики нескольких функций, добавив нужные ему в список. Интерфейс программы сразу после запуска представлен на рисунке 11. Программа разделена на несколько модулей:

- `function` - содержит инструменты для анализа функции;
- `widgets` - содержит средства ввода и вывода информации;
- `graph` - содержит средства визуализации;
- `mainwindow` - отвечает за взаимодействие модулей и общий вид приложения;
- `main` - отвечает за запуск приложения.

иджетами для взаимодействия с пользователем в `MainWindow` являются элементы модуля `widgets`, они наследуются от `QWidget` - стандартного шаблона для создания других виджетов. Это виджеты:

- 1) `FunctionWidget` - наследуется от `QWidget`, с его помощью пользователь вводит коэффициенты линейной функции и получает о ней информацию.
- 2) `WidgetsContainer` - наследуется от `QWidget`, его главная задача хранить в себе коллекцию из виджетов заданного типа, которые выводятся вертикально сверху-вниз, начиная с первого, и на равном расстоянии друг от друга.

Пользователь может взаимодействовать с программой следующими способами:

- ввести значение точности вычислений;
- нажать на кнопку add - добавить функции;
- нажать на кнопку draw - нарисовать графики функций;
- ввести коэффициенты для каждой функции.

На рисунке 4 приведен скриншот результата работы программы для функций $f(x) = x + 1$ и $f(x) = \frac{3}{5}x + \frac{1}{3}$. Нажатие на кнопку draw запускает отрисовку

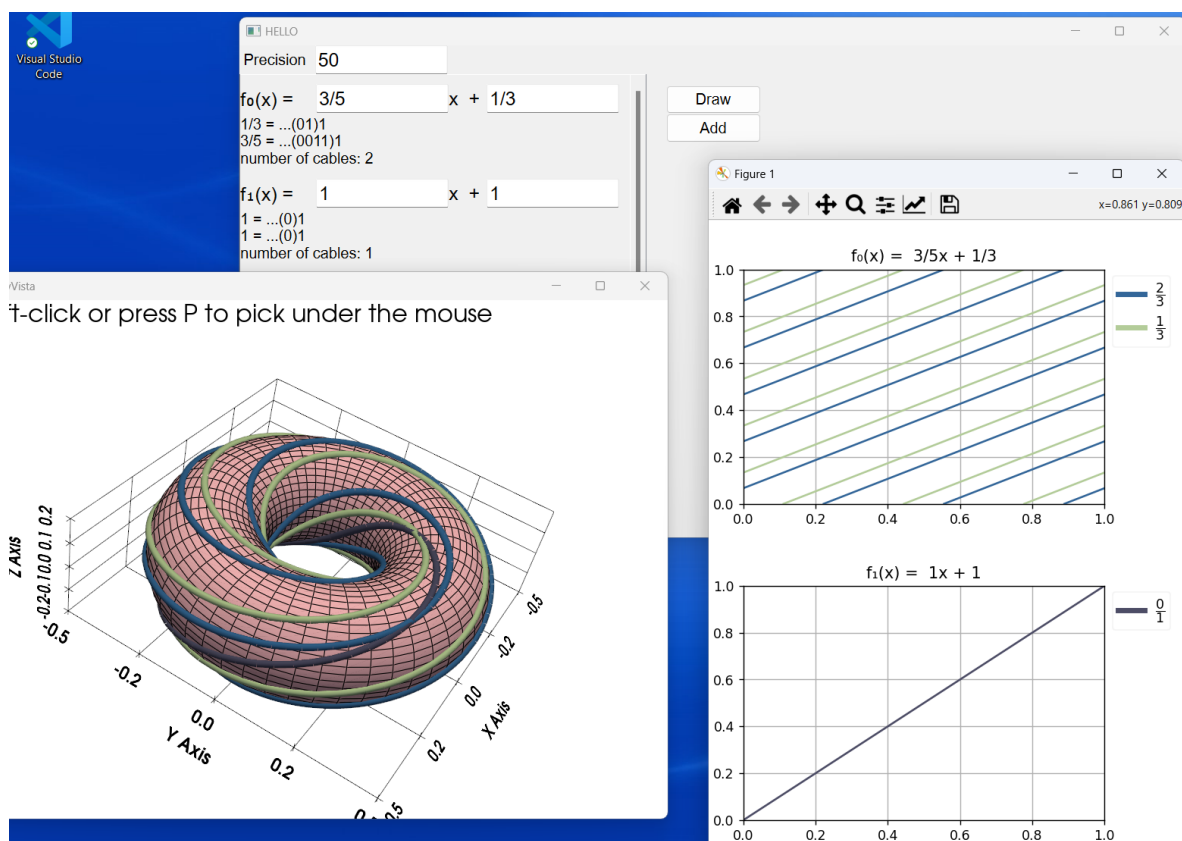


Рисунок 4 – Скриншот результата работы программы для функций $f(x) = x + 1$ и $f(x) = \frac{3}{5}x + \frac{1}{3}$

графиков, по следующему алгоритму:

- закрываются графики после предыдущего запуска;
- из общего количество функций вычисляется, количество графиков на плоскости по вертикали и горизонтали;
- формируется поверхность тора для трехмерного графика;
- проверяется точность и значения текущей функции на корректность;
- если значения функции не введены, значит для нее не будет отрисован график;
- если значения функции введены, то заполнить поле информации текущего виджета FunctionWidget с помощью LinearFunction;

- с помощью `LinearFunction` - вычисляются точки предельного графика на плоскости ;
- с помощью `Graph.generatecolors()` генерируются цвет для каждой обмотки;
- с помощью `Graph.drawcables()` рисуются обмотки на торе для текущей функции;
- формируется аннотация со всеми свободными коэффициентами текущей функции;
- с помощью `Graph.drawlineplot()` - формируется двумерный график текущей функции;
- происходит переход к следующей функции, если функции закончились, то выводится общий трехмерный график и окно с двумерными графиками.

За анализ функции отвечает класс `LinearFunction`. Он используется для:

- преобразования введенных (в виде рациональных чисел) коэффициентов к 2-адическому виду;
- получения количества обмоток;
- получения точек функции на плоскости.

За построение предельного графика функции на торе и на плоскости отвечает класс `Graph`. Для отрисовки графика на плоскости используется библиотека `matplotlib`[10], для отрисовки на торе - `PyVista`. На рисунке 25 изображены предельные графики на плоскости.

Для отрисовки обмоток используется функция `Graph.drawcables()`, она получает на вход массив с точками каждой из обмоток и массив из цветов в формате RGB, по цвету на каждую обмотку, и преобразовывает точки по формуле (*). Предельный график функции на торе представлен на рисунке 28. Код функции, рисующей обмотку приведен ниже.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В процессе создания бакалаврской работы был изучен необходимый материал по p -адической квантовой механике и написана программа, позволяющая строить предельные графики аффинных автоматов.

Согласно информационной (автоматной) модели волновой функции она представляет из себя конечный детерминированный автомат. Предельный график любого такого автомата представляет из себя объединение предельных графиков аффинных функций. Если результаты физических экспериментов представить в виде пары вход-выход, то их можно сравнить с предельным графиком автомата, тем самым помогая определить насколько хорошо конкретный автомат подходит для аппроксимации измерений.

С помощью разработанной программы можно подобрать автомат, предельный график которого визуально похож на график с результатами измерений. Программа написана на языке Python 3.12.

Основные источники информации:

1. Н. Коблиц. p -адические числа, p -адический анализ и дзета-функции. // Мир, Москва, 1982.
2. В. Брауэр. Введение в теорию конечных автоматов. // Радио и Связь, Москва, 1987.
3. A. Salomaa. Theory of Automata // Pergamon Press, 1969.
4. Hasselblatt, B.; Katok, A. (Eds.) Handbook of Dynamical Systems; Elsevier Science B.V.: Amsterdam, The Netherlands, 2002; Volume 1A.
5. Anashin, V. Free Choice in Quantum Theory: A p -adic View. // Entropy 2023, 25, 830. Editor: Wilson A. Zuniga-Galindo.
6. В.С.Владимиров, И.В.Волович, Е.И.Зеленов Р-АДИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА // М.: Физматлит, 1994.—352 с.
7. Gerard 't Hooft, The Cellular Automaton Interpretation of Quantum Mechanics // In Fundamental Theories of Physics; Springer: Berlin/Heidelberg, 2016.
8. Anashin, V.S. Quantization causes waves: Smooth finitely computable functions are affine // p -Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl. 2015, 7, 169–227.
9. Rényi, Alfréd "Representations for real numbers and their ergodic properties" // 1957, Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae
10. Matplotlib Documentation // [Электронный ресурс]. - URL: <https://matplotlib.org/stable/index.html>