

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра радиофизики и нелинейной динамики

**Распространение эпидемий при наличии связей между
популяциями**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 4061 группы
направления 11.03.02 ИКТС
Института физики
Болгова Александра Сергеевича

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.н.

_____ А.В. Бух

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н., доцент

_____ Г.И. Стрелкова

ВВЕДЕНИЕ

Пандемия SARS-Cov-2 (COVID-19) вызвала очевидный исследовательский бум в области биофизического и математического моделирования распространения инфекции. Основные усилия были связаны с выявлением факторов, помогающих прогнозировать развитие пандемии, что является явной проблемой в атмосфере беспокойства и социальных ограничений¹. Среди различных типов моделей распространения инфекции особое место занимают модели SIR («восприимчивые-инфицированные-выздоровевшие», где инфицированные неотличимы от болеющих). С одной стороны, они физиологически лучше соответствуют случаю SARS-Cov-2 (COVID-19) с иммунитетом у выздоровевших в отличие от простейшего модели типа SIS («восприимчивые-инфицированные-восприимчивые»)², а с другой стороны, они предоставляют предельно прозрачную для исследования модель из трех дифференциальных уравнений по сравнению с передовыми и сложными многофакторными моделями³.

В настоящей работе представлен литературный обзор различных математических моделей распространения эпидемий в мире. В качестве актуальной на данный момент эпидемии, разбирается случай с вирусом COVID-19 и его влиянием на демографию одной или нескольких стран. Также будут приведены несколько вариаций модели SIR. Различные модификации базовой модели SIR позволяют учитывать различные факторы такие как инкубационный период, показатель распространения, степень заразности и т.д. для прогнозирования динамики распространения инфекционных заболеваний. Поскольку оригинальная модель SIR подходит для моделирования принципиального поведения вирусов типа COVID-19 наилучшим образом, настоящая модель исследована детально.

¹Fanelli Duccio, Piazza Francesco. *Chaos, Solitons & Fractals*. — 2020. — Vol. 134. — P. 109761; Chladná Zuzana, Kopfová Jana, Rachinskii Dmitrii, and Rouf Samiha C. *Journal of Mathematical Biology*. — 2020. — Vol. 80, no. 4. — P. 1209–1233; Tang Biao, Bragazzi Nicola Luigi, Li Qian, Tang Sanyi, Xiao Yanni, and Wu Jianhong. *Infectious disease modelling*. — 2020. — Vol. 5. — P. 248–255.

²Hethcote Herbert W. *SIAM review*. — 2000. — Vol. 42, no. 4. — P. 599–653.

³Barlow Nathaniel S, Weinstein Steven J. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. — 2020. — Vol. 408. — P. 132540.

Результаты исследований ученых в нелинейной динамике показывают, что в модели распространения инфекции SIR при изменении параметров происходят критические изменения в поведении модели (бифуркационные переходы). Переход к периодическим колебаниям можно использовать для интерпретации периодического поведения при некоторых инфекционных заболеваниях. В работе подробно исследуется поведение модели SIR численно и аналитически. Аналитически найдены состояния равновесия и проанализирован характер их устойчивости в частном случае численно. Численные исследования также проведены для выявления типичного влияния различных параметров на поведение модели. Для этого построены временные реализации, фазовые портреты, карты режимов колебательной активности и карты максимальных значений переменной, отвечающей доли инфицированных индивидумов в популяции.

Анализ взаимной динамики распространения коронавирусной инфекции между Россией, Китаем и Казахстаном показал, что существует более высокая корреляция между значительно связанными странами (Россия и Казахстан), чем между слабо связанными странами (Россия и Китай). Это показывает важность исследования взаимосвязанных моделей распространения эпидемий. В настоящей работе составлена компартментная модель для двух связанных стран и проведены численные исследования для нее. В продолжение настоящей работы представляется важным исследование взаимосвязанных моделей SIR.

Целью данной выпускной квалификационной работы было изучить различные модификации стандартной модели SIR, а также провести исследование влияния связей между популяциями на распространение эпидемий.

Для достижения целей были поставлены следующие задачи:

- 1 Провести теоретический обзор известных моделей распространения эпидемия и результатов их исследований;

2 Выполнить подробное исследование модели SIR, включая бифуркационный анализ;

3 Осуществить исследование двух связанных популяций в условиях распространения вируса методами численного моделирования.

Для выполнения поставленных задач использовалось компьютерное моделирование, которое включало в себя написание программного кода на языке C++, и визуализацию полученных данных с помощью программы Gnuplot.

Основное содержание работы

Рассмотрим более подробно модель

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= B - dS - \beta IS - \beta \mathcal{V} I^2 S + \gamma R \\ \frac{dI}{dt} &= \beta IS + \beta \mathcal{V} I^2 S - dI - \alpha I \\ \frac{dR}{dt} &= \alpha I - dR - \gamma R\end{aligned}\tag{1}$$

где B – параметр рождаемости (естественный прирост), d – параметр смертности (естественная убыль), параметры β и \mathcal{V} задают скорости линейного и нелинейного прироста инфицированных участников популяции, соответственно, параметр γ задает скорость потери иммунитета, а α – скорость приобретения иммунитета и выздоровления. В этой модели не учитывается смертность от исследуемого вируса.

Найдем состояния равновесия модели (1), для этого приравняем к нулю правые части уравнения:

$$B - dS - \beta IS - \beta \mathcal{V} I^2 S + \gamma R = 0,\tag{2}$$

$$\beta IS + \beta \mathcal{V} I^2 S - dI - \alpha I = 0,\tag{3}$$

$$\alpha I - dR - \gamma R = 0,\tag{4}$$

В ходе аналитических вычислений, при исключении тривиального решения, получаем случай

$$I_0 = \frac{\alpha - \beta S_0}{\beta \mathcal{V} S_0},\tag{5}$$

при этом

$$R_0 = \frac{\alpha}{\gamma} I_0. \quad (6)$$

Если учесть, что $I_0 + R_0 + S_0 = N$, можем составить дополнительное уравнение для равновесия:

$$\frac{\alpha - \beta S_0}{\beta \mathcal{V} S_0} \left[1 + \frac{\alpha}{\gamma} \right] + S_0 = N, \quad (7)$$

из которого следует, что для фиксированного N возможно получение не больше двух корней, отличающихся от тривиального решения $S_0 = 0, I_0 = 0, R_0 = 0$.

На рисунке 1, на фрагменте (а) приведены зависимости $I_0(S_0)$ по соотношению (5) при различных значениях \mathcal{V} и фиксированных $\beta = 0.05$ и $\alpha = 0.03$. С увеличением параметра \mathcal{V} значительно уменьшается значение I_0 при фиксированном S_0 . На фрагменте (б) представлены зависимости $R_0(I_0)$ по соотношению (6), демонстрируют, что при малых γ число выздоровевших с иммунитетом значительно увеличивается по сравнению с большими значениями γ при фиксированных значениях α .

Далее, после некоторых вычислений, проанализируем устойчивость равновесий системы (1) в частном случае $\alpha = 0.03; \gamma = 0.001; \beta = 0.05$ при изменении параметра \mathcal{V} и получим значения параметров S_0, I_0, R_0 .

$$S_0 = \frac{155 \pm \sqrt{155^2 - 1760\mathcal{V}}}{10\mathcal{V}} \quad (8)$$

также

$$I_0 = \frac{0.03 - 0.05S_0}{0.05\mathcal{V}S_0} \text{ и } R_0 = 30I_0 \quad (9)$$

Равновесие, отвечающее знаку минус в выражении (8), показано на рисунке 2 (а), равновесие, отвечающее знаку плюс не имеет смысла, поскольку переменные S, I, R должны находится в интервале $[0:1]$.

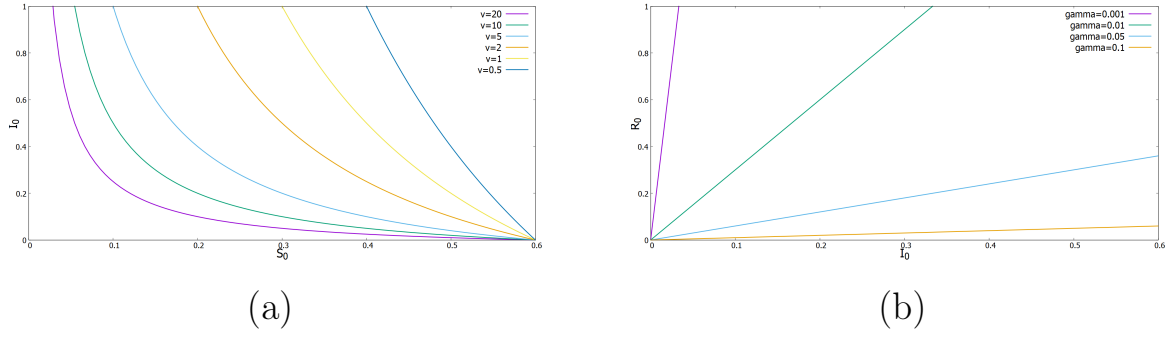


Рисунок 1 — (а) Взаимосвязь переменных для равновесных состояний при $\beta = 0.05$, $\alpha = 0.03$ и различных значениях $\mathcal{V} = 0.5; 1; 2; 5; 10; 20$. (б) Зависимости $R_0(I_0)$ для равновесий при $\alpha = 0.03$ и различных значениях γ .

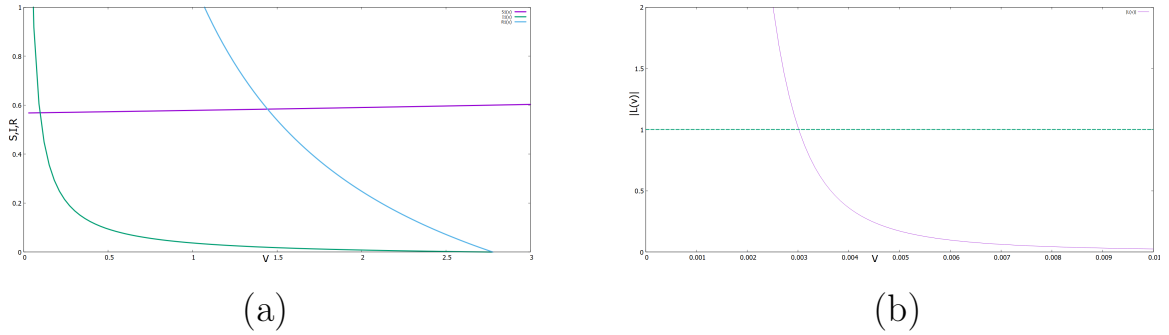


Рисунок 2 — (а) Зависимость переменных S (фиолетовая линия), I (зеленая линия), R (желтая линия) от параметра \mathcal{V} в состоянии равновесия (8). (б) Зависимость нормы (модуля комплексного значения) мультипликатора от параметра \mathcal{V} для устойчивого фокуса (8). Зеленой пунктирной линией обозначено значение 1, при котором решение становится неустойчивым по мере увеличения параметра \mathcal{V} .

После находим значения мультипликаторов

$$\lambda_{1,2} = \frac{0.05N - 0.031 \pm \sqrt{\Delta_2}}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{0.05 - 0.031 + \sqrt{4.41 * 10^{-4}}}{2} = \frac{0.019 + 0.021}{2} = 0.02$$

$$\lambda_2 = \frac{0.05 - 0.031 - \sqrt{4.41 * 10^{-4}}}{2} = \frac{0.019 - 0.021}{2} = -0.001$$

Мультипликаторы имеют разный знак, поэтому решение является седловым. Стоит здесь отметить, что устойчивость рассматриваемого тривиального решения не зависит от параметра \mathcal{V} .

Рассмотрим устойчивость решения 8 и 9, которое, в зависимости от параметра \mathcal{V} , приведено на рисунке 2 (а), на котором видно, что отличное от нуля решение существует при $\mathcal{V} < 25/9$. При $\mathcal{V} < 0.0030155$ решение представляет собой неустойчивый фокус, а при $\mathcal{V} > 0.0030155$ — устойчивый фокус (см. 2 (b)).

Эквивалентное упрощение модели SIR Компарментная модель (1) в случае $B = d = 0$ может быть сведена к эквивалентной системе из двух дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= B - dS - \beta IS - \beta \mathcal{V} I^2 S + \gamma(N - SI) \\ \frac{dI}{dt} &= \beta IS + \beta \mathcal{V} I^2 S - dI - \alpha I\end{aligned}\tag{10}$$

В данной модели не учитывается переменная R, отвечающая за выздоровевших индивидов с приобретенным, после болезни, иммунитетом.

Найдем состояния равновесия системы модели (10). Для этого приравняем первые части уравнений к нулю:

$$\begin{aligned}B - dS - \beta IS - \beta \mathcal{V} I^2 S + \gamma(N - SI) &= 0 \\ \beta IS + \beta \mathcal{V} I^2 S - dI - \alpha I &= 0\end{aligned}\tag{11}$$

В ходе вычислений, из двух решений ($I = 0$ и $I \neq 0$), находим значения параметров S и I

Первое решение при $I = 0$

$$\begin{aligned}\gamma N - \gamma S &= 0 \\ S &= \frac{\gamma N}{\gamma} = N\end{aligned}$$

Второе решение при $I \neq 0$

$$I = \frac{\alpha - \beta S}{\beta \mathcal{V} S}$$

Далее рассмотрим случай, когда: $N = 1, \mathcal{V} = 10, \alpha = 0.03, \gamma = 0.001, B = d = 0$.

Находим численное значение S при $\beta \neq 0$

$$S = \frac{205\beta \pm \sqrt{5}\sqrt{\beta(8405\beta - 186)}}{100\beta}$$

С целью анализа устойчивости состояний равновесия в модели (10), составим характеристическое уравнение и решим его, найдя корни квадратного уравнения

$$\det \begin{pmatrix} -\beta I_0 - 10\beta I_0^2 - 0.001 - \lambda & -\beta S_0 - 20\beta S_0 I_0 - 0.001 \\ \beta I_0 + 10\beta I_0^2 & \beta S_0 + 20\beta I_0 S_0 - 0.03 - \lambda \end{pmatrix} = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{D + A \pm \sqrt{D}}{2}$$

Также матрицу () можно решить с условиями $I = 0$ и $S = N = 1$ получаем два корня

$$\lambda_1 = -0.001$$

$$\lambda_2 = 0.03 - \beta$$

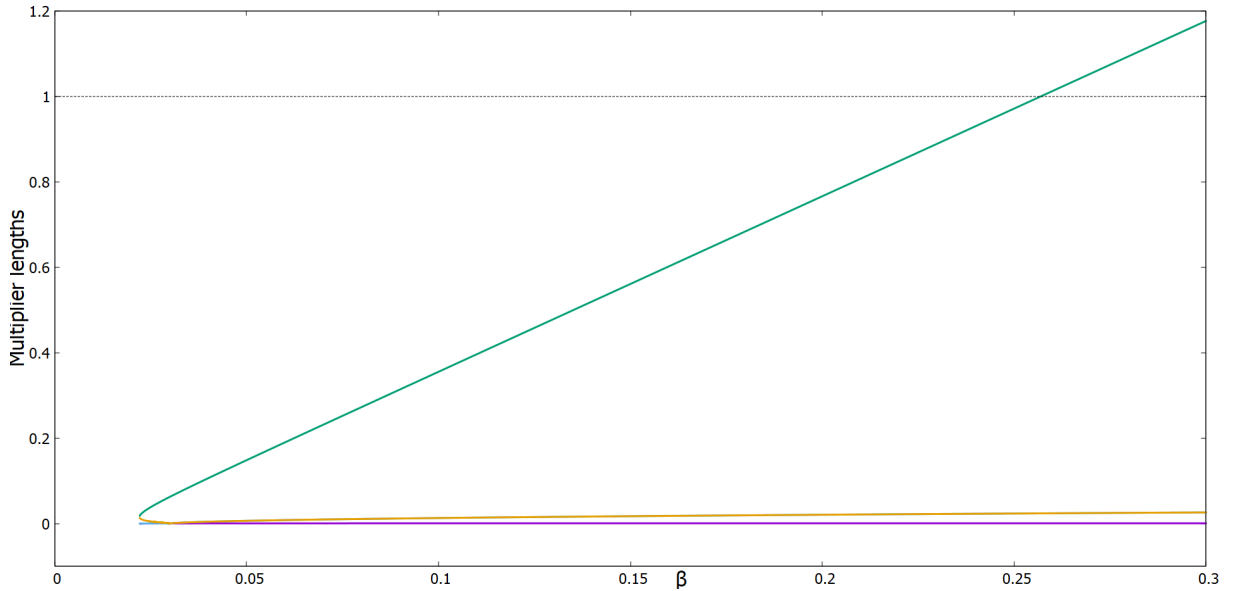


Рисунок 3 — Длины мультипликаторов системы (10) для решений $S = (205\beta + \sqrt{5}\sqrt{\beta(8405\beta - 186)})/(100\beta)$ (фиолетовая и зеленая линии) и $S = (205\beta - \sqrt{5}\sqrt{\beta(8405\beta - 186)})/(100\beta)$ (голубая и оранжевая линия) при $N = 1, \mathcal{V} = 10, \alpha = 0.03, \gamma = 0.001$ и $B = d = 0$.

На рисунке 4 продемонстрированы длины мультипликаторов для четырех решений системы 10. Фиолетовая и зеленая линии соответствуют первой паре значений мультипликаторов, голубая и оранжевая второй. Зеленая линия пересекает единицу, что соответствует точке бифуркации системы.

Таким образом, в модели SIR в отсутствие естественной динамики популяции существует всего три состояния равновесия, но смысл имеют только два из них. При этом теряет устойчивость как раз решение, не имеющее смысла, так что в исследуемой модели всегда присутствуют два устойчивых состояния равновесия, при этом численные исследования, результаты которых приведены ниже, показывают, что также в системе может наблюдаться устойчивое периодическое решение.

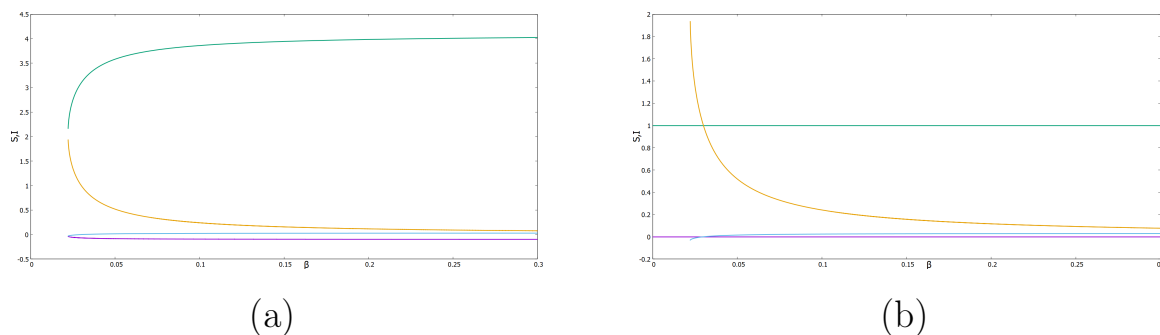


Рисунок 4 — Значения переменных S (зеленая и оранжевая линии) и I (фиолетовая и голубая линии) в состоянии равновесия $S = (205\beta + \sqrt{5}\sqrt{\beta(8405\beta - 186)})/(100\beta)$ (фиолетовая и зеленая линии на фрагменте (a)), в состоянии равновесия $S = (205\beta - \sqrt{5}\sqrt{\beta(8405\beta - 186)})/(100\beta$ (голубая и оранжевая линии на фрагментах (a) и (b)) и в состоянии равновесия $I = 0, S = N$ (фиолетовая и зеленая линии на фрагменте (b)) для системы (10).

На фрагментах (a) и (b) на рисунке 4 приведены численно построенные решения исследуемой системы (10) для различных состояний равновесия. Стоит отметить, что решения, не лежащие в отрезке $[0 : 1]$ не имеют смысла, поскольку количество лиц в одной из подгрупп не может быть отрицательным и не может превышать размера всей популяции.

В данном исследовании был взят частный случай системы, в котором $B = d = 0$. Численные результаты были получены интегрированием системы обыкновенных дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутты 4-го порядка с шагом $h = 0.01$.

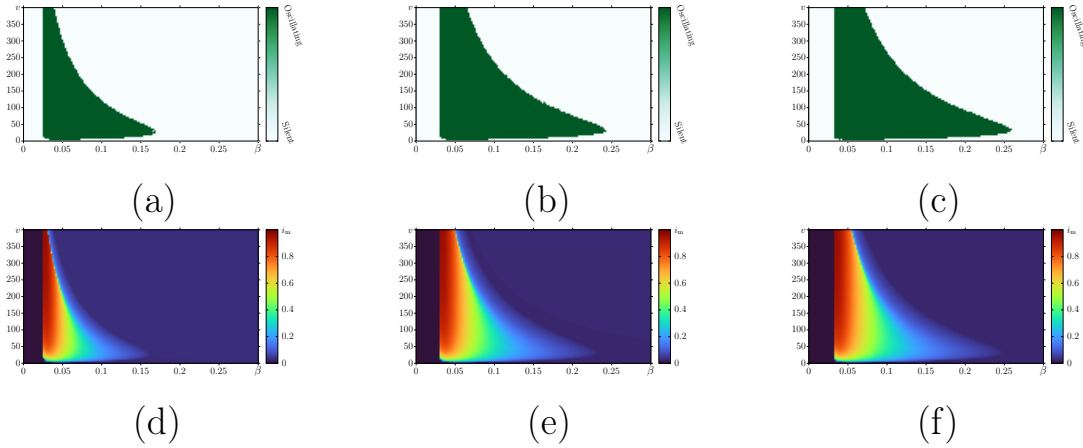


Рисунок 5 — Карты колебательной активности и максимальных значений переменной I в установившемся режиме (a-f) для модели 1 на плоскости параметров роста заболеваемости (β, \mathcal{V}) при $\alpha = 0.025$ (a,d), $\alpha = 0.03$ (b,e) и $\alpha = 0.031$ (c,f) и при $B = d = 0, \gamma = 0.001$.

На фрагментах (a,b,c) зеленым цветом на карте обозначена область, отвечающая периодическому процессу, а белым – отсутствию колебаний.

На оставшихся фрагментах (d,e,f) красный цвет определяет максимальное значение заболевших, темно – синий почти полное их отсутствие.

Карты режимов на рисунке 5 показывают, в какой области значений на плоскости параметров роста числа инфицированных (β, \mathcal{V}) в модели 1 наблюдаются колебания (зеленый цвет на фрагментах (a,b,c)), и в какой области — состояние равновесия (белый цвет). На различных фрагментах на рисунке 5 приведены карты для различных значений параметра скорости выздоровления α , сравнение которых показывает, что увеличение параметра α в рассмотренных пределах приводит к расширению области периодического режима на плоскости параметров роста заболеваемости (β, \mathcal{V}) . Для всех из рассмотренных значений параметра α существует значение параметра \mathcal{V} , при котором диапазон значений параметра β , при которых наблюдаются колебания, максимален. Однако любое изменение

параметра \mathcal{V} относительно оптимального (увеличение или уменьшение) приводит к уменьшению диапазона значений параметра β , при которых наблюдаются периодические колебания.

Карты экстремальных значений переменной I (фрагменты b, d, f на рисунке 5) удобно рассматривать совместно с картами колебательной активности (фрагменты a, c, e на рисунке 5), которые показывают, что очень высокие максимальные значения переменной $I \sim 1$ отвечают колебательному режиму в модели SIR. Вместе с тем при отсутствии колебаний значения переменной I устанавливаются на достаточно низком уровне ($I \sim 0$ в светло-фиолетовой и темно-фиолетовой областях). При этом темно-фиолетовая область отвечает отсутствию инфицированных участников популяции в установившемся режиме, а светло-фиолетовая – постоянно присутствующему небольшому количеству инфицированных участников популяции, отличному от нуля.

Таким образом, параметр \mathcal{V} позволяет управлять шириной области колебаний по параметру β , а уменьшение параметра β , вне зависимости от параметра \mathcal{V} , позволяет получить состояние равновесия, отвечающее отсутствию инфицированных в популяции.

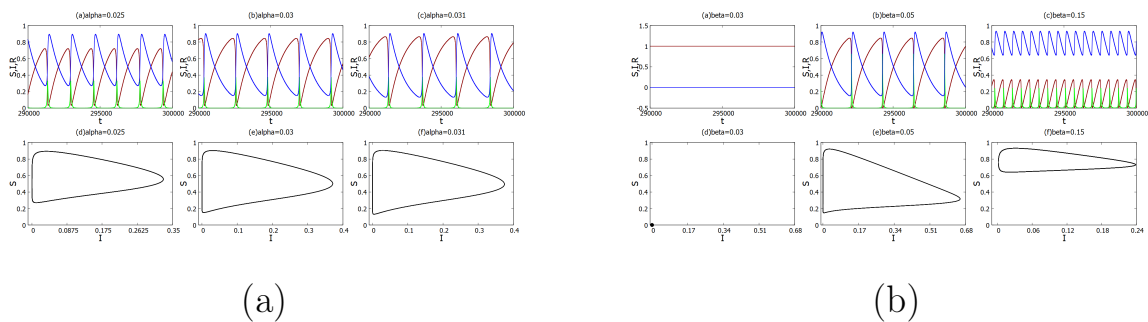


Рисунок 6 — (a) Временные реализации и фазовые портреты для изменяемого параметра α и β для модели (1) на плоскости параметров роста заболеваемости (β, \mathcal{V}) фрагмент (a) при $\alpha = 0.025$, $\alpha = 0.03$ и $\alpha = 0.031$ и при $B = d = 0$, $\gamma = 0.001$, $\beta = 0.05$, $\mathcal{V} = 10$. Фрагмент (b) при $\beta = 0.03$, $\beta = 0.05$ и $\beta = 0.12$ и при $B = d = 0$, $\gamma = 0.001$, $\alpha = 0.03$, $\mathcal{V} = 30$.

Временные реализации и фазовые портреты, представленные на рисунке 6 (а,б) показывают уменьшение числа заболевших в короткий промежуток, что может привести к нормализации ситуации в секторе здравоохранения.

Модель SIR с учетом миграции между двумя странами

Рассмотрим частный случай двух связанных моделей SIR, представляемых следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned}
\frac{dS_1}{dt} &= B_1 - d_1 S_1 - \beta_1 I_1 (1 + \mathcal{V}_1 I_1) S_1 + \gamma_1 R_1 + \delta_{S_{1,2}} (S_2 - S_1), \\
\frac{dI_1}{dt} &= \beta_1 I_1 (1 + \mathcal{V}_1 I_1) S_1 - (d_1 + \alpha_1) I_1 + \delta_{I_{1,2}} (I_2 - I_1), \\
\frac{dR_1}{dt} &= \alpha_1 I_1 - (d_1 + \gamma_1) R_1 + \delta_{R_{1,2}} (R_2 - R_1), \\
\frac{dS_2}{dt} &= B_2 - d_2 S_2 - \beta_2 I_2 (1 + \mathcal{V}_2 I_2) S_2 + \gamma_2 R_2 + \delta_{S_{2,1}} (S_1 - S_2), \\
\frac{dI_2}{dt} &= \beta_2 I_2 (1 + \mathcal{V}_2 I_2) S_2 - (d_2 + \alpha_2) I_2 + \delta_{I_{2,1}} (I_1 - I_2), \\
\frac{dR_2}{dt} &= \alpha_2 I_2 - (d_2 + \gamma_2) R_2 + \delta_{R_{2,1}} (R_1 - R_2),
\end{aligned} \tag{12}$$

где параметры $B_1 \geq 0, B_2 \geq 0$ определяют скорость естественного прироста первой и второй популяций, соответственно; $d_1 \geq 0, d_2 \geq 0$ – скорость естественной убыли в первой и второй популяциях, соответственно; $\alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0$ – скорости выздоровления в первой и второй популяциях, соответственно; $\beta_1 \geq 0, \beta_2 \geq 0$ – скорости линейного прироста заболевших в первой и второй популяциях, соответственно; $\mathcal{V}_1 \geq 0, \mathcal{V}_2 \geq 0$ – скорости нелинейного прироста заболевших в первой и второй популяциях, соответственно; $\gamma_1 \geq 0, \gamma_2 \geq 0$ – скорости потери иммунитета в первой и второй популяциях, соответственно; переменные S_1, S_2, I_1, I_2 и R_1, R_2 отвечают компонентам стандартной модели SIR, а индексы 1 и 2 отвечают первой и второй популяции, соответственно. Параметры $\delta_{S_{1,2}}$ и $\delta_{S_{2,1}}$ отвечает за миграцию здоровой части населения между двумя странами в направлениях из второй страны в первую и из первой – во вторую, соответственно. Аналогичным образом параметры $\delta_{I_{1,2}}, \delta_{I_{2,1}}, \delta_{R_{1,2}}$

и $\delta_{R_{2,1}}$ определяют миграцию инфицированных индивидуумов и людей с иммунитетом.

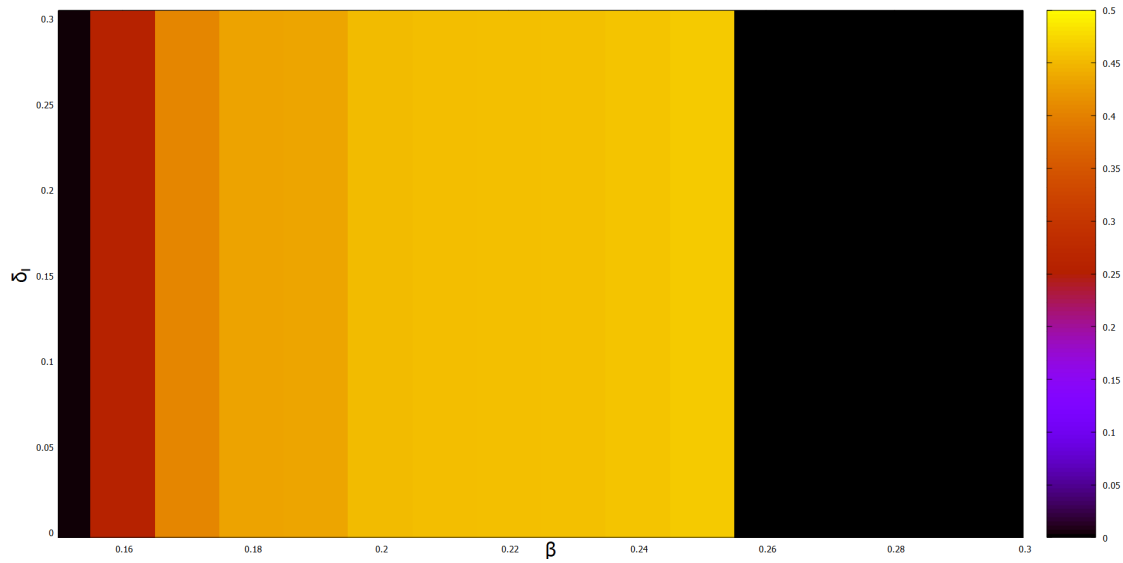


Рисунок 7 — Карта частоты колебаний доли инфицированных в отдельной популяции на плоскости параметров β и $\delta_{I_{1,2}} = \delta_{I_{2,1}}$.

Ясно, что параметры $\delta_{S_{1,2}}$, $\delta_{S_{2,1}}$, $\delta_{R_{1,2}}$ и $\delta_{R_{2,1}}$ не влияют на перенос инфекции между популяциями, поэтому наиболее интересными являются параметры $\delta_{I_{1,2}}$ и $\delta_{I_{2,1}}$, которые отвечают случаям перемещения инфицированных из одной популяции в другую. Такие случаи не могут вполне устранены даже при наличии карантинных мер по причине отличной от 100% точности тестирования. На рисунке 7 приведены результаты численного моделирования для идентичных популяций, в каждой из которых были взяты различные начальные условия. Карта показывает, что динамика идентичных моделей не зависит от параметра связи. Интерес представляет также исследование неидентичных популяций, более соответствующих реальным ситуациям.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теоретический обзор различных математических моделей распространения эпидемий в мире показал, что различные модификации базовой модели SIR позволяют учитывать различные факторы такие как инкубационный период, показатель распространения, степень заразности и т.д.

для прогнозирования динамики распространения инфекционных заболеваний.

В работе аналитически найдены состояния равновесия и проанализирован характер их устойчивости. В модели SIR в отсутствие естественной динамики популяции существует всего три состояния равновесия, но смысл имеют только два из них. При этом теряет устойчивость как раз решение, не имеющее смысла, так что в исследуемой модели всегда присутствуют два устойчивых состояния равновесия, при этом численные исследования, результаты которых приведены ниже, показывают, что также в системе может наблюдаться устойчивое периодическое решение.

Численные исследования также проведены для выявления типичного влияния различных параметров на поведение модели. Показано, что увеличение параметра α в рассмотренных пределах приводит к расширению области периодического режима на плоскости параметров роста заболеваемости (β, \mathcal{V}) . Для всех из рассмотренных значений параметра α существует значение параметра \mathcal{V} , при котором диапазон значений параметра β , при которых наблюдаются колебания, максимален. В результате показано, что параметр \mathcal{V} позволяет управлять шириной области колебаний по параметру β , а уменьшение параметра β , вне зависимости от параметра \mathcal{V} , позволяет получить состояние равновесия, отвечающее отсутствию инфицированных в популяции.

Анализ взаимной динамики распространения коронавирусной инфекции между Россией, Китаем и Казахстаном показал, что существует более высокая корреляция между значительно связанными странами (Россия и Казахстан), чем между слабо связанными странами (Россия и Китай). Численные исследования компартментной модели для двух связанных стран показали, что динамика идентичных моделей не зависит от параметра связи. Интерес представляет также исследование неидентичных популяций, более соответствующих реальным ситуациям. В продолжение настоящей работы представляется важным более подробное исследование взаимосвязанных моделей SIR.