

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра радиофизики и нелинейной динамики

Эффекты синхронизации в осцилляторе Ван дер Поля-Матъё
АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 4032 группы

направления 03.03.03 Радиофизика

Института физики

Чеснокова Ильи Ивановича

Научный руководитель

профессор, д.ф.-м.н., профессор _____ Т.Е. Вадивасова

Зав. кафедрой радиофизики

и нелинейной динамики,

д.ф.-м.н., доцент _____ Г.И. Стрелкова

Саратов 2024 г.

Введение

Явление параметрического резонанса и параметрических колебаний представляет собой один из фундаментальных физических эффектов, широко используемых на практике [1-3]. Параметрический резонанс связан с подкачкой энергии в систему, которая обеспечивается в результате модуляции параметра системы, например емкости конденсатора в колебательном контуре. В простейшем случае параметрический резонанс описывается уравнением линейного осциллятора с изменяющейся в результате внешнего воздействия частотой:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega^2(t)x = 0, \quad (1)$$

уравнение Матьё:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2[1 + \mu \sin(\omega_{ex}t)]x = 0, \quad (2)$$

Параметрические колебания существуют в ограниченных областях значений ω_{ex} и μ , в которых обеспечивается подкачка энергии в осциллятор от внешнего источника, компенсирующая диссипацию. Эти области называют областями Матьё. Так как осциллятор, описываемый (1) или (2), является линейным, то в случае параметрического резонанса амплитуда параметрических колебаний неограниченно растет. Учет нелинейности приводит к ограничению амплитуды колебаний.

Если вместо линейного осциллятора взять автогенератор и воздействовать на параметр, управляющий частотой автоколебаний, то возникает вопрос о влиянии параметрического воздействия на режим автоколебаний. Базовой моделью автоколебательной системы служит осциллятор Ван дер Поля:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (\varepsilon - x^2) \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \quad (3)$$

уравнение осциллятора Ван дер Поля – Матьё (ВДПМ):

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (\varepsilon - x^2) \frac{dx}{dt} + \omega_0^2(1 - \mu \sin \omega_{ex} t)x = 0. \quad (4)$$

Цель данной работы состоит в исследовании динамических режимов в одном отдельно взятом осцилляторе Ван дер Поля – Матьё (ВДПМ) в режиме генерации и подпороговом режиме и выявлении различий между автоколебаниями и параметрическими колебаниями, а также в установлении особенностей взаимной и вынужденной синхронизации колебаний в системе взаимодействующих осцилляторов Ван дер Поля - Матьё и Ван дер Поля (ВДП) при наличии расстройки собственных частот осцилляторов.

Решались следующие **задачи**:

1. Численно построить области колебаний с частотой, равной половине частоты воздействия, и с частотой, равной частоте воздействия (области параметрических колебаний) в подпороговом и автоколебательном режимах;
2. Методом усреднения Ван дер Поля получить укороченные уравнения для амплитуды и фазы осциллятора ВДПМ. Используя укороченные уравнения для осциллятора ВДПМ получить аналитические условия границ колебаний с частотой, равной половине частоты параметрического воздействия и выражения для постоянных амплитуды колебаний, Построить основную область параметрических колебаний на плоскости управляющих параметров и сравнить аналитические результаты с численными;
3. Численно исследовать систему связанных осцилляторов ВДПМ и ВДП. На плоскости управляющих параметров «частота-амплитуда параметрического воздействия» построить области, в которых осцилляторы совершают колебания на частоте, равной половине частоты воздействия, и на частоте, равной частоте воздействия. Провести расчеты для нескольких значений коэффициента связи.
4. Методом усреднения Ван дер Поля получить укороченные уравнения для амплитуд и фаз двух связанных осцилляторов ВДПМ и ВДП. Получить и проанализировать приближенные аналитические выражения для границ областей синхронизации первого и второго осцилляторов на частоте, равной

половине частоты параметрического воздействия. Сравнить полученные результаты с данными численного моделирования.

5. Проанализировать полученные результаты и сделать вывод о том, что собой представляют параметрические колебания в случае параметрического воздействия на автоколебательную систему, и как проявляется взаимная синхронизация при параметрическом воздействии на одну из взаимодействующих автоколебательных систем.

В **первой** главе были описаны модели и методы их исследования.

Если связать осциллятор ВДПМ и обычный осциллятор Ван дер Поля (ВДП) то полученная система аналогична системе двух связанных осцилляторов ВДП на один из которых оказывается параметрическое воздействие. Уравнения двух осцилляторов, первый из которых находится под параметрическим воздействием, имеют вид:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 - (\varepsilon - x_1^2)\dot{x}_1 + \omega_{01}^2(1 - \mu \sin(\omega_{ex}t))x_1 &= g(\dot{x}_2 - \dot{x}_1), \\ \ddot{x}_2 - (\varepsilon - x_2^2)\dot{x}_2 + \omega_{02}^2x_2 &= g(\dot{x}_1 - \dot{x}_2),\end{aligned}$$

Для проведения численных исследований были написаны специальные программы на языке С. Они позволяли интегрировать уравнения (2) и (4) и строить проекции фазовых траекторий на плоскости различных переменных. Использовался метод интегрирования Рунге-Кутты 4-го порядка с постоянным шагом $\Delta t = 0.01$. Кроме того были написаны программы для расчета средних частот колебаний осцилляторов и их отношений к половине частоты воздействия ω_{ex} в цикле по ω_{ex}

Была также написана программа, позволяющая строить цветные диаграммы областей различных значений величин погрешностей синхронизации δ_i на плоскости управляющих параметров ω_{ex} - μ :
 $\delta_i = |p_i - 1|$, $i = 1, 2, 3$.

Во **2 пункте 2 главы** описаны особенности поведения осциллятора Ван дер Поля – Матъё в подпороговом и автоколебательном режимах.

В случае $\varepsilon < 0$ в автономном осцилляторе (1) (при $\mu = 0$) отсутствуют автоколебания и существует устойчивая точка равновесия в начале координат. При $\varepsilon > 0$ в автономном режиме в системе существуют близкие к гармоническим, периодические автоколебания, которым соответствует устойчивый предельный цикл. При подаче параметрического воздействия ($\mu \neq 0$) в подпороговом режиме (при $\varepsilon < 0$) можно ожидать существование областей параметрической неустойчивости, в которых, в силу нелинейности системы, устанавливаются колебания конечной амплитуды с частотами $n \frac{\omega_{ex}}{2}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ (области Матфё). Вне этих областей точка равновесия в нуле является устойчивой и колебания должны затухать.

В режиме автоколебаний подача параметрического воздействия также должна привести к существованию областей колебаний с частотами $n \frac{\omega_{ex}}{2}$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Эти области также будем называть областями параметрического резонанса, хотя, по сути, они являются областями вынужденной синхронизации автоколебаний на различных гармониках внешним воздействием, которое является не силовым, а параметрическим. Вне этих областей существует квазипериодический двухчастотный режим.

В 3 пункте 2 главы представлены численное исследование областей параметрических колебаний.

Численно были построены две области периодических колебаний с частотой $\frac{\omega_{ex}}{2}$ и ω_{ex} на плоскости параметров $\omega_{ex} - \mu$ в подпороговом режиме при $\varepsilon = -0.1$ и в режиме автоколебаний при $\varepsilon = 0.1$. Результаты представлены на Рис.1. Как можно видеть, границы областей синхронизации автоколебаний при $\varepsilon = 0.1$ и границы областей параметрических колебаний при $\varepsilon = -0.1$ очень близки.

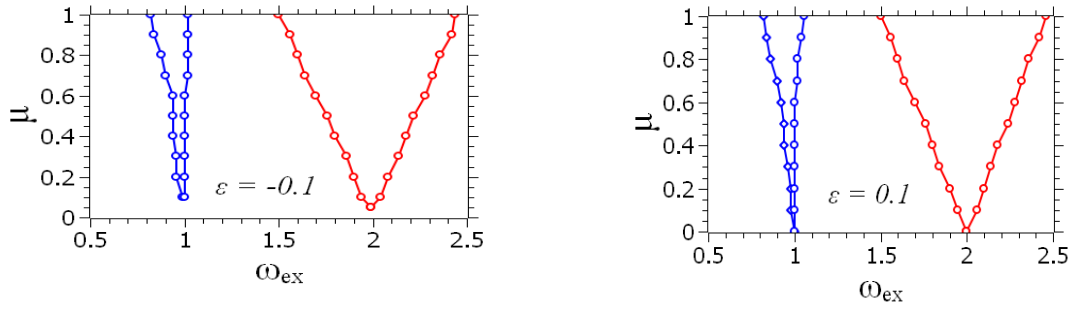


Рисунок 1. Численно построенные области параметрических колебаний на плоскости параметров воздействия ω_{ex} - μ при $\varepsilon = -0.1$ (а) и $\varepsilon = 0.1$ (б). Представлены области периодических колебаний на частоте $\omega = \frac{\omega_{ex}}{2}$ и на частоте $\omega = \omega_{ex}$. Собственная частота осциллятора $\omega_0 = 1$

В 2.3 и 2.3.1 приведен квазигармонический анализ колебаний осциллятора Ван дер Поля-Матъё и вывод укороченных уравнений соответственно.

Решение уравнения (1) ищется на частоте, равной половине частоты накачки. Сделаем замену переменных:

$$x = A(t) \cos\left(\frac{\omega_{ex}}{2} t + \varphi(t)\right) = \frac{1}{2} \left(a e^{i\frac{\omega_{ex}}{2} t} + a^* e^{-i\frac{\omega_{ex}}{2} t} \right)$$

$$\dot{x} = -\frac{\omega_{ex}}{2} A(t) \sin\left(\frac{\omega_{ex}}{2} t + \varphi(t)\right) = \frac{i\omega_{ex}}{4} \left(a e^{i\frac{\omega_{ex}}{2} t} - a^* e^{-i\frac{\omega_{ex}}{2} t} \right)$$

$$\ddot{x} = i \frac{\omega_{ex}}{2} \dot{a} e^{i\frac{\omega_{ex}}{2} t} - \frac{\omega_{ex}^2}{8} \left(a e^{i\frac{\omega_{ex}}{2} t} + a^* e^{-i\frac{\omega_{ex}}{2} t} \right)$$

Спустя некоторые вычисления

получаем уравнения:

$$\dot{A} - \frac{A}{2} \left(\varepsilon - \frac{A^2}{4} \right) + \frac{\mu\omega_1^2}{2\omega_{ex}} A \cos 2\varphi = 0$$

$$\dot{\varphi} + \Delta - \frac{\mu\omega_1^2}{2\omega_{ex}} \sin 2\varphi = 0 .$$

2.3.2 Анализ точек равновесия укороченных уравнений.

Для амплитуды и фазы существуют следующие постоянные во времени решения:

1) При всех значениях параметров существует нулевое решение

$$A_0^{(0)} \equiv 0.$$

Существуют отличные от нуля решения

$$A_0^{(1)} = 2 \sqrt{\varepsilon + \sqrt{\left(\frac{\mu\omega_1^2}{\omega_{ex}}\right)^2 - 4\Delta^2}}, \quad \begin{cases} \mu \geq \frac{2\omega_{ex}|\Delta|}{\omega_1^2}, & \text{при } \varepsilon > 0, \\ \mu \geq \frac{\omega_{ex}}{\omega_1^2} \sqrt{\varepsilon^2 + 4\Delta^2}, & \text{при } \varepsilon < 0 \end{cases}$$

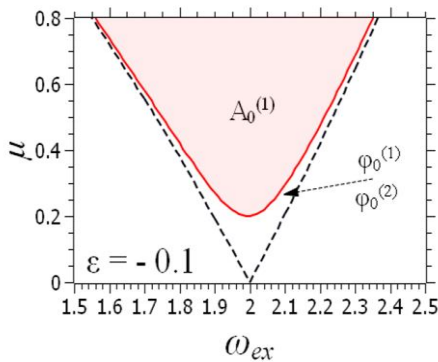
$$A_0^{(2)} = 2 \sqrt{\varepsilon - \sqrt{\left(\frac{\mu\omega_1^2}{\omega_{ex}}\right)^2 - 4\Delta^2}}, \quad \frac{2\omega_{ex}|\Delta|}{\omega_1^2} \leq \mu \leq \frac{\omega_{ex}}{\omega_1^2} \sqrt{\varepsilon^2 + 4\Delta^2}, \quad \text{при } \varepsilon > 0.$$

Постоянные значения фазы φ_0 существуют при выполнении условия

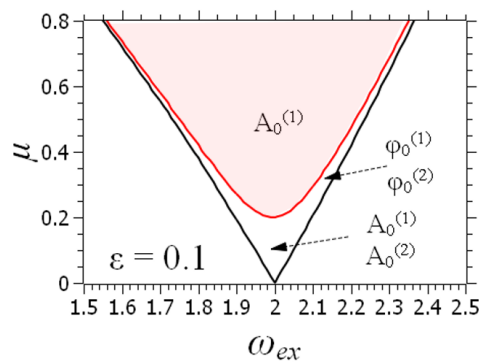
$$\mu \geq \frac{2\omega_{ex}|\Delta|}{\omega_1^2}.$$

Были приведены границы области существования точек равновесия на плоскости параметров $\omega_{ex} - \mu$

В обоих случаях в области клюва, опирающегося на ось абсцисс, существуют решения $\varphi_0^{(1)}$ и $\varphi_0^{(2)}$. Но, при $\varepsilon = 0.1$ в этой же области существуют стационарные решения для амплитуд $A_0^{(1)}$, $A_0^{(2)}$. В подпороговом режиме неустойчивое решение $A_0^{(2)}$ отсутствует, а устойчивое решение $A_0^{(1)}$ существует только в затонированной области на Рис.2, а. В режиме генерации в затонированной области на Рис.2, б существует только устойчивое решение $A_0^{(1)}$, а неустойчивое решение $A_0^{(2)}$ исчезает на линии, ограничивающей затонированную область.



(a)



(б)

Рисунок 2. Границы области существования точек равновесия уравнений на плоскости параметров ω_{ex} - μ при $\varepsilon = -0.1$ (а) и $\varepsilon = 0.1$ (б). Параметр ω_l выбирался равным единице

В **3 главе** были рассмотрены синхронизация и параметрический резонанс в связанных осцилляторах Ван дер Поля – Матьё и Ван дер Поля, а именно в

3.1 приведено параметрическое воздействие на синхронные осцилляторы при $g = 0.15$

Были построены зависимости отношений частот p_1, p_2, p_3 от частоты параметрического воздействия ω_{ex} при различных значениях амплитуды воздействия μ . Результаты, полученные для некоторых значений μ , приведены на Рис.3.

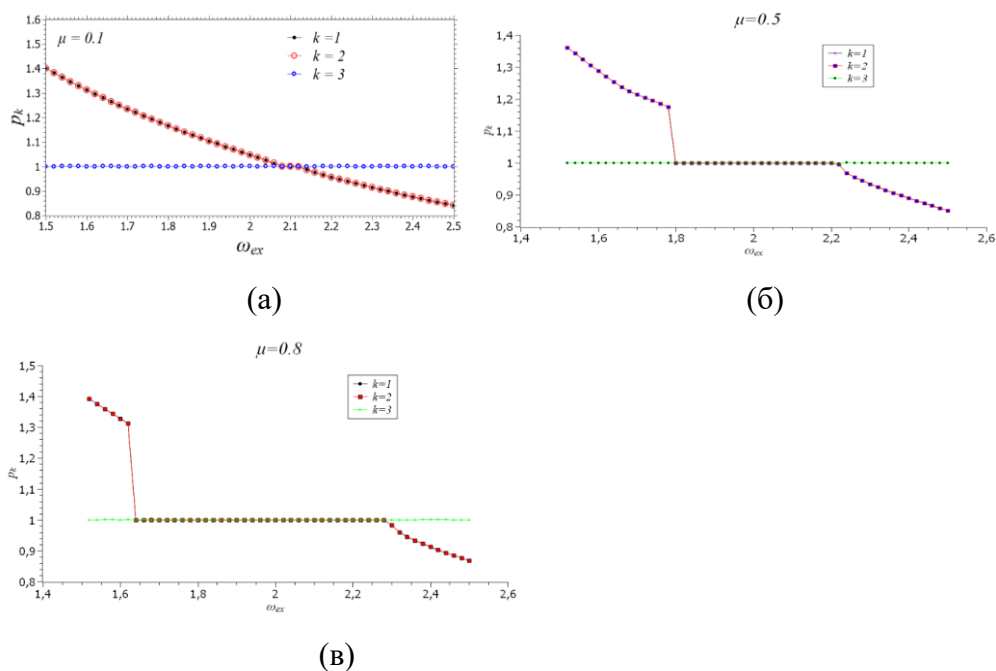


Рисунок 3. Зависимости соотношений частот p_1, p_2, p_3 от частоты параметрического воздействия при различных значениях амплитуды воздействия: $\mu = 0.1$ (а); $\mu = 0.5$ (б); $\mu = 0.8$ (в). Значения остальных параметров: $\varepsilon = 0.1$; $\omega_{01} = 1$; $\omega_{02} = 1.1$ и $g = 0.15$. Время установления – 500 ед.,

время расчета средних значений частот – 500 ед.

Из приведенных графиков видно, что при $\mu = 0.1, 0.5, 0.8$ для всех рассчитанных значений ω_{ex} два осциллятора остаются синхронизованы между собой. Параметрическое воздействие одновременно захватывает частоты обоих осцилляторов (с точностью 10^{-3}) в интервале $\omega_{ex} \in [1.65 - 2.3]$.

Была построена область синхронизации первого и второго осциллятора на частоте $\omega_{ex}/2$ на плоскости параметров $\omega_{ex} - \mu$, которая представлена на Рис.4.

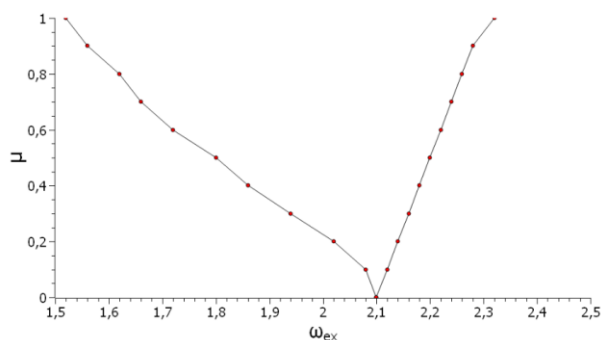
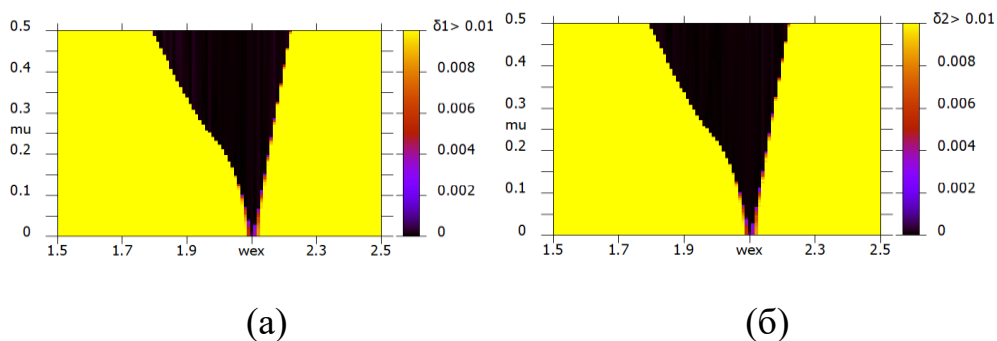
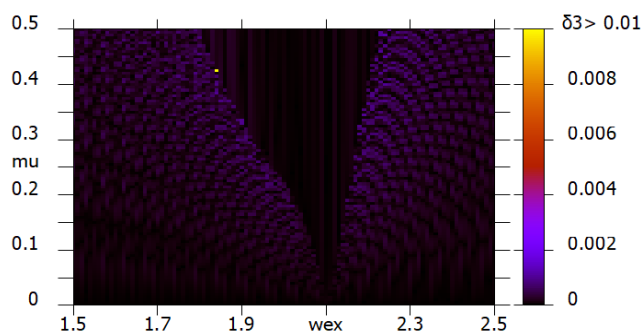


Рисунок 4. Область синхронизации двух осцилляторов параметрическим воздействием на плоскости параметров, подаваемым на первый осциллятор. Значения параметров: $\varepsilon = 0.1$; $\omega_{01} = 1$; $\omega_{02} = 1.1$ и $g = 0.15$. Время установления – 500 ед., время расчета средних частот – 500 ед.

С помощью специальной программы были построены диаграммы значений погрешностей синхронизации δ_i на плоскости параметров $\omega_{ex} - \mu$ при $g = 0.15$. Они представлены на Рис.5.





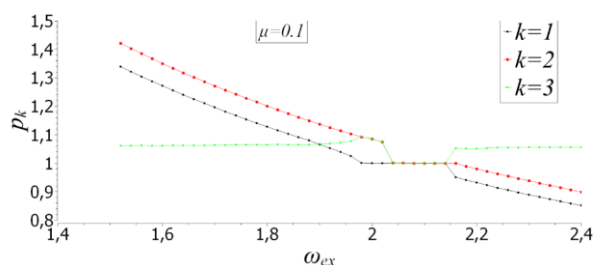
(в)

Рисунок 5. Диаграммы значений погрешностей синхронизации δ_1 (а), δ_2 (б) и δ_3 (в) на плоскости параметров $\omega_{ex} - \mu$ при $g = 0.15$ $\varepsilon = 0.1$, $\omega_{01} = 1$, $\omega_{02} = 1.1$

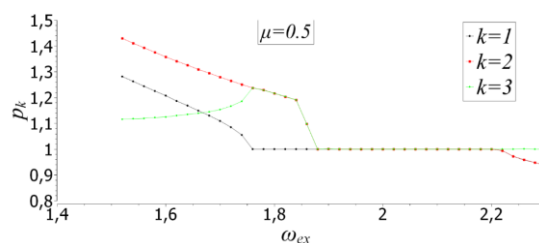
В 3.2 рассмотрено параметрическое воздействие на несинхронные осцилляторы при $g = 0.08$.

При $g = 0.08$ в отсутствии параметрического воздействия связанные осцилляторы при заданных параметрах $\omega_{01} = 1$; $\omega_{02} = 1.1$ не являются синхронизованными. В этом случае средние частоты колебаний осцилляторов различны: $\omega_1 = 1.018 \pm 10^{-3}$; $\omega_2 = 1.080 \pm 10^{-3}$.

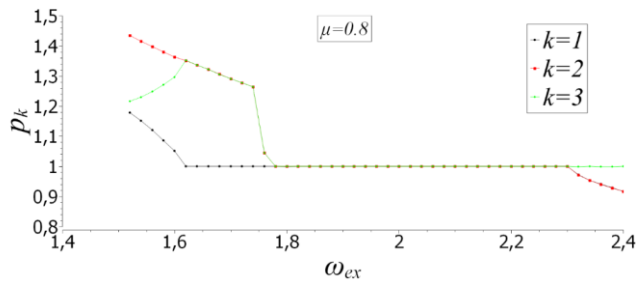
Зависимости отношений частот p_1, p_2, p_3 от частоты параметрического воздействия ω_{ex} при различных значениях амплитуды воздействия μ приведены на Рис.6.



(а)



(б)



(B)

Рисунок 6. Зависимости соотношений частот p_1 , p_2 , p_3 от частоты параметрического воздействия при различных значениях амплитуды воздействия: $\mu = 0.1$ (а); $\mu = 0.5$ (б); $\mu = 0.8$ (в). Значения остальных параметров: $\varepsilon = 0.1$; $\omega_{01} = 1$; $\omega_{02} = 1.1$ и $g = 0.08$. Время установления – 500 ед., время расчета средних значений частот – 500 ед.

Была построена область синхронизации первого и второго осциллятора на частоте $\omega_{ex}/2$ на плоскости параметров $\omega_{ex} - \mu$, которая представлена на Рис.11. Ключи синхронизации первого и второго осцилляторов не вполне совпадают и опираются на разные точки на оси абсцисс.

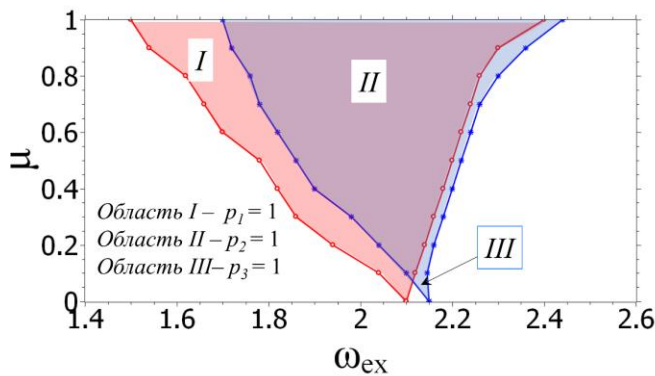


Рисунок 7. Области синхронизации двух осцилляторов параметрическим воздействием, подаваемым на первый осциллятор. Значения параметров: $\varepsilon = 0.1$; $\omega_{01} = 1$; $\omega_{02} = 1.1$ и $g = 0.08$. Время установления – 500 ед., время расчета средних частот – 500 ед.

На Рис.8. приведены диаграммы погрешностей синхронизации δ_1 (а), δ_2 (б) и δ_3 (в) на плоскости параметров $\omega_{ex} - \mu$ при $g = 0.08$. Можно видеть, что области вынужденной синхронизации на частоте $\omega_{ex}/2$ для первого и второго

осцилляторов (Рис.8,а и Рис.8,б, соответственно) несколько отличаются. Они имеют форму клювов, опирающихся на различные точки на оси абсцисс (соответственно $\omega_{ex} = 2\omega_1 \approx 2.036$ и $\omega_{ex} = 2\omega_2 \approx 2.160$).

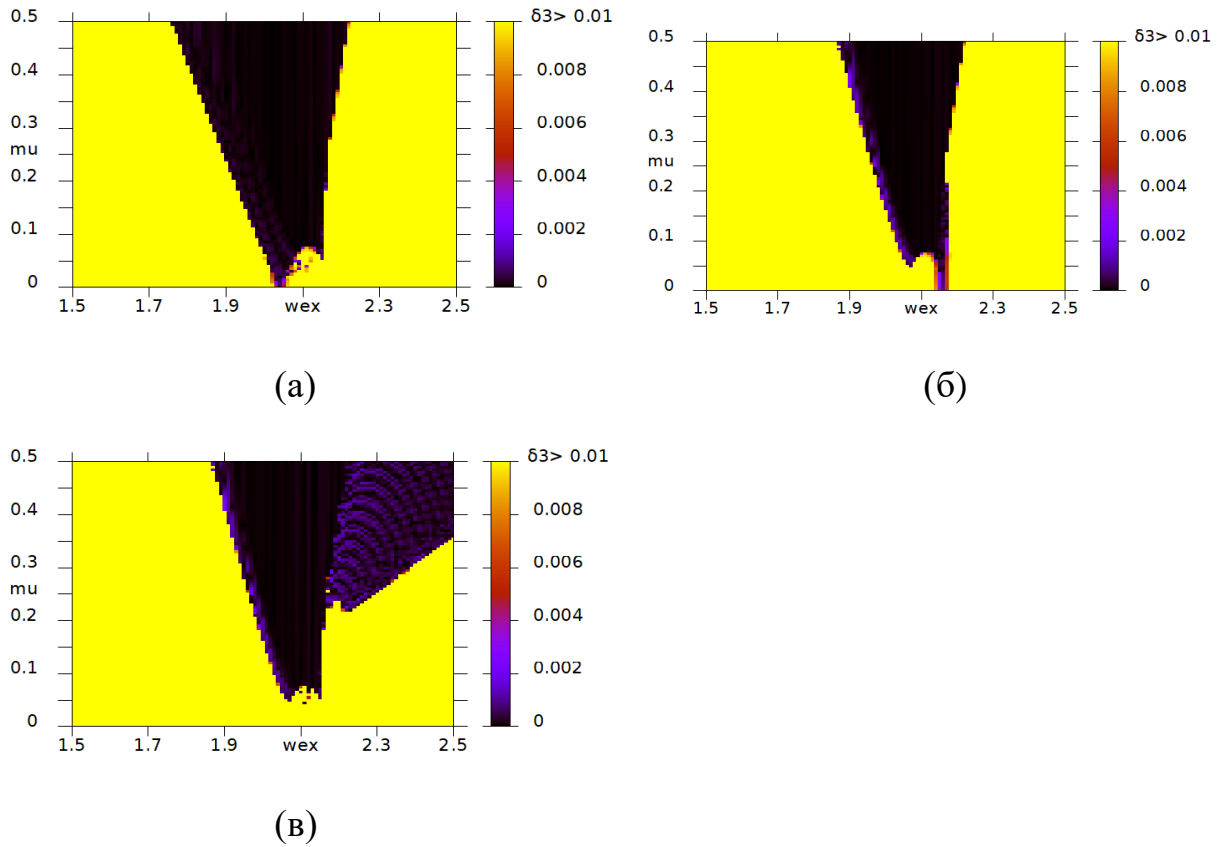


Рисунок 8. Диаграммы значений погрешностей синхронизации δ_1 (а), δ_2 (б) и δ_3 (в) на плоскости параметров $\omega_{ex} - \mu$ при $g = 0.08$, $\varepsilon = 0.1$, $\omega_{01} = 1$, $\omega_{02} = 1.1$

Глава 3 заканчивается квазигармоническим анализом колебаний связанных осцилляторов Ван дер Поля-Матьё и Ван дер Поля и выводом укороченных уравнений.

$$\begin{cases} x_1 = A_1(t) \cos\left(\frac{\omega_{ex}}{2}t + \varphi_1(t)\right) = \frac{1}{2}(a_1 e^{i\frac{\omega_{ex}}{2}t} + a_1^* e^{-i\frac{\omega_{ex}}{2}t}) \\ \dot{x}_1 = -\frac{\omega_{ex}}{2} A_1(t) \sin\left(\frac{\omega_{ex}}{2}t + \varphi_1(t)\right) = \frac{i\omega_{ex}}{4}(a_1 e^{i\frac{\omega_{ex}}{2}t} - a_1^* e^{-i\frac{\omega_{ex}}{2}t}) \\ \ddot{x}_1 = i\frac{\omega_{ex}}{2} \dot{a}_1 e^{i\frac{\omega_{ex}}{2}t} - \frac{\omega_{ex}^2}{8}(a_1 e^{i\frac{\omega_{ex}}{2}t} + a_1^* e^{-i\frac{\omega_{ex}}{2}t}) \end{cases}$$

В ходе чего получаем условия

$$\mu \geq \frac{\omega_{ex}^2 - 2(\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2)}{\omega_{01}^2}, \quad \omega_{ex}^2 \geq 2(\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2)$$

$$\mu \geq \frac{2(\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2) - \omega_{ex}^2}{\omega_{01}^2}, \quad \omega_{ex}^2 \leq 2(\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2)$$

Границы области вынужденной синхронизации обоих связанных осцилляторов, определяемые условиями, приведены на рис.9.

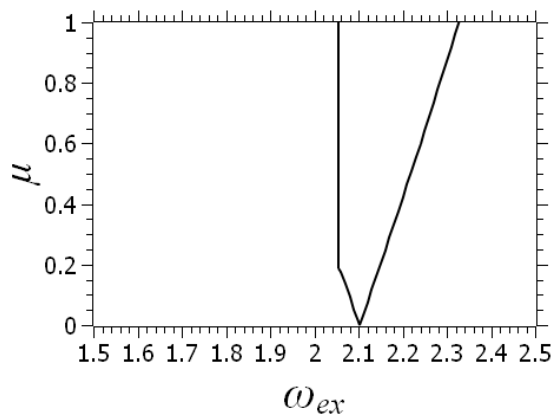


Рисунок 9. Область синхронизации обоих осцилляторов на частоте $\omega_{ex/2}$ на плоскости параметров $\omega_{ex} - \mu$ при $g = 0.15$, $\varepsilon = 0.1$, $\omega_{01} = 1$, $\omega_{02} = 1.1$, полученная теоретически в фазовом приближении

Заключение

В работе численно и аналитически рассмотрены осциллятор Ван дер Поля-Матьё в подпороговом и автоколебательном режимах, а также взаимодействие осцилляторов Ван дер Поля-Матьё и Ван дер Поля. Исследования позволили ответить на вопрос о природе параметрического резонанса в автоколебательных системах.

Для осциллятора Ван дер Поля-Матьё установлено следующее:

1. В автоколебательном режиме при параметрическом воздействии гармонического сигнала наблюдается эффект вынужденной синхронизации, как и при аддитивном воздействии. Области синхронизации включают основную частоту, её субгармоники и вторую гармонику, которая является наиболее широкой и основной.
2. Основная область синхронизации на второй гармонике ограничена седло-узловой бифуркацией, приводящей к режиму биений вне области синхронизации, что соответствует захвату фазы.
3. Внутри основной области синхронизации существует область с

устойчивым предельным циклом, соответствующая подавлению автоколебаний, ограниченная субкритической бифуркацией Андронова-Хопфа. Границы подавления отличаются от аддитивного воздействия.

4. Области параметрического резонанса в подпороговом режиме и подавления автоколебаний идентичны, что свидетельствует о том, что параметрический резонанс соответствует синхронизации через подавление.

Для связанных осцилляторов Ван дер Поля-Матьё и Ван дер Поля установлены следующие эффекты:

1. Сильная связь приводит к синхронизации обоих генераторов параметрическим воздействием на частоте, равной половине частоты воздействия.
2. Слабая связь приводит к частичной синхронизации одного из генераторов при той же частоте.
3. Модель фазовой динамики взаимодействующих осцилляторов, полученная методом усреднения, совпадает с моделью для связанных осцилляторов Ван дер Поля с аддитивным воздействием, что указывает на сходство эффектов синхронизации.

Таким образом, параметрический резонанс в автоколебательных системах является частным случаем синхронизации автоколебаний.