

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра радиофизики и нелинейной динамики

**Моделирование процессов распространения эпидемий**

**АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ**

студента 4 курса 4032 группы  
направления 03.03.03 Радиофизика  
Института физики  
Коробко Михаила Алексеевича

Научный руководитель

доцент, к.ф.-м.н.

\_\_\_\_\_

А.В. Бух

Зав. кафедрой радиофизики

и нелинейной динамики,

д.ф.-м.н., доцент

\_\_\_\_\_

Г.И. Стрелкова

Саратов 2024 г.

## **Введение**

Моделирование процессов распространения эпидемий - это фундаментальная область в эпидемиологии и научных исследованиях в области общественного здравоохранения. В этом контексте, одним из инструментов, используемых для анализа и прогнозирования динамики инфекционных заболеваний, являются компартментные модели.

Компартментные модели представляют собой широкий класс математических моделей, используемых в эпидемиологии для изучения распространения и динамики инфекционных заболеваний среди населения. Эти модели делят население на отдельные компартменты (группы) на основе их статуса болезни или других соответствующих характеристик и отслеживают перемещение людей между этими группами с течением времени.

Использование компартментных моделей в настоящее время имеет особую актуальность и значимость в свете эпидемии, которая происходит в мире. Например, в случае пандемии COVID-19 такие модели могут играть важную роль в прогнозировании и анализе распространения вируса.

Эпидемия COVID-19 стала глобальной угрозой для здравоохранения и экономики, и точное предсказание ее динамики и эффективное управление стали критически важными задачами. Компартментные модели позволяют учитывать множество факторов, таких как скорость передачи вируса, вероятность заражения и эффективность контролируемых мер, что помогает понять динамику эпидемии и принять обоснованные решения.

Использование таких моделей позволяет оценить эффективность мер по сдерживанию распространения инфекции, таких как ограничение контактов, введение массовой вакцинации и другие интенсивные контрмеры. Кроме того, эти модели могут быть адаптированы для различных сценариев и контекстов, позволяя исследовать влияние разных факторов на эпидемию и проводить сравнительный анализ различных стратегий контроля.

Использование компартментных моделей в эпидемиологии помогает ученым и руководителям принимать обоснованные решения, оптимизировать ресурсы и минимизировать негативные последствия эпидемии. В свете текущей пандемии COVID-19 такие модели являются мощным инструментом для понимания и борьбы с распространением инфекций в популяции.

Решение обратной задачи SIR-модели в эпидемиологии представляет собой процесс подбора параметров модели, таких как коэффициенты заражаемости и выздоровления, на основе реальных эпидемиологических данных. Это позволяет настроить модель таким образом, чтобы она наилучшим образом соответствовала конкретной эпидемиологической ситуации и позволяла делать точные прогнозы о распространении инфекции.

Решение обратной задачи SIR-модели является ключевым шагом для улучшения качества моделирования эпидемий и разработки эффективных стратегий контроля и предотвращения инфекций.

Решение обратной задачи для SIR-модели важно потому, что оно позволяет определить значения параметров модели, которые наилучшим образом соответствуют наблюдаемым данным. Это помогает повысить точность прогноза развития эпидемии и даёт возможность принимать обоснованные решения в сфере здравоохранения и общественного порядка.

Разработка новых алгоритмов решения обратной задачи SIR-модели является актуальной задачей в данной сфере, так как это позволит улучшить анализ текущих эпидемий и их прогнозирование.

В данной работе рассматриваются компартментные модели, алгоритм для решения обратной задачи для SIR модели, и оценивается работа этого алгоритма с разными режимами поведения модели.

Целью данной работы является обеспечение метода решения обратной задачи для модели SIR.

Для решения цели были поставлены следующие задачи:

1. Разработать алгоритм решения обратной задачи для SIR модели.

2. Оценить работу алгоритма решения обратной задачи на примере различных режимов поведения модели SIR.

Для оценки работы алгоритма с SIR моделью были написана программа на языке программирования C++, отвечающая за дифференцирование модели и алгоритм минимизации ошибки, и набор скриптов на языке Bash для построения графиков при помощи Gnuplot и упрощения запуска программы и анализа результатов.

Раздел 1 «Компартментные модели» содержит информацию о ключевых характеристиках и аспектах компартментных моделей, используемых в эпидемиологии: об одной из наиболее простых компартментных моделей, а именно модели SIR, и её расширениях. Рассмотрены компартментные модели в современных трендах в эпидемиологии, которые, несмотря на ограничения в использовании, широко применяются в эпидемиологии для информирования при принятии решений в области общественного здравоохранения и дают ценную информацию о распространении инфекционных заболеваний и борьбе с ними; выделены стратегии, зарекомендовавшие себя, как наиболее успешные в реализации применения компартментных моделей.

В разделе 2 «Модель и метод поиска параметров» описывается алгоритм решения обратной задачи для SIR модели и используемая модель. Алгоритм, представленный в литературе, не является подходящим для восстановления параметров модели SIR, поэтому использована его модификация, позволяющая настроить параметры модели SIR.

Раздел 3 «Иллюстрация работы алгоритма подстройки» содержит в себе демонстрацию работы алгоритма решения обратной задачи с различными режимами поведения используемой модели.

Построено сравнение временной реализации модели с восстановленными параметрами с изначальной временной реализацией, сравнение временной реализации модели с восстановленными параметрами и изначальной временной реализации, построено сравнение временной реализации модели с восстановленными параметрами и изначальной временной реализации.

Результаты работы описанных алгоритмов проиллюстрированы на рисунках.

### Основное содержание работы

Данная работа рассматривает компарментные модели и алгоритм решения обратной задачи для SIR-модели, называемый алгоритмом минимизации ошибки. Данный алгоритм использует четыре величины ошибки для избежания остановки алгоритма в локальном минимуме:

$$E_{full} = \frac{1}{PN} \sum_{i=1}^P \sum_{j=1}^N (x_{j,i}^{data} - x_{j,i}^{model, full})^2, \quad (1)$$

где  $P$  – количество точек в исходных данных,  $N$  – размерность фазового пространства исходных данных и модели,  $x_i^{data} = (x_{1,i}^{data}, \dots, x_{N,i}^{data})$  – вектор фазового состояния в  $i$ -й точке исходных данных,  $x_i^{model, full} = (x_{1,i}^{model, full}, \dots, x_{N,i}^{model, full})$  – вектор фазового состояния модели в  $i$ -й точке, соответствующей исходным данным.

$$E_{full} = \max (x_{j,i}^{data} - x_{j,i}^{model, full})^2, \quad (2)$$

где  $x_i^{data} = (x_{1,i}^{data}, \dots, x_{N,i}^{data})$  – вектор фазового состояния в  $i$ -й точке исходных данных,  $x_i^{model, full} = (x_{1,i}^{model, full}, \dots, x_{N,i}^{model, full})$  – вектор фазового состояния модели в  $i$ -й точке, соответствующей исходным данным.

$$E_{part} = \frac{1}{PN} \sum_{i=1}^P \sum_{j=1}^N (x_{j,i}^{data} - x_{j,i}^{model, part})^2, \quad (3)$$

где  $P$  – количество точек в исходных данных,  $N$  – размерность фазового пространства исходных данных и модели,  $x_i^{data} = (x_{1,i}^{data}, \dots, x_{N,i}^{data})$  – вектор фазового состояния в  $i$ -й точке исходных данных,  $x_i^{model, part} = (x_{1,i}^{model, part}, \dots, x_{N,i}^{model, part})$  – вектор фазового состояния в модели, которая начинается в  $i$ -й точке.

$$E_{part} = \max (x_{j,i}^{data} - x_{j,i}^{model, part})^2, \quad (4)$$

где  $x_i^{data} = (x_{1,i}^{data}, \dots, x_{N,i}^{data})$  - вектор фазового состояния в  $i$ -й точке исходных данных,  $x_i^{model, part} = (x_{1,i}^{model, part}, \dots, x_{N,i}^{model, part})$  - вектор фазового состояния в модели, которая начинается в  $i$ -й точке.

Используемая SIR-модель описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{S} &= B - DS - \beta I(S + uIS) + \gamma R \\ \dot{I} &= \beta I(S + uIS) - \alpha I - DI \\ \dot{R} &= \alpha I - \gamma R - DR \end{aligned} \quad (5)$$

где  $S$  - компартмент подверженных воздействию людей,  $I$  - компартмент заражённых,  $R$  - компартмент выздоровевших,  $B$  - рождаемость,  $D$  - смертность,  $\alpha$  - скорость выздоровления,  $\gamma$  - скорость потери иммунитета,  $\beta$  - скорость линейного прироста заболевших,  $u$  - скорость нелинейного роста заболевших.

Для демонстрации работы алгоритма использовались следующие параметры:  $B = D = 0.01$ ,  $\beta = 0.06$ ,  $v = 10$ ,  $\gamma = 0.001$  и  $\alpha = 0.031$ . Результат работы алгоритма, разработанного при выполнении выпускной квалификационной работы, проиллюстрирован на рисунках 1 и 2.

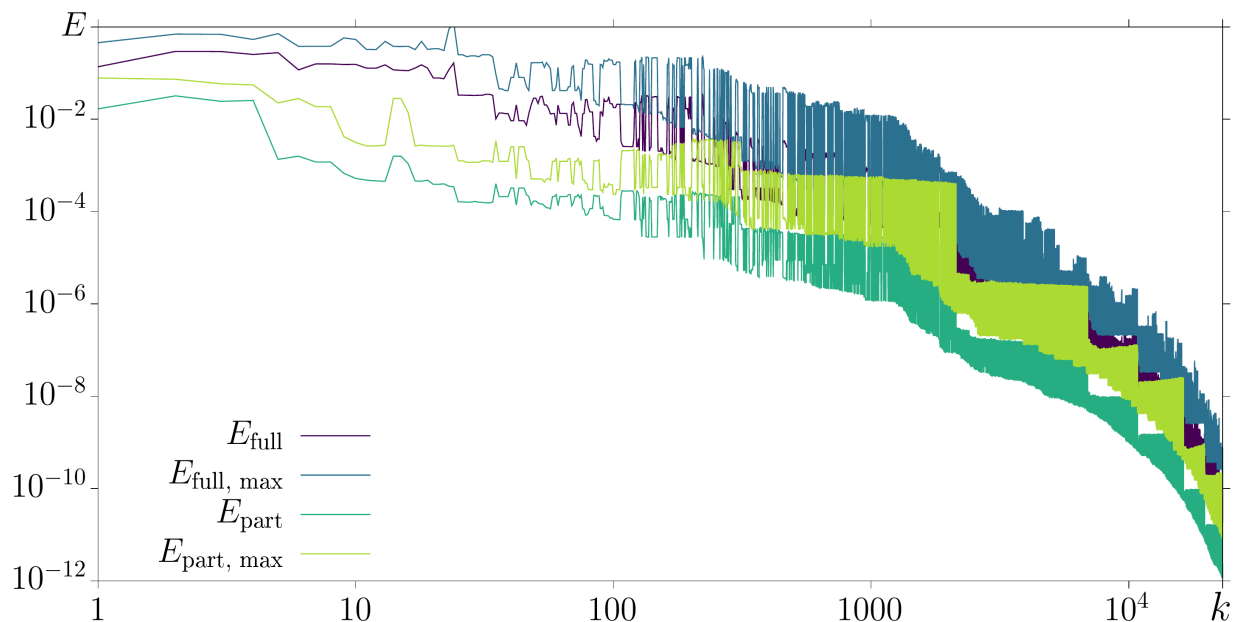


Рисунок 1 - Зависимость величин  $E_{full}$ ,  $E_{full, max}$ ,  $E_{part}$  и  $E_{part, max}$  от номера итерации алгоритма минимизации ошибки

Условие  $E_{\text{full, max}} < 10^{-10}$  было достигнуто за 23147 итераций алгоритма (рисунок 1).

Параметры были достаточно точно (с погрешностью меньше 1%) восстановлены:  $B = 0.0100855 \pm 0.9\%$ ,  $D = 0.0100873 \pm 0.9\%$ ,  $\beta = 0.0604807 \pm 0.9\%$ ,  $\nu = 10.0011 \pm 0.2\%$ ,  $\gamma = 0.00100148 \pm 0.2\%$ ,  $\alpha = 0.0312452 \pm 0.8\%$  (рисунок 2).

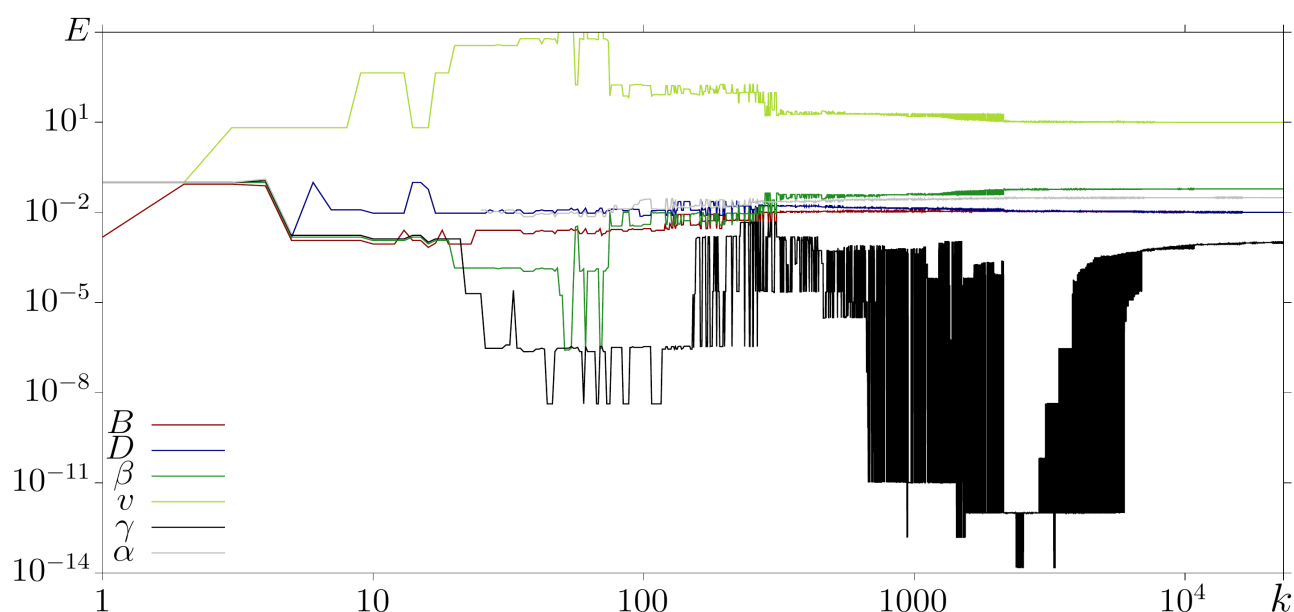


Рисунок 2 - Зависимость значений параметров  $B$ ,  $D$ ,  $\beta$ ,  $\nu$ ,  $\gamma$  и  $\alpha$  от номера итерации алгоритма минимизации ошибки

Так же было построено сравнение временной реализации модели с восстановленными параметрами с изначальной временной реализацией (рисунок 3).

В выпускной квалификационной работе представлена работа алгоритма решения обратной задачи с различными режимами поведения используемой модели.

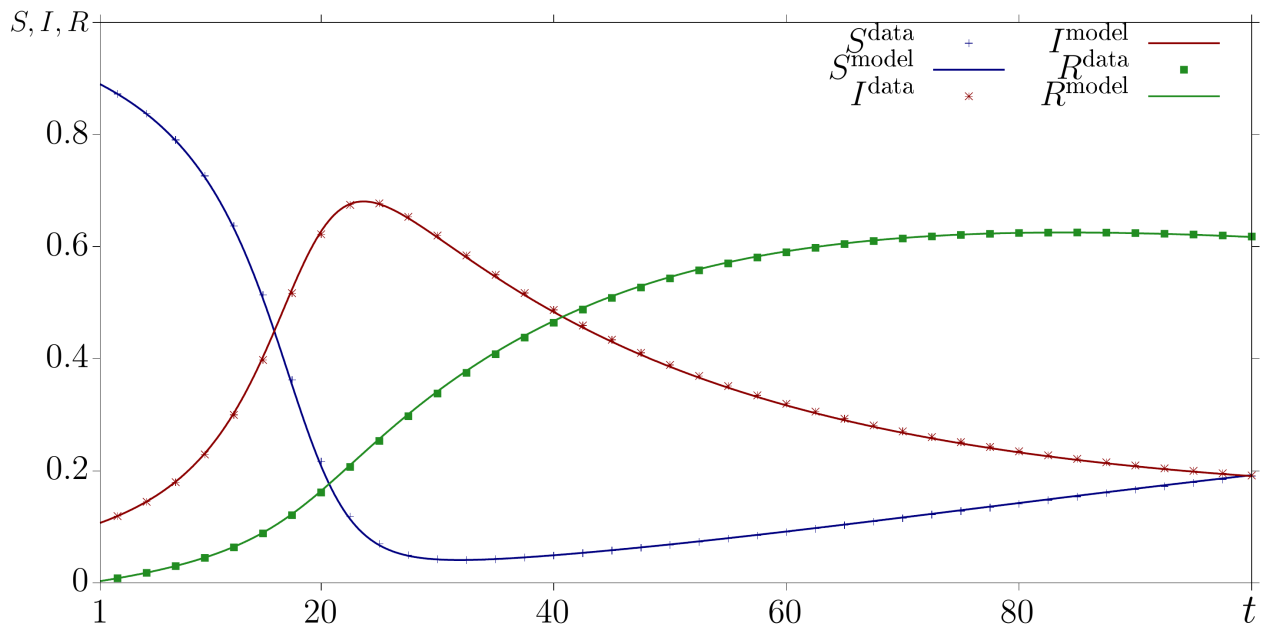


Рисунок 3 - Изначальная временная реализация модели и временная реализация модели с восстановленными параметрами

Разработанный алгоритм для решения обратной задачи для SIR модели, вносит вклад в использование компартментных моделей в эпидемиологии, что позволит более эффективно использовать современные цифровые технологии для прогнозирования и предупреждения различных эпидемиологических заболеваний.

### Заключение

В заключение следует отметить, что использование компартментных моделей и решение обратной задачи SIR-модели являются ключевыми аспектами для анализа и прогнозирования эпидемий. Эти методы позволяют учёным и специалистам в области общественного здравоохранения принимать обоснованные решения, оптимизировать ресурсы и разрабатывать эффективные стратегии контроля и предотвращения инфекций.

Компартментные модели предоставляют возможность учитывать множество факторов, влияющих на распространение эпидемий, таких как



скорость передачи вируса, вероятность заражения и эффективность контролируемых мер. Это помогает понять динамику эпидемии и принять обоснованные решения для её контроля.

Решение обратной задачи SIR-модели позволяет определить значения параметров модели, которые наилучшим образом соответствуют наблюдаемым данным. Это повышает точность прогноза развития эпидемии и даёт возможность принимать обоснованные решения в сфере здравоохранения и общественного порядка.

Разработка новых алгоритмов решения обратной задачи для SIR-моделей позволяет улучшить существующие методы анализа эпидемий и вирусных инфекций, и так же позволяет развивать новые алгоритмы и методы и создавать на их базе новые математические методы.

Таким образом, развитие новых математических методов для решения обратной задачи SIR-модели является важным направлением в сфере эпидемиологии.

При выполнении выпускной квалификационной работы были сделаны следующие выводы.

1. В работе был разработан алгоритм, позволяющий с задаваемой точностью восстанавливать значения параметров дифференциальной SIR-модели. Для более точного восстановления параметров алгоритм использует четыре величины ошибки, что позволяет избежать остановки работы алгоритма в локальном минимуме и найти глобальный минимум в точке, где минимум наблюдается для всех величин ошибок. Проиллюстрирована работа алгоритма с различными режимами поведения используемой SIR-модели.

2. Разработанный алгоритм был проверен на временных реализациях различных режимов работы используемой SIR-модели. В некоторых режимах поведения модели алгоритм быстро справляется с восстановлением данных, но также есть режимы поведения, для определения качества работы алгоритма с которыми требуется дальнейшее исследование.