Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра Дифференциальных уравнений и математической экономики
наименование кафедры

Итерационные методы решения уравнений I–ого рода

название темы выпускной квалификационной работы

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

Студента 2 курса 217 группы

направления (специальности)
код и наименование направления

механико-математического факультета
наименование факультета, института, колледжа

Аткина Кирилла Станиславовича
фамилия, имя, отчество

Научный руководитель
профессор, д.ф.-м.н., профессор ______________ Г. В. Хромова
подпись, дата

Заведующий кафедрой
зав.каф., д.ф.-м.н., профессор ______________ С. И. Дудов
подпись, дата

Саратов 2024

Введение. С момента постановки Жаком Адамаром положений о корректности математических задач, в научной среде стоял вопрос о возможности и целесообразности рассмотрения той части задач, что попала под "вето"некорректности. Со временем, движение научной мысли, подкрепляемое потребностями привело к разработке целого ряда подходов к некорректным задачам, с целью отыскания их решения.

Данная работа представляет собой попытку обозреть и изучить класс некорректных задач, задающихся уравнением I–ого рода, а также разобрать и исследовать на сходимость к точному решению методы регуляризации такого вида задач. Особое внимание в этом исследования уделено итерационным методам.

В введении сжато дается представление о затрагиваемой в работе теме некорректных задач, поясняется в чем состоит практический интерес их изучения, дается краткая историческая хронология изучения некорректных задач.

Первая глава содержит информацию о непосредственном представлении некорректных задач в форме уравнения I–ого рода и ключевых методах, позволяющих получить приблизительное решение таких задач. Рассматриваются метод квазирешений В.К. Иванова, метод регуляризации А. Н. Тихонова.

Во второй главе внимание уделяется различным типам итерационных методов регуляризации некорректных задач. Поочередно были рассмотрены метод простой итерации, итерационный метод неявного типа, метод итерационный регуляризации Фридмана. Показана сходимость к точному решению для каждого из перечисленных методов.

Третья глава посвящена разбору схем алгоритмов, благодаря которым реализуются итерационные процессы регуляризации некорректных задач.

В четвертой главе приведена разобранная в качестве примера численная модельная задача.

В заключительной части подводится краткий итог проведенных изысканий.

Также помимо разбора основной темы, работа включает в себя часть, посвященную введению понятий и терминов, необходимых для понимания рассматриваемого материала. В большей степени, в данном разделе приводятся теоретическая выкладки из функционального анализа, в особенности, спектральной теории самосопряженных операторов.

Основное содержание работы.

Само понятие некорректно поставленной задачи есть противопоставление понятию корректно поставленной задачи, которое в свою очередь отсылает нас к постулированным Жаком Адамаром обязательным свойствам математических моделей физических явлений, согласно которым у каждой модели:

1. Решение существует.

2. Решение единственно.

3. Решение устойчиво, т. е. непрерывно зависит от исходных данных.

Соответственно, корректно поставленной задачей называется такая, для которой одновременно выполнены три обозначенных условия.

Исходя из выше описанного, некорректно поставленной или некорректной задачей (в дальнейшем для краткости написания будем прибегать и к такой формулировке) называется задача, не удовлетворяющая хотя бы одному из перечисленных условий, называемых также условиями корректности. Такая задача может как не иметь решений — нарушение условия 1, так и напротив иметь несколько решений при единых исходный данных — нарушение условия 2, либо процедура нахождения решений неустойчива (т. е. незначительная погрешность измерений величины исходных данных может вызвать значительные отклонения в решении), что нарушает условие 3. Именно неустойчивые задачи и станут предметом рассмотрения в данной работе.

Задачи, противоречащие трем обозначенным условиям считались не отвечающими физической реальности. В научном сообществе утвердилось мнение, что некорректные задачи не могут встречаться при решении физических и технических задач и что для некорректных задач невозможно построение приближённого решения в случае отсутствия устойчивости, а значит и сами задачи не имеют смысла. В отечественной среде, одним из авторов “вето” был и выдающийся советский математик Андрей Николаевич Тихонов, утверждавший, что тратить время на некорректно поставленные задачи нецелесообразно.

Тем не менее, потребности практики не дали такому положению устояться и привели к необходимости работать с некорректными задачами и искать методы их решения. Во многом, именно те, кто ранее заявлял о несостоятельности такого типа задач, в последствии и определили способы их решения, чем дали толчок в развитии этого направления.

Наибольший интерес представляет возможность благодаря решению обратных задач получить доступ к значениям величин и свойств, прямое изучение которых, по тем или иным причинам, либо чересчур трудоемко, либо не представляется возможным, в принципе. Действия, в таком случае, направлены на то, чтобы по информации о решении прямой задачи определить коэффициенты уравнений, которые и являются численным отражением, интересующих исследователей, величин.

Не существует универсального методы решения некорректных задач. Поэтому в каждом конкретном случае к некорректности необходимо подбирать свой подход. О различных способах разрешения некорректности и пойдет речь далее.

1 Об уравнении I–ого рода и методах его регуляризации

Многие некорректно поставленные задачи описываются уравнением первого рода, либо могут быть сведены к нему. В работе рассмотрение методов регуляризации будет проводится на уравнении I–ого рода:

$$Au = f, \quad u \in U, \quad f \in F, \tag{1.1}$$

где $A\colon U \to F$ — заданный оператор, U и F — вообще топологические пространства (но также метрические, а в частности, банаховы, гильбертовы или евклидовы), а $M \subset U$ — фиксированное множество. В зависимости от природы задачи возможны различные подходы к поиску устойчивого решения. Рассмотрим, упомянутые ранее три метода регуляризации, полученные основоположниками теории некорректных задач А. Н. Тихоновым, В. К. Ивановым и М. М. Лаврентьевым.

1.0.1 Метод В. К. Иванова. Квазирешение

Данный метод заключается в том, чтобы ограничить область поиска значений u устойчивых к малым изменениям f некоторым компактом $M \subset U$. При этом полагается A — вполне непрерывный оператор, а построение приближенного решения u осуществляется по формуле

$$u = A^{-1}f \tag{1.2}$$

и $f \in A(M) \subset F$. Обратим внимание на тот факт, что принадлежность f множеству $A(M)$ является существенным условием для того, чтобы можно было искать приближенное решение в виде 1.2, поскольку в противном случае выражение $A^{-1}f$ может не иметь смысла. Однако, во-первых, задача установления принадлежности f множеству $A(M)$ сама по себе является нетривиальной, во-вторых даже тот факт, что $f \in A(M)$ не является гарантией того, что

$f_\delta \in A(M)$. Для того чтобы устранить затруднения, связанные с отсутствием решения уравнения $Au = f$, вводится понятие квазирешения уравнения, обобщающее понятие решения такого уравнения.

Определение 1.1. *Квазирешением u_K уравнения $Au = f$ на множестве $M \subset U$ называется элемент $u_K \in M$, на котором достигается нижняя грань невязки, т. е.*

$$\rho_F(Au_K, f) = \inf_{u \in M} \rho_F(Au, f)$$

.

Если — компакт, то квазирешение существует при всех $f \in F$, а если, кроме того, $f \in A(M)$, то квазирешение u_K совпадает с точным решением (u_K может быть неединственным).

С целью добиться единственности и непрерывной зависимости квазирешения от правой части f можно исходить из следующей предпосылки

Теорема 1.1. *Пусть уравнение $Au = f$ имеет на компакте M не более одного решения и проекция каждого $f \in F$ на $A(M)$ единственна. Тогда квазирешение u_K единственно и непрерывно зависит от f.*

Таким образом, при переходе к квазирешению восстанавливаются все условия корректности, т. е. задача нахождения квазирешения уравнения 1.1 на компакте M является корректной. В случае, когда оператор A — линейный, теорема 1.1 может быть сформулирована следующим образом

Теорема 1.2. *Пусть оператор $A : U \to F$ линеен и однородное уравнение $Au = 0$ имеет только нулевые решения. Предположим также, что множество M выпукло и компактно, а всякая сфера в F строго выпукла. Тогда квазирешение уравнения $Au = f$ на M единственно и непрерывно зависит от f.*

Рассмотрим теперь случай, когда U и F являются сепарабельными гильбертовыми пространствами. Пусть $A\colon U \to F$ — вполне непрерывный оператор, компакт M задается в виде:

$$M = B(0, r)\colon = \{u \in U\colon \|u\| \leqslant r\}$$

A^* — оператор, сопряженный к оператору A. Известно, что A^*A — самосопряженный положительный (т. е. $\forall u \neq 0\, (A^*Au, u) > 0$) вполне непрерывный оператор, действующий из $U \to U$. Пусть $\{\Lambda_n\}$ — упорядоченная по убыванию последовательность собственных значений оператора A^*A, а $\{\varphi_n\}$ — отвечающая им полная ортонормированная последовательность собственных функций. Элемент A^*f записывается в виде ряда

$$A^*f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \varphi_n, \quad f_n = (A^*f, \varphi_n) \tag{1.3}$$

Для приведенных данных справедлива следующая теорема.

Теорема 1.3. *Квазирешение уравнения $Au = f$ на множестве $B(0, r)$ выражается формулами:*

$$u_K = \begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{f_n}{\lambda_n}\varphi_n, & \text{если } \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{f_n^2}{\lambda_n^2} < r^2, \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{f_n}{\lambda_n + \beta}\varphi_n, & \text{если } \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{f_n^2}{\lambda_n^2} \geqslant r^2, \end{cases}$$

где β — корень уравнения $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{f_n^2}{(\lambda_n + \beta)^2} = r^2$

Несмотря на доказанную эффективность, метод квазирешений В. К. Иванова имеет главный недостаток, который ограничивает область его распространения на более широкий ряд задач. Этот недостаток кроется в самой сути подхода — выборе множества, на котором проводятся изыскания, что требует от нас априорного знания компакта, содержащего точное решение, т. е. наличия определенной количественной информации о точном решении. В противоположность ему этого недостатка лишен метод, рассматриваемый далее.

1.1 Метод регуляризации А. Н. Тихонова

Итак, рассмотрим один из наиболее популярных в приложениях метод регуляризации, предложенный А. Н. Тихоновым. Вообще, под данным названием обобщена совокупность приемов, основанных на общей идее. метод регуляризации является эффективным для случая задач, представляемых уравнением I–ого рода 1.1, класс возможных решений $M \subset U$ которых, не является компактом, из-за чего ошибки измерений данных f могут выводить за пределы класса существования решения $A(M)$. Приведем сначала общее определение регуляризирующего алгоритма для задачи 1.1. Предположим, что A — линейный ограниченный оператор, имеющий обратный оператор A^{-1}. Пусть вместо оператора

A и правой части f нам известны их приближения A_h и f_δ, удовлетворяющие условиям (U и F — нормированные пространства)

$$\|A - A_h\| \leqslant h, \quad \|f - f_\delta\| \leqslant \delta.$$

Обозначим $\mathcal{A}$ — множество допустимых возмущений оператора A.

Определение 1.2. *Семейство отображений $R_{\delta h} : f \times A \to U$ называется регуляризирующим алгоритмом для задачи $Au = f$, если*

$$\sup \|R_{\delta h}(f_\delta, A_h) - A^{-1}f\| \to 0, \quad \|f - f_\delta\| \leqslant \delta,\, \|A - A_h\| \leqslant h,\, f_\delta \in F,\, A_h \in \mathcal{A}$$

при $\forall f \in R(A) = A(U) \delta \to 0$, $h \to 0$. Множество $R_{\delta h}(f_\delta, A_h), \delta \in (0, \delta_0], h \in (0, h_0]$, называется регуляризованным семейством приближенных решений задачи 1.1.

Если о решении $u_{\text{точн.}}$ уравнения $Au = f$ известна априорная информация, например, условие $u_{\text{точн.}} \in M \subset U$, то в определении достаточно заменить множество $A^{-1}f$ на $A^{-1}f \cap M$. В большинстве случаев в дальнейшем будем предполагать, что оператор A задан точно.

Пусть теперь $A\colon U \to F, U$ и F — метрические пространства, $u_{\text{точн.}}$ — точное решение некорректной задачи $Au = f$ для некоторого $f \in F$.

Определение 1.3. *Семейство операторов $\{R_\alpha\}_{\alpha>0}$ называется регуляризирующим для задачи $Au = f$, если:*

1. *для любого $\alpha > 0$ оператор $R_\alpha\colon F \to U$ непрерывен;*
2. *для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\alpha_* > 0\colon \forall \alpha \in (0, \alpha_*)$*

$$\rho_U(R_\alpha f, u_{\textit{точн.}}) < \varepsilon,$$

другими словами,

$$\lim_{\alpha \to +0} R_\alpha f = u_{\textit{точн.}} \tag{1.4}$$

Если правая часть уравнения $Au = f$ задана приближенно и известна погрешность δ исходных данных, $\rho_F(f_\delta, f) \leqslant \delta$, то регуляризирующее семейство $\{R_\alpha\}_{\alpha>0}$ позволяет не только построить приближенное решение $u_{\alpha\delta} = R_\alpha f_\delta$, но и оценить уклонение приближенного решения $u_{\alpha\delta}$ от $u_{\text{точн.}}$. В самом деле, в силу неравенства треугольника

$$\rho_U(u_{\alpha\delta}, u_{\text{точн.}}) \leqslant \rho_U(u_{\alpha\delta}, R_\alpha f) + \rho_U(R_\alpha f, u_{\text{точн.}}). \tag{1.5}$$

При $\alpha \to +0$ второе слагаемое в правой части 1.5 стремится к нулю. В силу некорректности задачи оценка первого слагаемого при $\alpha \to +0$, $\delta \to +0$ является сложной проблемой, решаемой в каждой конкретной задаче с учетом особенностей этой задачи, а также априорной и/или апостериорной информации о точном решении.

Одним из наиболее известных способов построения регуляризирующего семейства является минимизация функционала А. Н. Тихонова.

$$M(u, f_\delta, \alpha) = \|Au - f_\delta\|^2 + \alpha\Omega(u - u^0).$$

Здесь u^0 — пробное решение; α — параметр регуляризации; Ω — стабилизирующий функционал, выбираемый обычно в виде нормы (или полуформы), например $\Omega(u) = \|u\|^2$. Стабилизатор Ω учитывает априорную информацию о степени гладкости точного решения (или о структуре решения) и определяет тип сходимости приближенных решений к точному при заданной зависимости $\alpha(\delta) \to 0$, $\delta \to 0$. Например, при численном решении интегральных уравнений первого рода, решение которых существует, единственно и является достаточно гладким, метод Тихонова эффективен при $\Omega(u) = \|u\|^2_{W_2^1}$.

Рассмотрим сначала простейший пример

$$M(u, f, \alpha) = \|Au - f\|^2 + \alpha\|u\|^2, \quad \alpha > 0 \tag{1.6}$$

Теорема 1.4. *Пусть U и F — гильбертовы пространства, A — линейный вполне непрерывный оператор. Тогда для любых $f \in F$ и $\alpha > 0$ функционал $M(u, f, \alpha)$ достигает своей нижней грани на единственном элементе u_α*

Используя теорему 1.4, можно по приближенным данным $f_\delta \in F$, удовлетворяющим условию $\|f - f_\delta\| \leqslant \delta$, построить приближенное решение $u_{\alpha\delta}$ и доказать его сходимость к точному решению $u_{\text{точн.}}$ уравнения $Au = f$ при согласованном стремлении к нулю параметров α и δ. В самом деле, пусть нижняя грань функционала $M(u, f, \alpha)$ достигается в точку $u_{\alpha\delta}$, которая по теореме 1.4 существует и единственна.

Теорема 1.5. *Пусть выполнены условия теоремы 1.4. Предположим, что для некоторого $f \in F$ существует единственное решение $u_{\text{точн.}}$ уравнение $Au = f$. Обозначим через $\{f_\delta\}_{\delta>0}$ семейство приближенных данных, каждый элемент которого удовлетворяет условию $\|f - f_\delta\| < \delta$. Тогда, если при стремлении δ к нулю параметр регуляризации $\alpha = \alpha(\delta)$ выбирается так, что $\lim_{\delta\to 0} \alpha(\delta) = 0$ и $\lim_{\delta\to 0} \dfrac{\delta^2}{\alpha(\delta)} = 0$, то элемент $u_{\alpha(\delta),\delta}$, на котором достигается* *минимум регуляризирующего функционала $M(u, f_\delta, \alpha)$, стремится к точному решению $u_{точн.}$ уравнения $Au = f$, т. е.* $\lim_{\delta \to 0} \|u_{\alpha(\delta),\delta} - u_{точн.}\| = 0$.

2 Итерационные методы регуляризации некорректных задач

Особое место среди методов решения некорректно поставленных задач занимают итерационные методы. Это связано с простотой их реализации средствами ПЭВМ.

Для этих методов параметром регуляризации является номер итерации, и должно быть сформулировано правило остановки, согласующее число итераций с погрешностью входных данных. В качестве первого примера рассмотрим простейший из итерационных методов — метод простой итерации.

2.1 Метод простой итерации

Пусть в $F = U$ — гильбертово пространство, A — линейный ограниченный положительный, самосопряженный оператор, уравнением I–ого рода $Au = f$ определена задача 1.1.

Случай точной правой части

Предположим, что при точной правой части f существует (единственное) решение u уравнения 1.1. Для его отыскания можно построить итеративный процесс вида:

$$u_{n+1} = u_n + \alpha(f - Au_n), \quad u_0 \in H \tag{2.1}$$

Покажем, что имеет место сходимость итерационного процесса 2.1 с точной правой частью, в предположении, что $u_0 = 0$ (что, вообще говоря, свойственно для случаев, когда априорная информация о точном решении отсутствует)

По индукции легко увидеть, что

$$u_n = A^{-1}\left(E - (E - \alpha A)^n\right) f \tag{2.2}$$

В силу того, что A является положительным самосопряженным оператором имеет место его интегральное представление:

$$A = \int\limits_0^M \lambda dE_\lambda, \tag{2.3}$$

где $M = \|A\|$, а E_λ — соответствующая спектральная функция. Т. к. уравнение 1.1 имеет точное решение, то $A^{-1}f = u$ из чего следует

$$u - u_n = A^{-1}\left(E - \alpha A\right)^n f \tag{2.4}$$

Для сходимости, очевидно достаточно было бы потребовать $\|E - \alpha A\| < 1$,

$$\|E - \alpha A\| = \sup \|1 - \alpha\lambda\|, \quad \lambda \in S_A, \tag{2.5}$$

где S_A — спектр оператора A. Для некорректных задач $\lambda = 0$ принадлежит спектру и $\|E - \alpha A\| \geqslant 1$. Воспользуемся интегральным представлением самосопряженного оператора

$$A^{-1}\left(E - \alpha A\right)^n f = \int\limits_0^M \left(1 - \alpha\lambda\right)^n \lambda^{-1} dE_\lambda f =$$

$$= \int\limits_0^\varepsilon \left(1 - \alpha\lambda\right)^n \lambda^{-1} dE_\lambda f + \int\limits_\varepsilon^M \left(1 - \alpha\lambda\right)^n \lambda^{-1} dE_\lambda f.$$

Потребуем теперь, чтобы при $\lambda > 0$ было $\|1 - \alpha\lambda\| < 1$. Это значит, что

$$0 < \alpha < \frac{2}{M} \tag{2.6}$$

Тогда, очевидно, последний из записанных интегралов стремится к нулю при $n \to \infty$. Рассмотрим интеграл по отрезку $[0;\varepsilon]$.

$$\int\limits_0^\varepsilon (1 - \alpha\lambda)^n \lambda^{-1} dE_\lambda f < \int\limits_0^\varepsilon \lambda^{-1} dE_\lambda f = \int\limits_0^\varepsilon dE_\lambda A^{-1} f = E_\varepsilon u \to 0,$$

т. к. E_ε сильно стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$ в силу свойств спектральной функции и обозначенных ранее предположений.

На основании этих рассуждений можем сформулировать теорему.

Теорема 2.1. *Итерационный процесс 2.1 при условии*

$$0 < \alpha < \frac{2}{\|A\|}, \quad M = \|A\| \tag{2.7}$$

сходится.

Случай приближенной правой части

Однако точная правая часть уравнения f обычно бывает неизвестна, а вместо нее известно δ–приближение f_δ, $\|f - f_\delta\| \leqslant \delta$. В этом случае, итеративный процесс принимает вид:

$$u_{n+1,\,\delta} = u_{n,\,\delta} + \alpha(f_\delta - Au_{n,\,\delta}), \quad u_{0,\,\delta} \in H \tag{2.8}$$

Под сходимостью метода 2.8 понимается утверждение о том, что приближение $u_{n,\,\delta}$ сколь угодно близко подходят к точному решению уравнения 1.3 при подходящем выборе n и достаточно малых δ. Теперь покажем, что при тех же условиях процесс 2.8 можно сделать сходящимся, если нужным образом выбрать число итераций n в зависимости от уровня погрешности δ. Как и ранее положим $u_{0,\,\delta} = 0$. Рассмотрим разность:

$$u - u_{n,\,\delta} = u - u_n + u_n - u_{n,\,\delta} \tag{2.9}$$

Величина $\Delta(u) = u - u_n$ стремится к нулю при $n \to \infty$ в силу доказанного случая для задачи с точно заданной правой частью. Рассмотрим $\|u_n - u_{n,\,\delta}\|$ по индукции, аналогично 2.2:

$$u_{n,\,\delta} = A^{-1}\left(E - (E - \alpha A)^n\right) f_\delta,$$

следовательно,

$$x_n - x_{n,\,\delta} = A^{-1}\left(E - (E - \alpha A)^n\right)(f - f_\delta).$$

Таким образом, ограничиваясь в процессе 2.8 числом итераций $n = n_\delta$, зависящим от δ так, чтобы $n_\delta \delta \to 0$ при $\delta \to 0$, получим метод, обеспечивающий сходимость к точному решению. Тем самым, на основе процесса 2.8 можно построить регуляризованный метод решения.

2.2 Итерационный метод неявного типа

2.2.1 Случай точно заданной правой части

Рассмотрим вопрос сходимости итерационного метода неявного типа, исходя их тех же предпосылок, что и в случае явной итерации (A — положительно определенный ограниченный и самосопряженный оператор, $u_0 = 0$) на схеме такого вида (вообще говоря, рассматриваемой в трудах О. В. Матысика):

$$\left(E + \alpha A^k\right) u_{n+1} = \left(E - \alpha A^k\right) u_n + 2\alpha A^{k-1} f, \quad k \in \mathbb{N} \tag{2.10}$$

Теорема 2.2. *Итерационный метод 2.10 при условии $\alpha > 0$ сходится в исходной норме гильбертова пространства*

2.2.2 Случай приближенно заданной правой части

Для случая приближенно заданной правой части f_δ уравнения $Au = f$ итерационная схема 2.10 принимает вид:

$$\left(E + \alpha A^k\right) u_{n+1,\,\delta} = \left(E - \alpha A^k\right) u_{n,\,\delta} + 2\alpha A^{k-1} f_\delta, \quad k \in \mathbb{N} \tag{2.11}$$

3 Численная модельная задача

Задача 3.1. *Рассматривается интегральное уравнение:*

$$-\int\limits_0^x x dt = \frac{x^2}{2} \tag{3.1}$$

Ядро уравнения задано аналитически $K(x,t) = 1$, правая часть $f(x) = \dfrac{x^2}{2}$, точное решение $y(x) = x$.

Входные данные: K —- ядро уравнения; f —- заданная правая часть; a — начало отрезка интегрирования, в нашем случае $a = 0$; $b = 1$ —- конец отрезка интегрирования, h —- шаг сетки. Результат —- вектор y приближений к решению в узлах сетки.

Как и в случае предыдущей задачи алгоритм был составлен в среде Matlab. Исходный код программы представлен сразу после иллюстраций работы.

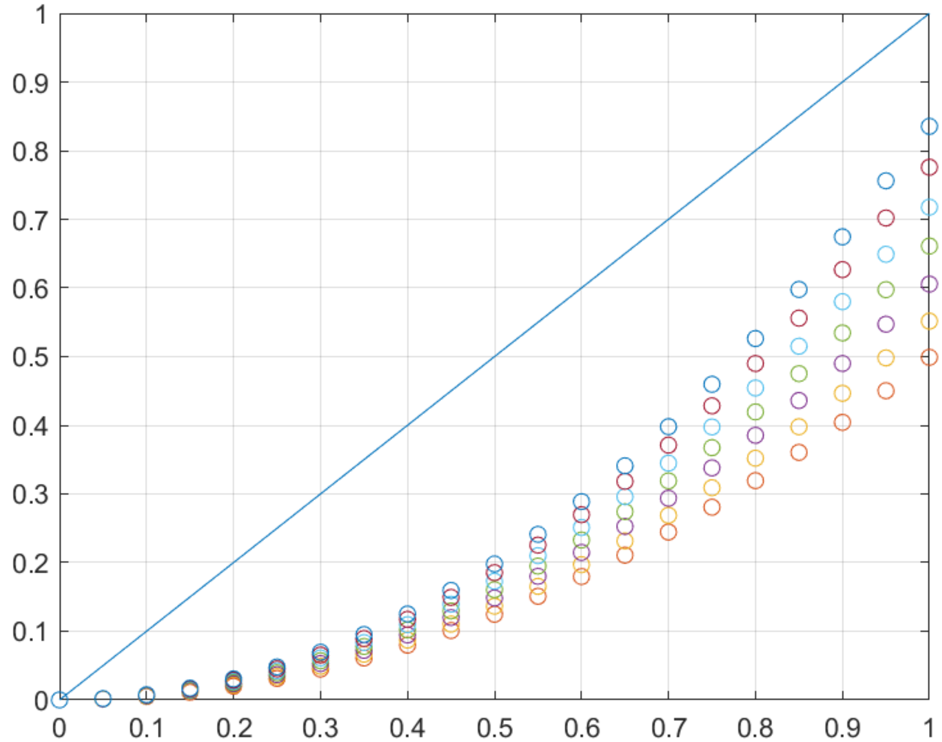
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

Рис. 1

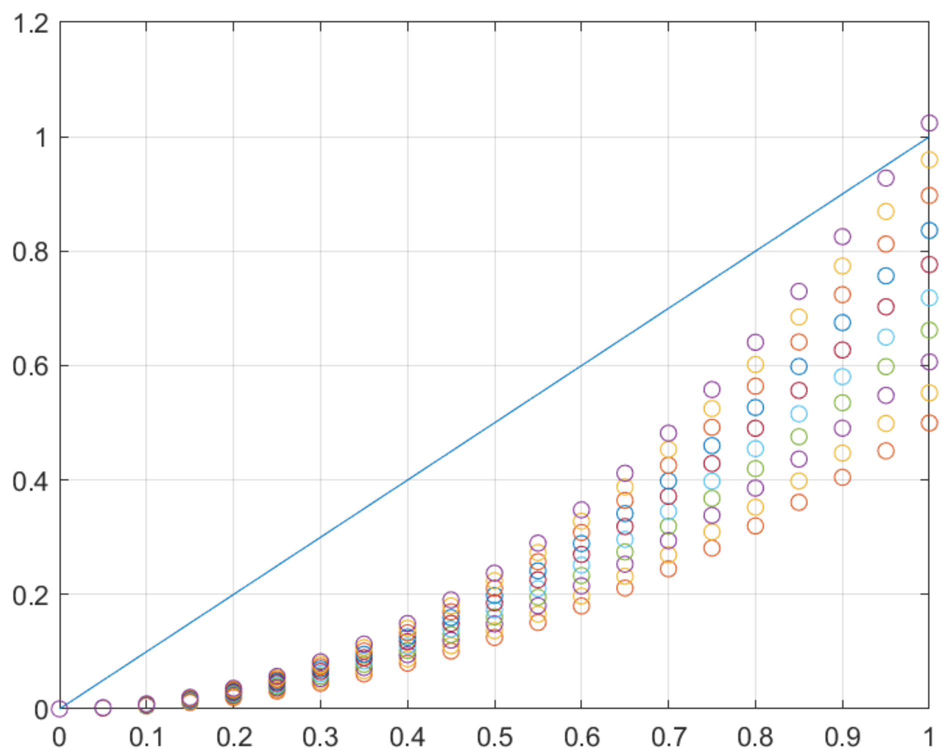
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

Рис. 2

Ниже приведён исходный код программы.

Файл `ItMeth.m`:

```
function [ya]=ItMeth(delta,alpha,K,f,a,b,h)
format long
x=a:h:b;
n=size(x,2);
f1=zeros(1,n);
for k=1:n
    f1(k)=f(x(k));
end
iter=round(1/sqrt(delta));
ya=zeros(iter,n);
for i=1:iter
        for j=1:n
            if i==1
                ya(i,j)=round(f1(j)*((-1).^(delta)));
            else
                s=0;
                for u=1:j
                    if u==1
                       b=h/2;
                    elseif u==n
                       b=h/2;
                    else
                       b=h;
                    end
                    s=s+b*K(x(j),x(u))*ya(i-1,u);
                end
                ya(i,j)=ya(i-1,j)+alpha*(f1(j)-s);
            end
        end
end
dlmwrite('C:approxmatrica.txt',ya,'delimiter',' ','newline','pc','precision',10);
end
```

Файл `modeltask.m`:

```
close all
clear all
clc
format short;
f=@(x) (x*x)/2;
K=@(x,s) -(x*0+s*0+1);
a=0;
b=1;
h=0.05;
x=a:h:b;
```

```
delta=0.01;
alpha=0.7;
y_exact=@(x) x;
n=size(x,2);
y1=zeros(1,n);
y2=zeros(1,n);
for j=1:n
    y1(j)=y_exact(x(j));
end
plot(x,y1);
hold on;
it=round(1/sqrt(delta));
y_approx=ItMeth(delta,alpha,K,f,a,b,h);
for i=1:it
    for k=1:n
    y2(k)=y_approx(i,k);
    end
plot(x,y2','o');
hold on
end
grid on;
hold off;
```

Заключение. Подведем итог проведенных изысканий. Предметом рассмотрения данной работы был класс некорректно поставленных задач, описываемых уравнением I–ого рода и некоторые из методов их решения. Было дано определение некорректно поставленной задачи. Объяснена актуальность и необходимость их рассмотрения. Разобраны возможные пути и подходы к их решению. В частности, рассмотрены следующие методы регуляризации:

- Метод квазирешений В. К. Иванова
- Метод А. Н. Тихонова
- Метод простой итерации
- Метод итераций неявного типа
- Метод итерационной регуляризации Фридмана

Для каждого из выше перечисленных методов была дана структура его задания и приведена его сходимость к точному решению.

В качестве иллюстрации их эффективности был приведен пример решения модельной задачи с применением метода простой итерации.