Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра _Дифференциальных уравнений и математической экономики____
наименование кафедры

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студента___4__ курса ___411____группы
направления (специальности) 01.03.02 Прикладная математика и информатика

______________________механико-математического факультета________________

______________________Семишкина Максима Сергеевича____________________

Научный руководитель
профессор., д.ф.-м.н., профессор ___________________ _Г.В. Хромова___
должность, уч. степень, уч. звание дата, подпись инициалы, фамилия

Заведующий кафедрой
зав.каф., д.ф.-м.н., профессор __________________ _С.И. Дудов____
должность, уч. степень, уч. звание дата, подпись инициалы, фамилия

Саратов 2024 год

Введение. Работа посвящена исследованию обратной задачи для уравнения теплопроводности, которая относится к области некорректно поставленных задач. В классическом понимании задача считается корректно поставленной, если выполняется три условия: существование решения, единственность решения и устойчивость решения к малым изменениям исходных данных.

В случае обратной задачи для уравнения теплопроводности, а именно задачи поиска функции тепловых источников, нарушается третье условие — условие устойчивости. Это связано с тем, что восстановление функции источников теплоты требует дифференцирования приближенной функции температуры, что является некорректно поставленной задачей.

Задача восстановления производной функции по ее приближенному заданию — это типичный пример простейшей некорректно поставленной задачи. Малые возмущения в исходной функции могут привести к значительным изменениям ее производной.

Цель работы. Цель данной работы — решить прикладную некорректно поставленную задачу о нахождении функции источников теплоты в уравнении теплопроводности с неустановившейся температурой.

Структура работы. Работа состоит из трех глав:

— В первой главе рассматриваются общие методы решения некорректно поставленных задач, такие как метод квазирешений, метод регуляризации Тихонова и метод невязки.

— Вторая глава посвящена описанию прямой и обратной задачи для уравнения теплопроводности. В ней подробно разбирается решение задачи об определении плотности тепловых источников, а также рассматриваются вопросы аппроксимации производных на отрезке. Представлен метод решения обратной задачи для уравнения теплопроводности.

— В третьей главе описывается алгоритм численной реализации разработанного метода решения обратной задачи. Проведен математический эксперимент на модельной задаче, в ходе которого вычисляется функция тепловых источников.

Актуальность работы. Актуальность работы обусловлена широким применением уравнения теплопроводности в различных областях науки и техники, а также сложностью решения обратных задач для этого уравнения.

Задачи:

— рассмотреть общие методы решения некорректно поставленных задач;

— исследовать метод решения обратной задачи о нахождении функции тепловых источников;

— составить алгоритм численной реализации метода решения обратной задачи.

1 Основное содержание работы

В первой главе "Обратные и некорректно поставленные задачи" рассматривается определение некорректно поставленной задачи и три метода решения некорректных задач: метод квазирешений, метод регуляризации Тихонова, метод невязки. Различают корректно поставленные и некорректно поставленные задачи. Понятие корректной постановки задач математической физики было введено Ж. Адамаром в связи с желанием выяснить, какие типы граничных условий наиболее естественны для различных типов дифференциальных уравнений (для эллиптических, например,— задача Дирихле и ей аналогичные, для гиперболических — задача Коши).

Решение всякой количественной задачи обычно заключается в нахождение «решения» u по заданным «исходным данным» $f, u = R(f)$. Мы будем считать их элементами метрических пространств U и F с расстояниями между элементами $\rho_F(f_1, f_2),\ \rho_U(u_1, u_2);\ f_1,\ f_2 \in F; u_1,\ u_2 \in U$. Метрика обычно определяется постановкой задачи.

Пусть определено понятие «решения» и каждому элементу $f \in F$ отвечает единственное решение $u = R(f)$ из пространства U. Задача определения решения $u = R(f)$ из пространства U по исходным данным $f \in F$ называется устойчивой на пространствах $(U,\ F)$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что из неравенства $\rho_F(f_1,\ f_2) \leq \delta(\varepsilon)$ следует $\rho_U(u_1,\ u_2) \leq \varepsilon$, где

$$u_1 = R(f_1), u_2 = R(f_2); f_1, f_2 \in F; u_1, u_2 \in U.$$

Задача определения решения u из пространств U по «исходным данным» f из пространства F называется корректно поставленной на паре метрических пространств $(U,\ F)$, если удовлетворяются требования (условия):

1. для всякого элемента $f \in F$ существует решение u из пространства U;
2. решение определяется однозначно;
3. задача устойчива на пространствах $(U,\ F)$.

Задачи, не удовлетворяющие этим требованиям, называются некорректно поставленными.

Следует отметить, что определение некорректно поставленных задач относится к данной паре метрических пространств $(U,\ F)$, так как в других метриках та же задача может быть корректно поставленной. Метричность пространств U и F используется для выражения близости элементов, как средство описания окрестностей пространств U и F.

Если класс F исходных данных выбран «естественно» для рассматриваемой задачи, то условия 1) и 2) характеризуют ее математическую определенность. Условие 3) связывают с физической детерминированностью задачи, а также с возможностью применения численных методов ее решения по приближенным исходным данным.

Корректная постановка задачи часто трактовалась как условие, которому должна удовлетворять всякая математическая задача, соответствующая какой-либо физической или технической задаче. Это поставило под сомнение целесообразность применения некорректно поставленных задач. Однако такая точка зрения, совершенно естественная в применении к некоторым явлениям, развивающимся во времени, не может быть перенесена на все задачи. Существует множество примеров некорректно поставленных задач, относящихся как к основному аппарату математики, так и к широкому классу прикладных задач.

Задача нахождения приближенного решения некорректно поставленной задачи вида

$$Au = f,\ f \in F,$$

в естественном классе элементов U является некорректно поставленной, например, в случаях, когда A – вполне непрерывный оператор. Исходными данными здесь являются правая часть уравнения f и оператор A.

Предположим, что оператор A нам известен точно, а правая часть уравнения известна с точностью δ, т. е. вместо ее точного значения f_T нам известен элемент $\tilde{f}$ и число δ такие, что $\rho_F(f_T, \tilde{f}) \leq \delta$. По этим данным, т. е. по $(\tilde{f}, \delta)$, требуется найти такой элемент $u_\delta \in U$, который стремился бы (в метрике U) к u_T при $\delta \to 0$. Такой элемент мы будем называть приближенным (к u_T) решением уравнения $Au = \tilde{f}$.

Элементы $u \in U$, удовлетворяющие условию $\rho_F(Au, \tilde{f}) \leq \delta$, будем называть сопоставимыми по точности с исходными $(\tilde{f}, \delta)$. Пусть Q_δ — совокупность всех таких элементов $u \in U$. Естественно приближенные решения уравнения $Au = \tilde{f}$ искать в классе Q_δ элементов u, сопоставимых по точности с исходными данными $(\tilde{f}, \delta)$.

Далее рассмотрим некоторые методы решения обратных и некорректно поставленных задач.

Рассмотрим общие методы решения некорректно поставленных задач. Исследуем операторное уравнение первого рода

$$Au = f, u \in U, f \in F, \tag{1.1}$$

при фиксированной правой части $f = f_0 \in F$. Предполагаем, что линейный непрерывный оператор A обратим и решение $u_0 = A^{-1} f_0$ принадлежит компактному множеству $M \subseteq U$, где U, F – банаховы пространства; выполнены условия аппроксимации

$$||A - A_h|| \le h,\ (D(A) = D(A_h) = D),\ ||f - f_\delta|| \le \delta, \tag{1.2}$$

где A_h – линейные непрерывные операторы, $h,\ \delta$ – достаточно малые параметры. Обозначим $S = \{A_h : ||A - A_h|| \le h,\ 0 \le h \le h_0\}$.

За приближенные решения уравнения (1.1) примем квазирешения для приближенных данных $\{f_\delta; A_h\}$ на компакте M, т.е. решения u_Δ экстремальной задачи

$$\inf\{||A_h u - f_\delta|| : u \in M\}. \tag{1.3}$$

Теорема 1.1. Если линейные операторы $A,\ A_h$ непрерывны и M - компакт, то задача (1.3) разрешима для любых $A_h \in S$ и $f_\delta \in F$ и последовательность экстремальных элементов $u_\Delta \to u_0$, т. е. $\{u_\Delta\}$ – регуляризованное семейство приближенных решений.

Теорема 1.2. Пусть $A,\ A_h$ – линейные замкнутые операторы с областью определения D, множество K – выпукло и компактно а U, пространство F рефлексивно. Тогда задача (1.3) на множестве $M = K \cap D$ имеет решение u_Δ и $u_\Delta \to 0$ при $\Delta \to 0$.

Теорема 1.3. Если $\overline{u_0}$ – единственное квазирешение уравнения (1.1), то в предположениях теоремы 1.1 или теоремы 1.2 $\lim\limits_{\Delta \to 0} ||u_\Delta - \overline{u_0}|| = 0$, где u_Δ – некоторое решение задачи (1.3).

Метод регуляризации Тихонова, как и метод квазирешений, относится к числу вариационных, т. е. построение приближенного решения связано с решением некоторой экстремальной задачи. Но исходная информация и минимизирующие функционалы в этих методах различны. Если в методе квазирешений основной предпосылкой является принадлежность точного решения (квазирешения) компактному множеству M, то в методе Тихонова необходимо знать погрешности приближенных данных, т. е. значения параметров h и δ в условиях аппроксимации (1.2).

В качестве приближенных решений уравнения (1.1) в методе регуляризации Тихонова принимаются экстремальные элементы следующей вариационной задачи:

$$\inf\{||A_h u - f_\delta||^p + \alpha ||Lu||^q : u \in D\}, \tag{1.13}$$

где $p,\ q > 1$ – целые и положительные числа, параметр $\alpha > 0$. В случае гильбертовых пространств будем полагать, что $p = q = 2$.

Лемма 1.1. Строго выпуклый функционал $g(u)$ достигает своего минимума на выпуклом множестве M не более чем в одной точке.

Лемма 1.2. Пусть линейный оператор $L : D \in U \to V$ обратим и пространство V строго выпукло. Тогда функционал $g(u) = ||Lu||^q$ для целого положительного $q > 1$ является строго выпуклым.

Теорема 1.4. Пусть $A,\ A_h,\ L$ – линейные замкнутые операторы, $U,\ F$ – рефлексивные пространства, V является E-простртнаством и выполнены условия (1.12) и (1.2). Тогда задача (1.13) разрешима единственным образом и последовательность экстремальных элементов u_Δ^α сходится к $u_0 = A^{-1} f_0 \in D$ по норме $||u||_1 = ||u|| + ||Lu|| + ||Au||$ при $\Delta \to 0$ и связи $\alpha(\Delta)$ такой, что $\alpha(\Delta) \to 0,\ (h + \delta)\dfrac{q}{\alpha}(\Delta) \to 0$, т. е. $\{u_\Delta^{\alpha(\Delta)}\}$ – регуляризованное семейство приближенных решений.

Теорема 1.5. Пусть выполнены следующие условия:

1. U – банахово, F и V – рефлексивные пространства,
2. $A,\ A_h$ – линейные замкнутые операторы,
3. для любого $C > 0$ множество $M_C = \{u : ||Lu|| \le C\}$ компактно.

Тогда задача (1.13) разрешима и экстремальные элементы $u_\Delta \to u_0 = A^{-1} f_0 \in D$ по норме пространства U при $\Delta \to 0$ и связи $\alpha(\Delta) \to 0,\ (h + \delta)^q \alpha(\Delta) \le C_1$ $(C_1 > 0)$.

Идея метода невязки заключается в том, что частный случай метода применялся для численного решения интегральных уравнений Фредгольма первого рода.

Допустим, что для некоторой положительной функции $\sigma(\Delta) \to 0$ при $\Delta \to 0$ множество

$$\Omega_\Delta = \{u : u \in D(A) = D(A_h),\ ||A_h u - f_\delta||^p \leq \sigma^p(\Delta)\} \qquad (1.26)$$

непустое для любого $\Delta \geq 0$ (т. е. для любых $h \geq 0, \delta \geq 0$). Приближенные решения по методу невязки определяются из решения задачи на условный экстремум:

$$\inf\{||Lu||^q : u \in \Omega_\Delta \cap D(L)\} = d. \qquad (1.27)$$

Теорема 1.6. Пусть операторы A, A_h, L и пространства U, F, V удовлетворяют условиям теоремы 1.6 из метода регуляризации Тихонова и точное решение $u_0 \in \Omega_\Delta \cap D(L)$ для любого $\Delta \geq 0$. Тогда задача (1.27) разрешима единственным образом и последовательность экстремальных элементов u_Δ задачи (1.27) сходится к $u_0 = A^{-1} f_0$ по норме
$||u||_1 = ||u|| + ||Lu|| + ||Au||$.

Во второй главе "Прямая и обратная задача для уравнения теплопроводности" рассматривается метод решения обратной задачи для уравнения теплопроводности (сначала стационарный случай, потом нестационарный). Сначала приведем решение задачи об определении плотности тепловых источников в тонком стержне длины l, в котором установилась стационарная температура с нулевыми значениями на концах при условии, что $||u_\delta - u||_{L^2[0,l]} \leq \delta$.

В математической постановке эта задача сводится к определению правой части уравнения

$$k(x)u''(x) - q(x)u(x) = f(x)$$

где $u(0) = u(l) = 0$, по известной $u(x)$.

Если $u(x)$ – точная температура, то $f(x)$ находится тривиально. Если же $u(x)$ задана приближенно, то в силу неустойчивости операции дифференцирования для нахождения приближений к $f(x)$ требуется привлечение методов регуляризации.

Теорема 2.3. Для сходимости $\triangle(\delta, T_\alpha, u') \to 0$ при $\alpha \to 0, \delta \to 0$ необходимо и достаточно выполнения согласования $\alpha = \alpha(\delta)$, удовлетворяющего условиям: 1) $\alpha(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$ и 2) $\delta(\alpha(\delta))^{-1} \to 0$ при $\delta \to 0$. Для сходимости $\triangle\left(\delta, T_\alpha^{(2)}, u''\right) \to 0$ при $\alpha \to 0, \delta \to 0$ необходимо и достаточно выполнения согласования $\alpha = \alpha(\delta)$, удовлетворяющего условию 1) и условию 3) $\delta(\alpha(\delta))^{-2} \to 0$ при $\delta \to 0$.

Теорема 2.4. При согласовании $\alpha = \alpha(\delta)$, удовлетворяющем условиям 1) и 3), указанным в теореме 2.3, имеет место сходимость

$$\left\| f_\delta^{\alpha(\delta)}(x) - f(x) \right\|_{L_\infty[0,l]} \to 0, \ \textit{при} \quad \delta \to 0$$

Приближенное решение поставленной задачи строится по следующей схеме:

1. вычисляется функция $w_\delta^\alpha(x) = T_\alpha v_\delta^\alpha$;
2. выбирается согласование $\alpha = \alpha(\delta)$ по теореме 2.4 ;
3. составляется функция $f_\delta \equiv f_\delta^{\alpha(\delta)}(x) = k(x) w_\delta^{\alpha(\delta)}(x) - q(x) u_\delta(x)$.
4. При наличии дополнительных условий на функцию $u(x)$ укажем конкретную формулу для выбора $\alpha = \alpha(\delta)$ и получим оценку погрешности приближенного решения.

1.0.1 Об аппроксимации производных на отрезке

1. Ранее для получения равномерных приближений к непрерывной функции $u(x)$, заданной на отрезке $[0, 1]$, было предложено семейство операторов Стеклова с разрывной областью значений (мы будем называть их разрывными операторами Стеклова)

$$S_\alpha u = \begin{cases} S_{\alpha 2} u, & x \in [0, 1/2] \\ S_{\alpha 1} u, & x \in [1/2, 1] \end{cases}$$

где

$$S_{\alpha 1} u = \frac{1}{\alpha} \int_{x-\alpha}^{x} u(t) dt, \quad S_{\alpha 2} u = \frac{1}{\alpha} \int_{x}^{x+\alpha} u(t) dt$$

Теорема 2.7. Для любой $u(x) \in C^m[0,1]$ при $\alpha \leq 1/2m$ имеет место сходимость

$$\left\|\Delta_\alpha^m u - u^{(m)}\right\|_{L_\infty[0,1]} \to 0 \quad \text{при} \quad \alpha \to 0 \tag{2.21}$$

Теорема 2.8. Для сходимости $\|\Delta_\alpha^m u_\delta - u\|_{L_\infty}$ при $\alpha \to 0, \delta \to 0$ достаточно выполнения согласования $\alpha = \alpha(\delta)$ такого, что $\alpha(\delta) \to 0 u\ \delta(\alpha(\delta))^{-m} \to 0$ при $\delta \to 0$.

Теперь перейдем к решению задачи об определении плотности тепловых источников в тонком стержне длины l с неустановившейся температурой. В этом случае можно использовать более простую аппроксимацию производных с помощью разностных формул. Традиционно разностные методы хорошо известны, но их недостаток состоит в том, что приходится доопределять функцию за границами отрезка, на котором она задана: $(a-\varepsilon, b+\varepsilon)$.

Но мы будем решать поставленную задачу по методике, предложенной Г. В. Хромовой. Будем применять разностный метод так, чтобы не выйти за границы отрезка. Для этого заданный отрезок $[a,b]$ разделим на две части ($[a, \frac{a+b}{2}]$ и $[\frac{a+b}{2}, b]$), для которых будем использовать формулы левой и правой конечных разностей соответственно.

Численное дифференцирование по переменной t будем проводить на разбиениях $\{t_j\}_0^{\frac{T}{2}}$, $\{t_j\}_{\frac{T}{2}}^T$ при каждом фиксированном x_k. Для этого будут использованы формулы (2.24)-(2.25), преобразованные для нестационарного случая. Первая формула используется для левой части отрезка (левая производная), вторая формула — для правой части отрезка (правая производная):

$$\Delta_{n2}^1 u_\delta = n(u_\delta(x_k, t_{j+1}) - u_\delta(x_k, t_j)),\ t_j \in \{t_j\}_0^{\frac{T}{2}},\ k = 0, 1, ..., n; \tag{2.28}$$

$$\Delta_{n1}^1 u_\delta = n(u_\delta(x_k, t_j) - u_\delta(x_k, t_{j-1})),\ t_j \in \{t_j\}_{\frac{T}{2}}^T,\ k = 0, 1, ..., n. \tag{2.29}$$

Численное дифференцирование по переменной x будем проводить на разбиениях $\{x_i\}_0^{\frac{1}{2}}, \{x_i\}_{\frac{1}{2}}^1$ при каждом фиксированном t_k. Для этого используем формулы (2.26)-(2.27), преобразованные для нестационарного случая. Первая формула используется для левой части отрезка (левая производная), вторая формула — для правой части отрезка (правая производная):

$$\widetilde{\Delta^2_{n2}}u_\delta = n^2(u_\delta(x_{i+2},t_k) - 2u_\delta(x_{i+1},t_k) + u_\delta(x_i,t_k)), \qquad (2.30)$$
$$x_i \in \{x_i\}_0^{\frac{1}{2}},\ k = 0,1,...,n;$$

$$\widetilde{\Delta^2_{n1}}u_\delta = n^2(u_\delta(x_i,t_k) - 2u_\delta(x_{i-1},t_k) + u_\delta(x_{i-2},t_k)), \qquad (2.31)$$
$$x_i \in \{x_i\}_{\frac{1}{2}}^{1},\ k = 0,1,...,n.$$

В результате приближенное решение задачи имеет вид:

$$f_\delta(x,t) = \begin{cases} \Delta^1_{n2}u_\delta - k\widetilde{\Delta^2_{n2}}u_\delta, t \in [0,\frac{T}{2}],\ x \in [0,\frac{1}{2}] \\ \Delta^1_{n1}u_\delta - k\widetilde{\Delta^2_{n2}}u_\delta, t \in [0,\frac{T}{2}],\ x \in [\frac{1}{2},1] \\ \Delta^1_{n2}u_\delta - k\widetilde{\Delta^2_{n1}}u_\delta, t \in [\frac{T}{2},T],\ x \in [0,\frac{1}{2}] \\ \Delta^1_{n1}u_\delta - k\widetilde{\Delta^2_{n1}}u_\delta, t \in [\frac{T}{2},T],\ x \in [\frac{1}{2},1] \end{cases}$$

В третьей главе "Алгоритм численной реализации метода решения обратной задачи" решается прикладная задача о нахождении значения функции тепловых источников в одномерном уравнении теплопроводности с неустановившейся температурой по приближенно заданному распределению температуры в стержне: $f_\delta(x,t) = \dfrac{\partial u_\delta(x,t)}{\partial t} - k\dfrac{\partial^2 u_\delta(x,t)}{\partial x^2}$, где $u(x,t)$ – точное распределение температуры, $f(x,t)$ – точное значение тепловых источников в стержне, $u_\delta(x,t)$ – приближенное распределение температуры, $f_\delta(x,t)$ – приближенное значение тепловых источников в стержне, k – коэффициент температуропроводности, $x \in [0,1],\ t \in [0,T]$.

Далее на модельной задаче проведем математический эксперимент при разных значениях δ и различных согласованиях $n(\delta)$. Для вычислений выберем следующие значения: $u(x,t) = t^2 + x^3,\ k = 1$, тогда $f(x,t) = 2t - 6x$ при $f(x,t) = \dfrac{\partial u}{\partial t} - k\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. Будем использовать полученные ранее формулы (2.28)-(2.31) для вычисления первой и второй производной.

Подбирая разные значения для δ и $n(\delta)$, получим следующие графики:

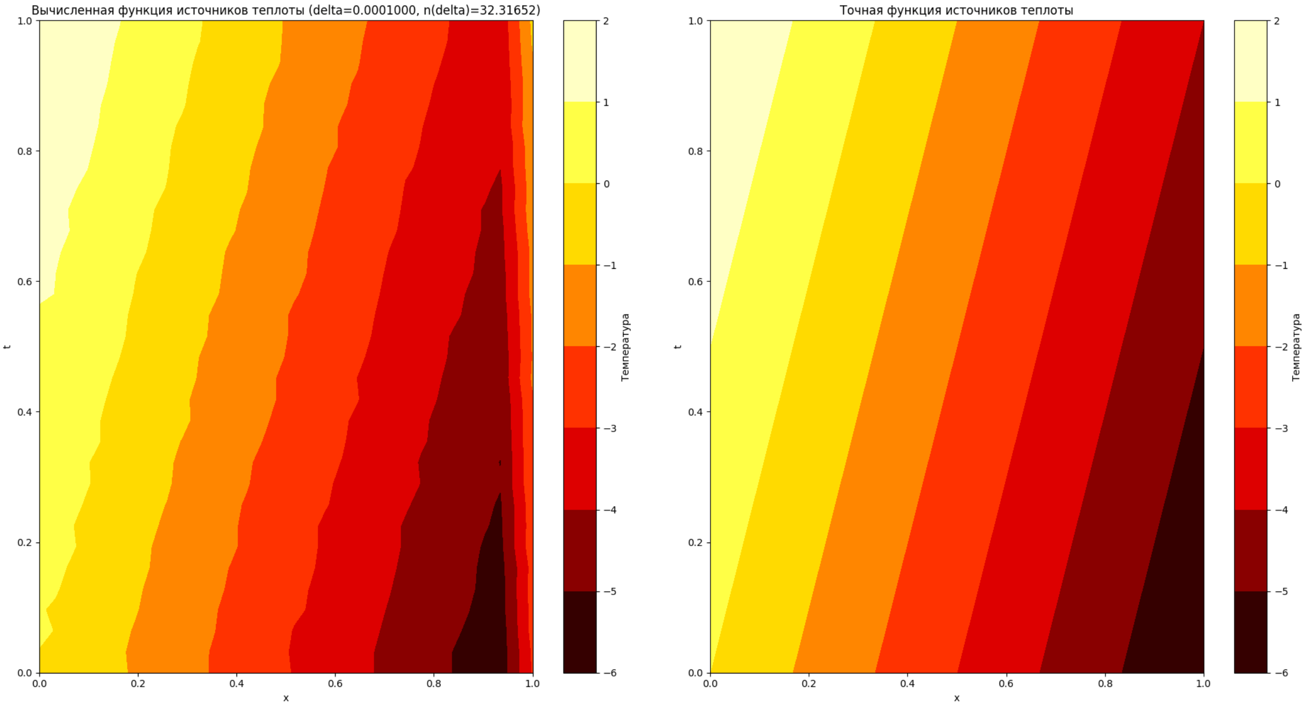

Рисунок 1 – $n(\delta) = \frac{15}{\delta^{\frac{1}{12}}},\ \delta = 0.0001$

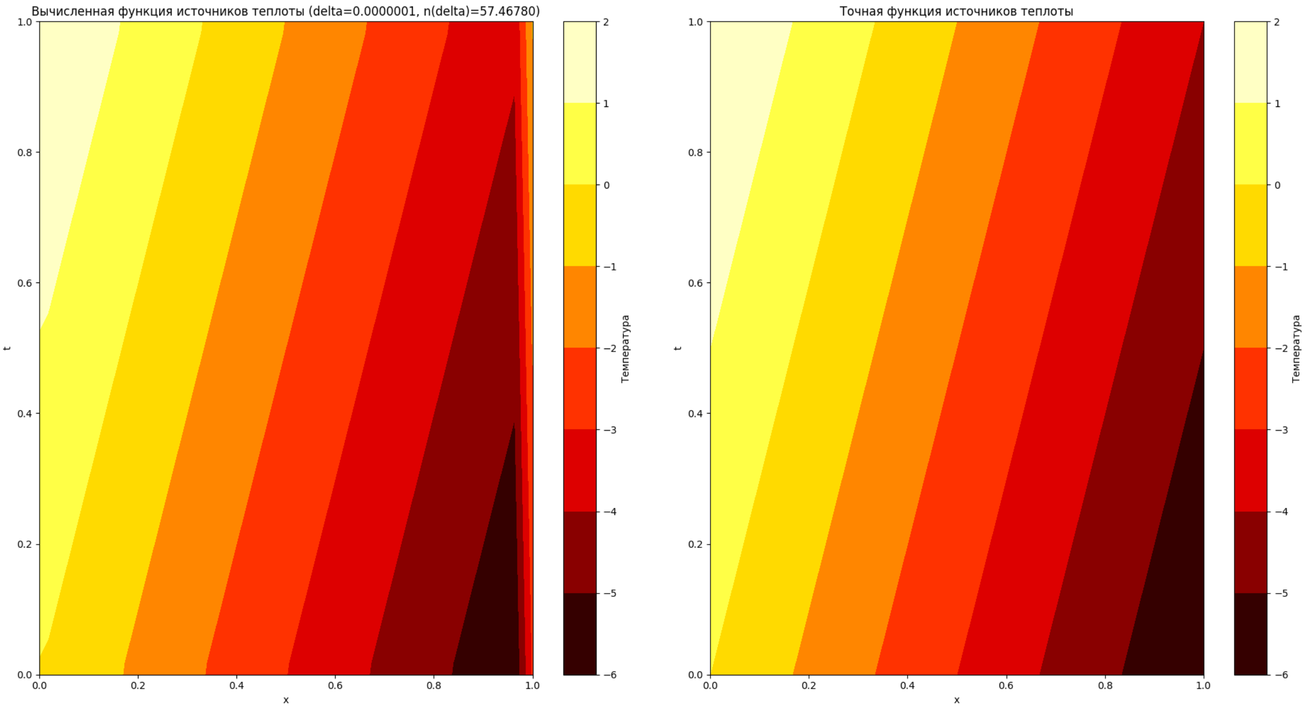

Рисунок 2 – $n(\delta) = \frac{15}{\delta^{\frac{1}{12}}},\ \delta = 0.0000001$

Анализируя полученные графики, можно сделать вывод о том, что уменьшая значение δ, мы получаем более точное приближение $f_\delta(x,t)$ к $f(x,t)$ для произвольно выбранных $n(\delta)$.

Заключение. В данной дипломной работе была исследована обратная задача для уравнения теплопроводности – задача о восстановлении функции источников теплоты. Было показано, что эта задача является некорректно поставленной, так как решение неустойчиво к малым изменениям исходных данных.

В работе был предложен метод решения данной обратной задачи, основанный на аппроксимации производных на отрезке. Для реализации метода был разработан алгоритм численного решения, эффективность которого была подтверждена в ходе математического эксперимента на модельной задаче.

Результаты моделирования показали, что разработанный алгоритм обладает хорошей точностью и позволяет восстанавливать функцию тепловых источников с высокой степенью достоверности.

Таким образом, в дипломной работе была успешно решена актуальная задача восстановления функции источников теплоты в уравнении теплопроводности. Предложенный метод и алгоритм могут найти широкое применение в различных областях науки и техники, где требуется решать обратные задачи для уравнения теплопроводности, например, в теплофизике, материаловедении, энергетике. Дальнейшие исследования могут быть направлены на разработку более эффективных методов регуляризации и оптимизацию алгоритма численного решения.