Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра Дифференциальных уравнений и математической экономики
наименование кафедры

РЕЗОЛЬВЕНТНЫЙ ПОДХОД К МЕТОДУ ФУРЬЕ

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студента(ки) 4 курса 411 группы
направления (специальности) 01.03.02 -Прикладная математика и информатика
код и наименование направления (специальности)
механико-математического факультета
наименование факультета, института, колледжа
Курыновой Жанны Алексеевны
фамилия, имя, отчество

Научный руководитель
доцент, к .ф.-м.н., доцент | | В.В. Корнев
должность, уч. степень, уч. звание | дата, подпись | инициалы, фамилия

Заведующий кафедрой
зав.каф., д.ф.-м.н., профессор | | С.И. Дудов
должность, уч. степень, уч. звание | дата, подпись | инициалы, фамилия

Саратов 2024 год

Введение. Бакалаврская работа посвящается изучению резольвентного подхода к методу Фурье в смешанной задаче для неоднородного волнового уравнения.

Актуальность работы. Современное развитие методов математического анализа и численного моделирования динамических процессов в науке и технике в значительной степени опирается на использование различных математических инструментов. Среди таких инструментов особое место занимают методы решения дифференциальных уравнений, которые широко применяются для описания поведения физических систем.

Цели и задачи работы. Обоснование метода Фурье при получении классического решения в смешанной задаче для неоднородного волнового уравнения с комплексным потенциалом и закрепленными краевыми условиями при минимальных требованиях на начальные данные. А так же реализация численного нахождения собственных значений.

Рассмотреть резольвентный подход к методу Фурье для анализа и решения смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения. Этот подход основывается на применении резольвентного оператора, который позволяет свести рассматриваемую задачу к серии более простых задач, решение которых может быть получено с использованием методов теории спектрального анализа.

Выпускная квалифицированная работа содержит в себе 5 основных глав: **Постановка задачи, асимптотика собственных значений дифференциального оператора, резольвента оператора и её свойства,. сходимость метода Фурье в смешанной задаче,численное нахождение собственных значений в методе Фурье.**

1 Основное содержание работы

В первом разделе рассматривается смешанная задача:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t) + f(x,t), \quad (x,t) \in Q = [0,1] \times [0,\infty), \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u'_t(x,0) = \psi(x), \tag{3}$$

где все функции комплекснозначные, причем

$$q(x) \in C[0,1], \quad \varphi(x) \in C^2[0,1], \quad \psi(x) \in C[0,1], \quad f(x,t) \text{ непрерывна в } Q. \tag{4}$$

Решением (1)-(3) называется функция $u(x,t)$, имеющая частные производные по x и t до второго порядка включительно, непрерывна в Q и удовлетворяет (1)-(3). Для существования решения кроме приведенных требований необходимо выполнение еще следующих условий:

$$\varphi(0) = \varphi(1) = \psi(0) = \psi(1) = 0, \tag{5}$$

$$\varphi''(0) + f(0,0) = \varphi''(1) + f(1,0) = 0. \tag{6}$$

Так же приводятся основные теоремы о классическом решении.

Теорема 1.1. *Пусть вещественные функции* $q(x) \in C^2[0,1], \varphi(x) \in C^3[0,1]$, $\psi(x) \in C^2[0,1]$, *причем* $\varphi(0) = \varphi''(0) = \varphi(1) = \varphi''(1) = \psi(0) = \psi(1) = 0$, $f(x,t)$ *дважды непрерывно дифференцируема по* x *и удовлетворяет условию*

$$f(0,t) = f(1,t) = 0, \quad t \in [0,\infty). \tag{1.7}$$

Тогда формальный ряд по методу Фурье и ряды, получающиеся из него почленным дифференцированием по x *и* t *до двух раз включительно, сходятся абсолютно и равномерно в* $\tilde{Q}_{T_\nu} = [0,1] \times [0,T_\nu]$ *при любом* $T_\nu > 0$, *и сумма* *формального ряда является классическим решением задачи (1)-(3).*

Классическое решение u(x,t) задачи (1)–(3) в $\prime Q_t$ ищется в виде

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t),$$

где $u_0(x,t)$ — решение задачи (1)–(3) при f(x,t) = 0, $u_1(x,t)$ — решение задачи (1)–(3) при $\varphi(x) = \psi(x) = 0$.

Теорема 1.2. *Классическое решение $u_0(x,t)$ при вещественной $q(x) \in C[0,1]$, $f(x,t) = 0$ существует и единственно тогда и только тогда, когда*

$$\begin{gathered} \varphi(x) \in C^2[0,1], \quad \psi(x) \in C^1[0,1], \\ \varphi(0) = \varphi''(0) = \varphi(1) = \varphi''(1) = \psi(0) = \psi(1) = 0, \end{gathered} \tag{1.8}$$

и находится по методу Фурье.

Теорема 1.3. *Для разрешимости задачи (1)-(3) при $\varphi(x) = \psi(x) = 0, q(x) \in C[0,1]$и вещественной необходимо и достаточно, чтобы $f(x,t)$ была непрерывной с условием (1.7), и функции $p(x,t) = \int_0^t \tilde{f}(x \pm (t-\tau), \tau) d\tau$ были непрерывно дифференцируемы по x и t, где $\tilde{f}(x,t)-$ нечетное, 2-периодическое продолжение $f(x,t)$ по переменной x на всю числовую ось. Ряд, построенный по методу Фурье, сходится равномерно по $x \in [0,1]$ при фиксированном t, и его сумма есть классическое решение задачи (1)-(3). См. [?, стр. 39]*

В дипломной работе показывается, что с помощью резольвентного подхода можно обосновать существование решения задачи (1)-(3) при более слабых условиях.

Во втором разделе изучается асимптотика собственных значений следующего дифференциального оператора L (7):

$$l(y) = \frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + ... + p_n(x) y, \tag{7}$$

и краевые условия

$$U_\nu(y) = 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n, \tag{8}$$

где $U_\nu(y)$ линейные формы относительно следующих переменных

$$y_a, y_a', \ldots, y_a^{(n-1)}; \quad y_b, y_b', \ldots, y_b^{(n-1)}/$$

Определение 2.2. *Нормированные условия имеют вид:*

$$U_\nu(y) \equiv U_{\nu 0}(y) + U_{\nu 1}(y) = 0$$

где

$$U_{\nu 0}(y) = a_\nu y_0^{(k_\nu)} + \sum_{j=0}^{k_\nu - 1} \alpha_{\nu j} y_0^{(j)}, \quad U_{\nu 1}(y) = \beta_\nu y_1^{(k_\nu)} + \sum_{j=0}^{k_\nu - 1} \beta_{\nu j} y_1^{(j)},$$

$$n - 1 \geqslant k_1 \geqslant k_2 \geqslant \ldots \geqslant k_n \geqslant 0, \quad k_{\nu+2} < k_\nu.$$

Определение 2.3. *Нормированные краевые условия называются регулярными, если:*

1. При n=$2\mu - 1$, числа θ_0 и θ_1 не равны нулю. Причем числа заданы равенством:

$$\theta_0 + \theta_1 s = \begin{vmatrix} \alpha_1\omega_1^{k_1} & \ldots & \alpha_1\omega_{\mu-1}^{k_1} & (\alpha_1 + s\beta_1)\omega_\mu^{k_1} & \beta_1\omega_{\mu+1}^{k_1} \ldots \beta_1\omega_n^{k_1} \\ \ldots & & & & \\ \alpha_n\omega_1^{k_n} & \ldots & \alpha_n\omega_{\mu-1}^{k_n} & (\alpha_n + s\beta_n)\omega_\mu^{k_n} & \beta_n\omega_{\mu+1}^{k_n} \ldots \beta_n\omega_n^{k_n} \end{vmatrix}$$

2. При n=2μ, числа θ_{-1} и θ_1 не равны нулю. Причем числа заданы равенством:

$$\frac{\theta_{-1}}{s} + \theta_0 + \theta_1 s = \begin{vmatrix} \alpha_1\omega_1^{k_1} \ldots \alpha_1\omega_{\mu-1}^{k_1} & (\alpha_1 + s\beta_1)\omega_\mu^{k_1} & (\alpha_1 + \frac{1}{s}\beta_1)\omega_{\mu+1}^{k_1} & \beta_1\omega_{\mu+2}^{k_1} \ldots \beta_1\omega_n^{k_1} \\ \ldots & & & \\ \alpha_n\omega_n^{k_n} \ldots \alpha_n\omega_{\mu-n}^{k_n} & (\alpha_n + s\beta_n)\omega_\mu^{k_n} & (\alpha_n + \frac{1}{s}\beta_n)\omega_{\mu+1}^{k_n} & \beta_n\omega_{\mu+2}^{k_n} \ldots \beta_n\omega_n^{k_n} \end{vmatrix}$$

Теорема 2.1. *Собственные значения дифференциального оператора n-го порядка в интервале $[0, 1]$, порожденного регулярными краевыми условиями, образуют две бесконечные последовательности $\lambda_k', \lambda_k''(k = N, N+1, N+2, \ldots)$, где N - целое число.*

1. Нечетный случай:

— *n=4q-1:*

$$
\begin{aligned}
\lambda_k' &= (-2k\pi i)^n \left[1 - \frac{n \ln_0 \xi^{(1)}}{2k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right],\\
\lambda_k'' &= (2k\pi i)^n \left[1 + \frac{n \ln_0 \xi^{(2)}}{2k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right],
\end{aligned}
$$

— *n=4q+1:*

$$
\begin{aligned}
\lambda_k' &= (2k\pi i)^n \left[1 + \frac{n \ln_0 \xi^{(1)}}{2k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right],\\
\lambda_k'' &= (-2k\pi i)^n \left[1 - \frac{n \ln_0 \xi^{(2)}}{2k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right],
\end{aligned}
$$

где $\xi^{(1)} u \xi^{(2)}$ - корни уравнения $\theta_1\xi + \theta_0 = 0$, отвечающего области S с ν, соответственно нечетным и четным областям.

2. *Четный случай:*

— $n = 2\mu, \theta_0^2 - 4\theta_{-1}\theta_1 \neq 0$

$$
\begin{aligned}
\lambda_k' &= (-1)^\mu (2k\pi)^n \left[1 \mp \frac{\mu \ln_0 \xi'}{k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right],\\
\lambda_k'' &= (-1)^\mu (2k\pi)^n \left[1 \mp \frac{\mu \ln_0 \xi''}{k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right],
\end{aligned}
$$

где $\xi' u \xi''$ - корни уравнения $\theta_1\xi^2 + \theta_0\xi + \theta_{-1} = 0$, отвечающего области S_0.

— $n, n = 2\mu, u\theta_0^2 - 4\theta_{-1}\theta_1 = 0$

$$
\begin{aligned}
\lambda_k' &= (-1)^\mu (2k\pi)^n \left[1 \mp \frac{\mu \ln_0 \xi}{k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right)\right],\\
\lambda_k'' &= (-1)^\mu (2k\pi)^n \left[1 \mp \frac{\mu \ln_0 \xi}{k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right)\right],
\end{aligned}
$$

где ξ-(двойной) корень уравнения $\theta_1\xi^2 + \theta_0\xi + \theta_{-1} = 0$, отвечающего области S_0, а выбор верхнего или нижнего знака аналогичен предыдущему.

В первых трех случаях все собственные значения, начиная с опреде-

ленного момента, являются простыми, тогда как в четвертом случае они могут быть простыми или двукратными, начиная с определенного момента.

Доказательство приводится в частном случае, который используется в методе Фурье.

В третьем разделе изучаются свойства резольвенты и проекторы Рисса и доказывается основное свойство резольвенты.

Теорема 3.5. *Имеет место формула*

$$S_r(f,x) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r} R_\lambda f d\lambda,$$

где $S_r(f,x) = \sum\limits_{|\lambda_k|<r}(f,\psi_k)\varphi_k$, $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ *- система всех собственных присоединенных функций для тех* λ_k, *для которых* $|\lambda_k| < r, \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ *- система биортогональная все системе* $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$. *Нумерация* $\{\varphi_k\}$ *идет в порядке возрастания модулей характеристических чисел с учетом кратности*

Четвертый раздел является основным. В нем дается обоснование метода Фурье при получении классического решения в смешанной задаче для неоднородного волнового уравнения при более слабых условиях.

Теорема 4.1. *Если u(x, y) - классическое решение задачи (1)-(3), то для него справедлива формула 9, причем ряд сходится равномерно по* $x \in [0,1]$ *при каждом фиксированном* t.

$$\begin{gathered} u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\le n_0}\int_{\gamma_n}\right)\Big[(R_\lambda\varphi)(x)cos\rho t+ \\ +\frac{1}{\rho}(R_\lambda\psi)sin\rho t + \int\limits_0^t (R_\lambda f)(x,\tau)\frac{sin\rho(t-\tau)}{\rho}d\tau\Big]d\lambda. \end{gathered} \tag{9}$$

Во втором подразделе выводятся асимптотические формулы для резольвенты и на их основе доказывается сходимость формального ряда классического решения в частном случае.

В третьем подразделе дается доказательство основной теоремы. Сначала записывается формульное решение 9 в виде

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) + u_3(x,t) + u_4(x,t),$$

где

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int_{\gamma_n}\right)\left(\int_0^t \left(R_\lambda^0 f_1\right)\frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho}d\tau\right)d\lambda,$$

$$u_2(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int_{\gamma_n}\right)\left(R_\lambda\psi\right)\frac{\sin\rho t}{\rho}d\lambda,$$

$$u_3(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int_{\gamma_n}\right)\left(\int_0^t \left(R_\lambda f_1 - R_\lambda^0 f_1\right)\frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho}d\tau\right)d\lambda,$$

$$u_4(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int_{\gamma_n}\right)\left((R_\lambda\varphi)\cos\rho t + \int_0^t (R_\lambda f_2)\right)\frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho}d\tau)d\lambda.$$

Теорема 4.3. *Если выполняются условия ниже, то при любых $x\in[0,1]$ и $t\in\mathbb{R}$ формальный ряд (9) сходится, и его сумма (x,t) является классическим решением задачи (1)-(3).*

$$q(x)\in C[0,1],\quad \varphi(x)\in C^2[0,1],\quad \psi(x)\in C'[0,1],$$
$$f(x,t)\ \textit{непрерывна в}\ Q,$$

$$\varphi(0)=\varphi(1)=\psi(0)=\psi(1)=0,$$

$$\varphi''(0)+f(0,0)=\varphi''(1)+f(1,0)=0,$$

$$f'_t(x,t)\in C(Q).$$

В пятом разделе приводится описание программы, которая находит собственные значения смешанной задачи

$$-y''(x)+q(x)y(x)-\lambda y(x)=0\quad q(x)\geq 0,$$

$$y(0)=y(\pi)=0$$

с помощью метода Рунге-Кутты 4-5 порядка для различных значений параметра ρ.На вход подается функция $q(x)$(неотрицательная), отрезок и интервал, на котором берется значение ρ. На выходе получаем график решения смешанной задачи при заданных ρ.

Заключение.Таким образом, мы дали обоснование метода Фурье при получении классического решения в смешанной задаче для неоднородного волнового уравнения с комплексным потенциалом и закрепленными краевыми условиями при минимальных требованиях на начальные данные. Используемый резольвентный подход не требует никакой информации о собственных и присоединен- ных функциях соответствующей спектральной задачи.