МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Интерполяция многочленами четной степени

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 218 группы

направление 01.04.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Петраченкова Ивана Анатольевича

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.н., доцент ____________ В.Г. Тимофеев

Заведующий кафедрой
и.о. зав. кафедрой, д.ф.-м.н. ____________ П.А. Терехин

Саратов 2024

Введение Сплайны в математике известны давно, в конце XIX века английские инженеры так называли гибкую линейку, которую применяли для проектирования закруглений железных дорог. Математика получила этот термин благодаря работам Шонберга в 1946 г., который назвал так рассмотренные им функции с «кусочными» свойствами. Сплайн В. С. Рябенького был первым интерполяционным минимальным сплайном. К настоящему времени имеется большая серия статей и ряд монографий, освещающих многие стороны теоретических исследований и широкого практического применения различных сплайнов.

Существует большое количество разнообразных пространств сплайнов с различными полезными свойствами: гладкостью, качественной аппроксимацией, численной устойчивостью, неотрицательностью базисных функций, минимальной кратностью накрытия носителями функций базиса при заданном порядке аппроксимации. Некоторые пространства сплайнов обладают интерполяционным локальным базисом, определенными фильтрационными свойствами. Выбор пространства сплайнов обычно определяется типом данных и целями, которые ставятся при их обработке.

Первая цель - улучшение качества приближения: при одинаковых вычислительных затратах абсолютные погрешности аппроксимации сплайнами меньше, чем абсолютные погрешности аппроксимации многочленами, а при одинаковых погрешностях уменьшается объем вычислений. Сплайны позволяют избежать осцилляций. Для сходимости аппроксимации к аппроксимируемой функции предъявляются более слабые требования, чем в случае многочленов. Например, интерполяция сплайнами невысоких степеней сходится даже для непрерывных функций.

Вторая цель - резкое уменьшение вычислительных трудностей как при построении алгоритмов решения задач, так и при дальнейшей работе с аппроксимантами, которые на каждом звене представляют собой многочлены невысоких степеней или иные элементарные функции.

Необходимо отметить, что сплайновые функции представляют собой мощное и привлекательное в вычислительном отношении средство современной теории аппроксимации.

Сплайны обладают рядом интересных свойств:

– если аппроксимируемая функция неотрицательна, то такова и аппроксимирующая функция;

– сплайновая аппроксимация равномерно сходится к аппроксимируемой функции при возрастании степени используемых полиномов или числа узлов;

– можно построить точные границы ошибок аппроксимации, использующие только свойство непрерывности функции;

– достаточно точные аппроксимации получаются даже при низких степенях полиномов и малом числе узлов, поэтому необходимая память и вычислительные требования невелики

Данная магистерская работа будет посвящена интерполяции многочленами четной степени. Работа состоит из введения; раздела с определениями и понятиями; и основной части, которая состоит из 3 разделов, каждый из которых содержит 2 подраздела, которые имеют разделения на пункты; заключения; 2 приложений; списка используемых литературных источников, состоящего из 20 именований.

1 и 2 раздел имеют схожую структуру, только в 1 разделе мы рассматриваем интерполяцию для функции одной переменной, а во втором для функции двух переменных. В 1-ом подразделе 1 и 2 раздела мы сформулировали постановку задачи. Во 2-ом подразделе 1 и 2 раздела мы оцениваем точность построенной задачи. 3 раздел посвящен примерам построения интерполяционного многочлена. В 1-ом подразделе 3 раздела описан практический пример интерполяции для функции одной перемееной, решенный в программе написанной на языке программирования Python. Во 2-ом подразделе 3 раздела описан практический пример интерполяции для функции двух перемеенных, решенный в программе написанной на языке программирования Python.

Основная часть Пусть $f(x) \in C[a,b]$, $a, b \in \mathbf{R}, a < b$, и заданы два множества узлов:

$$\Delta'_n : \bar{x}_0 = a < \bar{x}_1 < \ldots < \bar{x}_n < b = \bar{x}_{n+1}, \tag{1}$$

$$\Delta_n : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b \quad (n \geqslant 2). \tag{2}$$

$$x_{i-1} < \bar{x}_i < x_i \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{3}$$

Определение 2.1. Функция $S_2(x; f)$ называется интерполяционным параболическим сплайном для функции $f(x)$, если
а) $S_2(x) \in \mathbf{P}_2, \quad x \in (\bar{x}_i, \quad \bar{x}_{i+1}) \quad (i = 0, 1, \ldots, n)$;
б) $S_2(x) \in C^{(1)}\,[a, b]$;
в) $S_2\,(x_i) = f\,(x_i) \quad (i = 0, 1, \ldots, n)$.
Числа $\bar{x}_i$ называются узлами сплайна, а числа x_i- узлами интерполяции.

Узлы сплайна (дефекта 1) - это точки возможного разрыва его старшей производной, в данном случае второй производной.

Для сплайнов из определения 2.1 будем использовать также обозначения $S_2(x)$ и $S(x)$. Сплайн $S_2(x)$ зависит от $n+3$ параметров и, следовательно, имеет, два свободных параметра. Поэтому на интерполяционный параболический сплайн налагают еще два дополнительных условия.

Если функция $f(x)$ является $(b-a)$ - периодической, то обычно требуют, чтобы сплайн $S(x)$ также был $(b-a)$ - периодическим и имел непрерывную первую производную на $(-\infty, \infty)$ и чтобы точка $x_0 = a$ не являлась узлом сплайна. Таким образом, периодический сплайн $S(x)$ удовлетворяет условиям:

$$S_2^{(i)}(a) = S_2^{(i)}(b) \quad (i = 1, 2). \tag{4}$$

В общем случае наиболее употребительны следующие краевые условия:

$$S_2'(a) = a_n, \quad S_2'(b) = b_n; \tag{5}$$

$$S_2''(a) = A_n, \quad S_2''(b) = B_n, \tag{6}$$

где a_n, b_n, A_n, B_n - заданные действительные числа.

$$S_2''(z-0) = S_2''(z+0), \quad z = \bar{x}_i \quad (i = 1, n). \tag{7}$$

Теорема 2.1. Если

$$0 < \bar{h}_i < h_i \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1; n \geqslant 2),$$

то интерполяционный параболический сплайн, удовлетворяющий одному из краевых условий (4) - (7), существует и определяется единственным образом.

При изучении сходимости интерполяционных сплайнов в качестве параметра приближения выбирается величина

$$\|\Delta_n\| = \max_{0\le i\le n-1}(x_{i+1} - x_i),$$

где x_i узлы интерполяции (2) Для $x(t) \in C[a, b]$ величина

$$\omega(x, \delta) = \max_{\substack{t, t+h\in[a,b] \\ |h]\leqslant\delta}} |x(t+h) - x(t)| \quad (0 \leqslant \delta \leqslant b-a)$$

Теорема 2.2. Если $f(x) \in C^{(2)}$ или $f(x) \in C^{(2)}[a, b]$, то для интерполяционного параболического сплайна, удовлетворяющего периодическим краевым условиям (при $f \in C^{(2)}$) или краевым условиям (5)-(7) (при $f(x) \in C^{(2)}[a, b]$), имеют место неравенства

$$\left|f^{(s)}(x) - S^{(s)}(x)\right| \leqslant K_s \left\|\Delta_n\right\|^{2-s} \alpha_n, \quad x \in [a, b] \quad (s = 0, 1, 2), \tag{8}$$

$$K_0 = \frac{7}{8}, K_1 = K_2 = \frac{7}{2}. \tag{9}$$

где для периодических краевых условий и условий (7)

$$\alpha_n = \omega\left(f'', \|\Delta_n\|\right), \tag{10}$$

для краевых условий (5)

$$\begin{aligned}\alpha_n = \tfrac{3}{7}\omega\left(f'', \|\Delta_n\|\right) + \max\Big\{\tfrac{4}{7}\omega\left(f'', \|\Delta_n\|\right), \tfrac{8}{7}\Big|\left[f\left(x_0, x_1\right) - a_n\right] h_0^{-1} - \\ -\tfrac{1}{2}f''\left(x_0\right)\Big|, \tfrac{8}{7}\Big|\left[f\left(x_{n-1}, x_n\right) - b_n\right] h_{n-1}^{-1} + \tfrac{1}{2}f''\left(x_n\right)\Big|\Big\}\end{aligned} \tag{11}$$

для краевых условий (6)

$$\alpha_n = \omega\left(f'', \|\Delta_n\|\right) + \frac{2}{7}\max\left(\left|f''\left(x_0\right) - A_n\right|, \left|f''\left(x_n\right) - B_n\right|\right), \tag{12}$$

В силу локальности интерполяционных условий, на которых интерполяционный многочлен второй степени будет определяться однозначно, ограничимся рассмотрением лишь одного треугольника. Пусть $\triangle-$ невырожденный треугольник в $\mathbb{R}^2$. При $i = 1, 2, 3$ через a_i будем обозначать вершины треугольника $\triangle$, через n_i - единичную нормаль к стороне $[a_i, a_{i+1}]$, через b_i - середину стороны $[a_i, a_{i+1}]$, при этом полагают $a_4 = a_1$. Через α, β, θ обозначим углы при вершине a_1, a_2, a_3 соответственно; при этом пусть выполняются неравенства $0 < \alpha \leqslant \beta \leqslant \theta < \pi$.

Далее без ограничения общности будем считать, что вершины $\triangle$ имеют следующие координаты: $a_1 = (b, 0)$, $a_2 = (-a, 0)$, $a_3 = (0, h)$, причем $0 < a \leqslant b$ и длина наибольшей стороны треугольника $\triangle$ равна $a + b = H$. Обозначим через

$$D_\eta f(x,y) = \eta^{(1)}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \eta^{(2)}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

производную по направлению $\eta = \left(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}\right), \left(\eta^{(1)}\right)^2 + \left(\eta^{(2)}\right)^2 = 1$ и пусть

$$\begin{gathered} W^{s+1}M = \left\{f(x,y) : D^l_{\eta_1,\ldots,\eta_l} f(x,y) \in \mathbb{C}(\triangle) \quad (0 \leqslant l \leqslant s+1) \qquad \text{и} \right. \\ \left. \forall (x,y) \in \triangle, \quad \forall \eta_1, \ldots, \eta_{s+1} \quad \left|D^{s+1}_{\eta_1,\ldots,\eta_{s+1}} f(x,y)\right| \leqslant M\right\}, \end{gathered}$$

где $\mathbb{C}(\triangle)$ обозначает класс непрерывных функций на треугольнике $\triangle$. Через $P_2(x,y) = P_2(f; x, y)$ будем обозначать многочлен, степень которого по совокупности переменных не превосходит двух, удовлетворяющий следующим интерполяционным условиям:

$$f\left(a_i\right) = P_2\left(a_i\right) \quad (i = 1, 2, 3); \tag{13}$$

$$D_{n_i} f\left(b_i\right) = D_{n_i} P_2\left(b_i\right) \quad (i = 1, 2, 3). \tag{14}$$

или удовлетворяющий интерполяционным условиям (13), а также (14) при $(i = 2, 3)$

$$D^2_{n_1^2} f\left(b_1\right) = D^2_{n_1^2} P_2\left(b_1\right), \tag{15}$$

Положим $e(x, y) = f(x, y) - P_2(x, y)$; $\quad e_{i,j}(x, y) = \frac{\partial^{i+j} e(x,y)}{\partial x^i \partial y^j}$; $\quad e_{i,j} = e_{i,j}(0, 0)$.

Теорема 3.1. Существуют такие абсолютные положительные константы $C_{i,j}$, что для любой функции $f \in W^3 M$ и любого невырожденного треугольника $\triangle$, любого $(x, y) \in \triangle$ и для интерполяционного многочлена $P_2(x, y)$, заданного условиями (13)-(14), имеют место следующие оценки:

$$\left\| \frac{\partial^{s+j} e(x, y)}{\partial x^s \partial y^j} \right\| \leqslant \begin{cases} C_{s,j} M H^{4-s-j} & (0 \leqslant j \leqslant 1, \quad 0 \leqslant s \leqslant 2 - j), \\ C_{0,2} M H \operatorname{ctg} \alpha & (j = 2, \quad s = 0), \end{cases} \tag{16}$$

Теорема 3.2. Существуют такие абсолютнье положительнье константы $C_{i,j}$, что для любой функции $f \in W^3 M$ и любого невърожденного треугольника $\triangle$, любого $(x, y) \in \triangle u$ для интерполяиионного многочлена $P_2(x, y)$, заданного условиями (13), (14), (15), имеют место следующие оценки:

$$\left\| \frac{\partial^s e(x, y)}{\partial x^{s-j} \partial y^j} \right\| \leqslant C_{s-j,j} M H^{3-s} \quad (0 \leqslant j \leqslant 2, \quad j \leqslant s \leqslant 2). \tag{17}$$

Перейдем к реализации построения сплайна для функции одной и двух переменных. Были написаны программы для построения параболического сплайна для функции одной переменной и для построения интерполяционного параболического сплайна на треугольниках для функции двух переменных на языке программирования Python с помощью библиотеки matplotlib, код программ находится в приложении А, Б.

Входные данные для функции одной переменной, это $a, b \in R, a < b, n \in R$ они нужны для построения набора узлов вида (1-2). Данны значения функции в точках x_i, то есть $f(x_i)(i = 0, 1, ..., n)$ и значения производной функции в точках a, b ,то есть $a_n = f'(a), b_n = f'(b)$. Теперь с помощью этих входных данных построим сплайн по формуле

$$S(x) = f\left(x_i\right) + m_i\left(x - x_i\right) + c_i\left(x - x_i\right)^2 + d_i\left(x - \bar{x}_{i+1}\right)^2_+ . \tag{18}$$

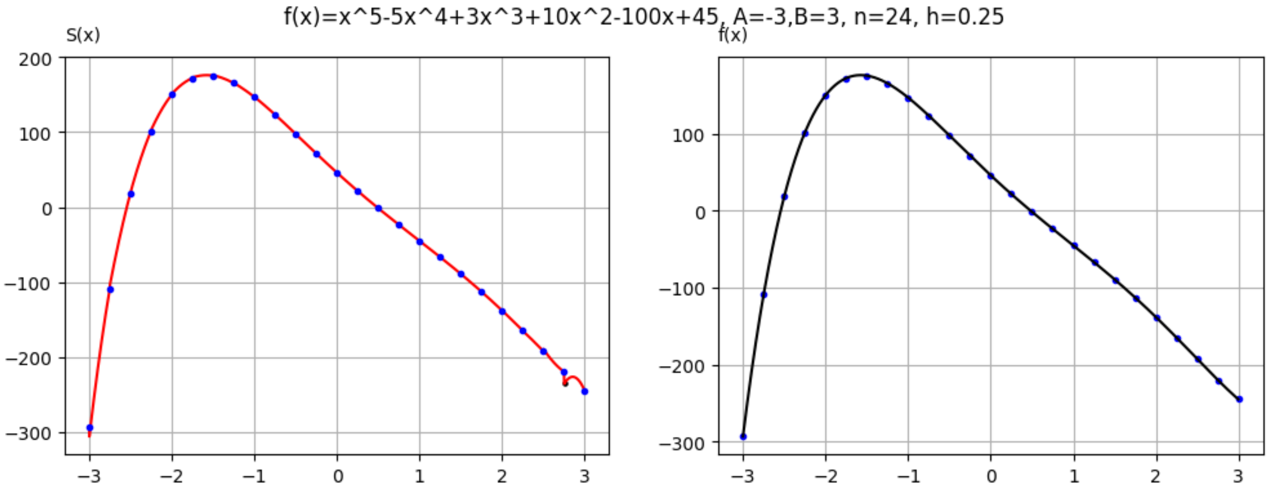
для каждого отрезка $[x_i, x_{i+1}]$. Чтобы это сделать нужно сначала найти все коэффициенты m_i, так как d_i, c_i вычисляются по формулам

$$d_i = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\bar{h}_i(\bar{h}_i - h_i)} - \frac{m_i + m_{i+1}}{2} \cdot \frac{h_i}{\bar{h}_i(\bar{h}_i - h_i)}, \tag{19}$$

$$c_i = \frac{m_{i+1} - m_i}{2h_i} - \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h_i(\bar{h}_i - h_i)} + \frac{m_i + m_{i+1}}{2(\bar{h}_i - h_i)}. \tag{20}$$

Строим и решаем систему для того чтобы найти m_i, в программе решение этой системы реализованно с помощью метода прогонки.

Пример работы программы для Функции $f(x) = x^3 sin(x) - 3x^2, x \in [-5, 5]$, $n = 20$, $h = 0.5$



С наибольшей погрешностью $|f(x) - S(x)| = 15.773779$ в точке $x = 2.7525$

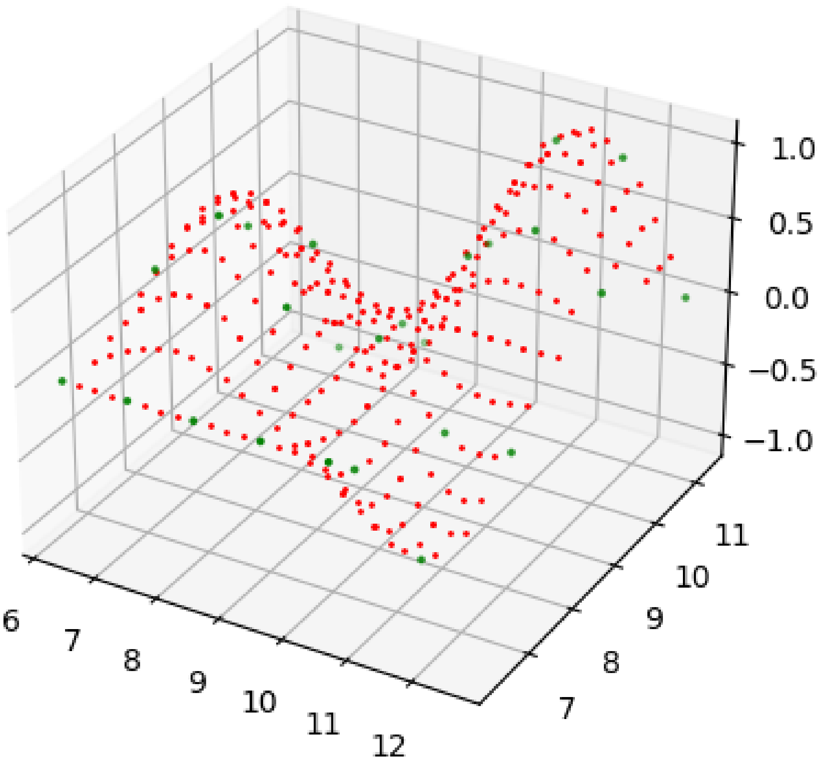
Входные данные для функции от двух переменных: Точки A, B с координатами $A = (a_x, a_y), B = (b_x, b_y)$, заданы числа n_x, n_y которые нужны для построения сетки.

Определяются шаги $h_x = \dfrac{2(b_x - a_x)}{2n_x + n_y - 3}$ для оси OX и $h_y = \dfrac{b_y - a_y}{n_y}$ для оси OY, координаты узлов $v_{i,j}$ высчитываются по формуле

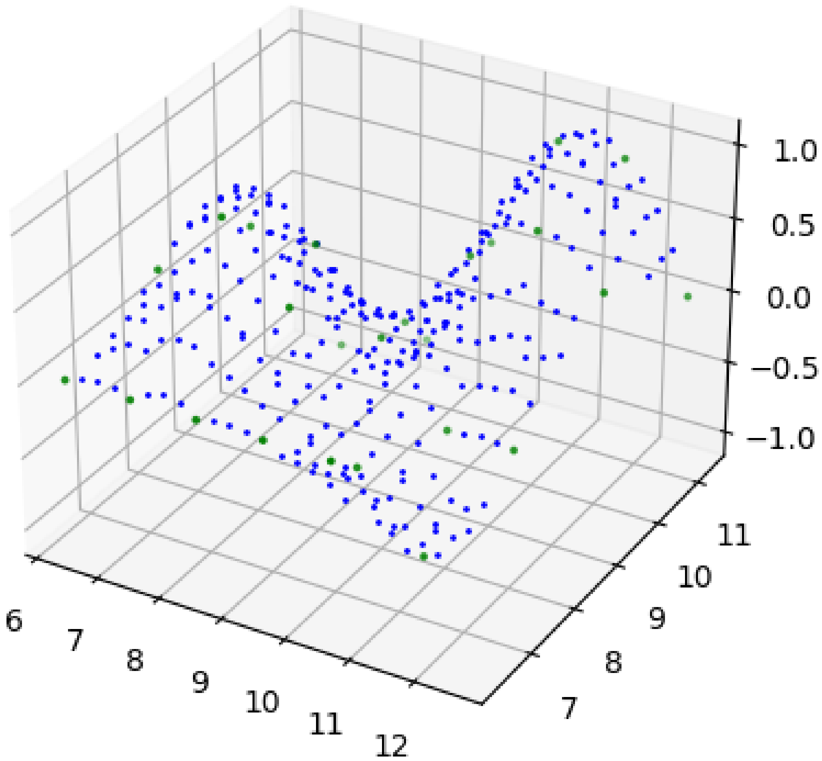
$$v_{i,j} = (a_x + ih_x + \frac{jh_x}{2}, a_y + jh_y), \text{где} \quad (i = 0, \ldots, n_x), (j = 0, \ldots, n_y)$$

Далее для треугольников с вершинами в точках $a_1 = v_{i,j}, a_2 = v_{i+1,j}, a_3 = v_{i,j+1}$, где $(i = 0, \ldots, n_x - 1), (j = 1, \ldots, n_y)$ и $a_1 = v_{i,j}, a_2 = v_{i+1,j}, a_3 = v_{i+1,j-1}$, где $(i = 1, \ldots, n_x - 1), (j = 1, \ldots, n_y)$ строится параболические сплайны соответствующие условиям (13,14), то есть решается система линейных уравнений, в программе решение этой системы реализованно с помощью метода Гаусса.

Пример работы программы для функции $f(x, y) = \sin(x)\sin(y)$ $x \in [2\pi, 4\pi], y \in [2\pi, 4\pi]$ $n_x = 5, n_y = 5$



$f(x, y)$



$P_2(x, y)$

Заключение. На примере интерполяции параболическими сплайнами было показано, что, выбирая подходящим образом сетку узлов сплайна, можно добиться сходимости процесса интерполяции (ограниченности константы Лебега), в то время как использование классической схемы интерполяции ведет к расходящемуся интерполяционному процессу. Успеха удалось добиться за счет того, что в альтернативной схеме при выборе узлов сплайна учитываются величины соседних промежутков сетки данных. Однако не удалось показать, что при предложенной альтернативной схеме интерполяции константа Лебега будет всегда ограничена.

В заключении, тема интерполяции различными методами крайне важна, так как класс задач, решаемых этим способом, достаточно широк, он охватывает многие сферы деятельности, встречающихся как в основных вопросах математики, так и в её приложениях к естествознанию и технике.