МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математики и методики ее преподавания

Уравнения высших степеней в курсе алгебры 9 класса

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 5 курса 521 группы
направления 44.03.01 Педагогическое образование
механико-математического факультета
Морозовой Анны Александровны

Научный руководитель
доцент, к.п.н., доцент ______________________ Т. А. Капитонова
Зав. кафедрой
к.п.н., доцент ______________________ И. К. Кондаурова

Саратов 2024

Введение. В новых Федеральных государственных образовательных стандартах основного общего образования (ФГОС ООО) (2021г.) усилен акцент на формирование умений оперировать понятиями: числовое равенство, уравнение с одной переменной, числовое неравенство, неравенство с переменной; умение решать линейные и квадратные уравнения, дробно-рациональные уравнения с одной переменной, системы двух линейных уравнений, линейные неравенства и их системы, квадратные и дробно-рациональные неравенства с одной переменной, в том числе при решении задач из других предметов и практических задач; умение использовать координатную прямую и координатную плоскость для изображения решений уравнений, неравенств и систем.

В курсе алгебры средней школы вводится формула для решения квадратного уравнения, а из курса физики видно, насколько необходима эта формула для решения многих физических вопросов. Например, в задачах, связанных с равноускоренным движением.

Уравнения третьей и более высоких степеней играют не меньшую роль, чем квадратные уравнения. Так, например:

– в физике: уравнения движения тела в пространстве позволяет определить траекторию движения тела, его скорость и ускорение;

– в инженерии: уравнения высших степеней необходимы для проектирования мостов или зданий, чтобы правильно определить параметры конструкций;

– в экономике – помогают определить равновесную цену и количество товара на рынке;

– в медицине – для подсчета оптимальных условий роста и развития организма.

Для современного человека математическое образование является важнейшим компонентом общего образования и общей культуры, так как практически все, что окружает его – это все так или иначе связано с математикой.

В школьных учебниках уравнения высших степеней рассматриваются, однако, решение таких уравнений часто вызывают значительные трудности, не все уравнения поддаются решению. Умение их решать является важным навыком для учеников, так как задания с данными уравнениями встречаются в контрольных измерительных материалах при проведении государственной итоговой аттестации и в материалах олимпиад. Также изучение уравнений высших степеней позволяет развивать логическое мышление и абстрактное мышление у учащихся.

Уравнения высших степеней отражены у следующих авторов: И. Р. Шафаревич, А. Х. Фаргиева, М. К. Абдусобирова, Л. С. Сагателова, Е. В. Сенькова и др.

Цель бакалаврской работы: теоретически рассмотреть и практически разработать методические материалы по теме «Уравнения высших степеней» для учащихся 9 класса.

Задачи:

1) рассмотреть основные понятия по теме «Уравнения высших степеней» и методы их решения;

2) проанализировать содержание темы «Уравнения высших степеней» в учебнике «Алгебра-9»;

3) разработать и апробировать методические материалы по теме «Уравнения высших степеней» для учащихся 9 класса.

Для решения поставленных задач использовались следующие методы исследования: анализ математической и учебно-методической литературы; изучение нормативных документов; разработка и апробация методических материалов.

Структура работы: титульный лист; введение; два раздела («Уравнения высших степеней в курсе алгебры 9 класса: теоретические аспекты» и «Уравнения высших степеней в курсе алгебры 9 класса: практические аспекты»); заключение; список использованных источников.

Основное содержание работы. Первый раздел «Уравнения высших степеней в курсе алгебры 9 класса: теоретические аспекты» посвящен решению первых двух задач бакалаврской работы.

Определение 1. Многочленом от одной переменной x называется выражение вида $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, (1)

где a_0, a_1, ..., a_n – некоторые действительные числа, называемые коэффициентами многочлена.

Определение 2. Пусть с – некоторое действительное число. Значением многочлена (1) при x=c называется число, получаемое, если в (1) вместо переменной x подставить число c и произвести указанные действия, т.е. $a_n \mathrm{c}^n + \cdots + a_1 \mathrm{c} + a_0$.

Для сокращения записи используют функциональную символику для обозначения многочленов, например: $\mathrm{P}(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, тогда значение этого многочлена при x=c обозначают $\mathrm{P(c)} = a_n \mathrm{c}^n + \cdots + a_1 \mathrm{c} + a_0$.

Определение 3. Число c называется корнем многочлена $\mathrm{P}(x)$, если $\mathrm{P(c)} = 0$.

Определение 4. Алгебраическим уравнением называется уравнение $P(x) = 0$, где $P(x) -$ некоторый многочлен. Если $P(x) -$ многочлен n-й степени, то уравнение $P(x) = 0$ называется алгебраическим уравнением n-й степени.

Уравнения вида $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$. при $n \geq 3$ называют уравнениями высших степеней.

Определение 5. Два уравнения называются равносильными (эквивалентными), если всякий корень первого уравнения является корнем второго и, наоборот, всякий корень второго является корнем первого уравнения.

Решить алгебраическое уравнение на множестве R значит найти все его действительные корни или доказать, что уравнение корней не имеет.

Теорема 1. Остаток от деления многочлена $\mathrm{P}(x)$ на $x - a$ равен $\mathrm{P}(a)$ (т.е. равен значению этого многочлена при $x = a$).

Теорема 2. Многочлен $P(x)$ делится на $x - a$ тогда и только тогда, когда число a является его корнем.

Методы решения уравнений высших степеней

1. *Разложение на множители.*

Метод разложения на множители заключается в следующем: если

$f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x)$,

то всякое решение уравнения $f(x) = 0$ является решением совокупности уравнений $f_1(x) = 0;\ f_2(x) = 0; \ldots;\ f_n(x) = 0$.

2. *Введение новых (вспомогательных) переменных.*

3. *Графический метод.*

Применение метода разложения возможно в сочетании с различными приемами: <u>группировки и вынесения общего множителя; использование теоремы Безу; с помощью схемы Горнера.</u>

Метод введение новых (вспомогательных) переменных позволяет легко решать уравнения четвертой степени, имеющие вид $ax^4 + bx^2 + c = 0$.

Графический метод использует свойства графиков и функций.

В учебник «Алгебра, 9» Ю. Н. Макарычева, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешкова, С. Б. Суворовой под редакцией С. А. Теляковского включён разнообразный по содержанию материал. Здесь расширяются известные учащимся сведения об уравнениях и неравенствах.

В параграфе учебника «Уравнения с одной переменной» систематизируются и расширяются известные учащимся сведения о целых и дробных уравнениях. В пункте «Целое уравнение и его корни» вводятся определения понятий целого уравнения с одной переменной, корня целого уравнения с одной переменной, степени целого уравнения с одной переменной, а также формулы корней уравнений первой и второй степени с одной переменной.

Учащиеся знакомятся с такими приёмами решения уравнений третьей и более высоких степеней, как использование разложения многочленов на множители и введение новой переменной. Вводится понятие «биквадратное уравнение» и рассматривается способ решения биквадратных уравнений.

Завершает данный параграф пункт «Дробные рациональные уравнения». В нем включены достаточно сложные дробные рациональные уравнения, решение которых связано с решением целых уравнений высших степеней и последующим исключением посторонних корней, если они имеются, а также с применением каких-либо искусственных приёмов.

Основная цель изучения данного материала состоит в том, чтобы сформировать умение учащихся решать целые уравнения высших степеней, используя разложение многочленов на множители и введение новой переменной, а также ознакомить учащихся с некоторыми приёмами решения дробных рациональных уравнений.

В ходе изучения данного параграфа учащиеся овладевают умением решать уравнения вида $P(x) = 0$, где $P(x)$ – многочлен третьей или более высокой степени, используя разложение многочлена $P(x)$ на множители и опираясь на условие равенства нулю произведения. Девятиклассники учатся также применять метод введения новой переменной для решения некоторых целых уравнений, в частности биквадратных уравнений.

Изучение данного параграфа завершается ознакомлением учащихся с приёмами решения дробных рациональных уравнений. Учащиеся встречаются со случаями, когда решение дробных рациональных уравнений сводится к решению целых уравнений высших степеней с последующим исключением посторонних корней.

Ещё одним важным способом решения уравнений третьей и более высоких степеней, с которым знакомятся девятиклассники, является введение новой переменной. Учащиеся впервые встречаются с понятием биквадратного уравнения, узнают о приёме решения биквадратных уравнений.

На изучение темы «уравнения с одной переменной» отводится 5 часов.

Этот материал позволяет научить школьников решать уравнения высших степеней, используя методы разложения многочленов на множители и замены переменной. Также учащиеся узнают о некоторых способах решения дробно-рациональных уравнений.

Второй раздел «Уравнения высших степеней в курсе алгебры 9 класса: практические аспекты» посвящен решению последней задачи бакалаврской работы.

Основной государственный экзамен (ОГЭ) представляет собой форму государственной итоговой аттестации, используются контрольные измерительные материалы (КИМ). КИМ представляют собой комплект документов, разработанных на основании школьной программы и содержащих определенный набор знаний. Базой для его составления выступают ФГОСы. Главной задачей материалов становится проверка знаний школьника и определение их соответствия требованиям учебной программы.

Уравнения высших степеней являются заданиями повышенной сложности, поэтому они относятся ко второй части – задания с развернутым ответом.

Нами разработаны планы-конспекты уроков по теме «Целое уравнение высших степеней».

Урок 1 – изучение нового материала, цель которого: способствовать формированию представления о понятии «целое уравнение», познакомить со способами решения целых уравнений. Данный урок знакомит учеников различными способами решения уравнений (разложение на множители; введение новой переменной).

Фрагмент урока: усвоение новых знаний.

Разберем способы решения уравнений.

1 способ (Разложение на множители):

$2x^3 - x^2 - 8x + 4 = 0.$

– Посмотрите внимательно на данное уравнение и способ, которым мы будем решать и подумайте, как нам лучше это сделать? (Сгруппировать 1-й и 2-й, 3-й и 4-й член уравнения, а затем выполнить разложение на множители левой части уравнения).

– Получим: $x^2(2x - 1) - 4(2x - 1) = 0.$

$(x^2 - 4)(2x - 1) = 0,$

– Когда произведение равно нулю? (Когда один из множителей равен нулю)

– Значит: $x^2 - 4 = 0,\ x = -2; 2$ или $2x - 1 = 0, x = 0.$

Ответ. $-2; 0{,}5; 2.$

– Следующее уравнение у доски решит ученик:

$0{,}5x^3 - 72x = 0.$

Решение. $x(0{,}5x^2 - 72) = 0,\ x = 0$ или $0{,}5x^2 - 72 = 0, 0{,}5x^2 = 72,$

$x^2 = 144, x = \pm 12.$

Ответ. $-12;\ 0;\ 12.$

2 способ (Введение новой переменной):

– Данный способ преимущественно используют для решения уравнений вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$, которые называются биквадратными.

– Записываем уравнение: $4x^4 - 13x^2 + 3 = 0.$

– Для решения данного уравнения введем новую переменную $y = x^2$ и решим уравнение относительно новой переменной: $4y^2 - 13y + 3 = 0.$

– Какое уравнение мы получили? (Квадратное).

$D = 169 - 48 = 121,$

$x = \frac{13+11}{8} = 3, x = \frac{13-11}{8} = 0{,}25.$

– Теперь сделаем обратную замену $y = x^2$.

$x^2 = 3;\ x = \pm\sqrt{3}; x^2 = 0{,}25; x = \pm 0{,}5.$

Ответ. $-\sqrt{3};\ -0{,}5; 0{,}5;\ \sqrt{3}.$

Урок 2 – комбинированный урок, цель которого: закрепить умения и навыки решения целых уравнений используя методы разложения многочлена на множители и введения новой переменной. На данном уроке идет повторение ранее изученных способов решения уравнений, в конце урока проводится самостоятельная работа.

Приведем один из вариантов самостоятельной работы.

Вариант 1.

1. Решите уравнение: $x^3 - x^2 + 7x - 7 = 0.$

Решение.

$x^3 - x^2 + 7x - 7 = 0,$

$x^2(x-1) + 7(x-1) = 0,$

$(x-1)(x^2+7) = 0,$

$x^2 + 7 > 0$ при всех значениях x, поэтому $\mathrm{x} - 1 = 0$. Значит, $\mathrm{x} = 1$.

Ответ. 1.

2. Решите уравнение: $x^4 + 2x^2 - 8 = 0$.

Решение. Сделаем замену $\mathrm{t} = \mathrm{x}^2$, тогда уравнение принимает вид

$\mathrm{t}^2 + 2\mathrm{t} - 8 = 0.$

$\mathrm{D} = 4 + 32 = 36,$

$\mathrm{t}_1 = \frac{-2+6}{2} = 2,$

$\mathrm{t}_2 = \frac{-2-6}{2} = -4,$

Сделаем обратную замену $\mathrm{t} = \mathrm{x}^2$, тогда

$\mathrm{x}^2 = -4$, не имеет корней.

$\mathrm{x}^2 = 2$ имеет корни $-\sqrt{2}, \sqrt{2}$.

Таким образом, решение исходного уравнения: $\mathrm{x} = -\sqrt{2},\ \mathrm{x} = \sqrt{2}$.

Ответ. $-\sqrt{2}, \sqrt{2}$.

3. Решите уравнение: $(\mathrm{x}^2 + 5\mathrm{x} - 3)(\mathrm{x}^2 + 5\mathrm{x} + 4) = 30$.

Решение. Так как для него трудно найти способ решения, будем работать с исходной записью. Введем замену $\mathrm{x}^2 + 5\mathrm{x} = \mathrm{y}$.

Получим новое уравнение, решим его:

$(\mathrm{y} - 3)(\mathrm{y} + 4) = 30,$

$\mathrm{y}^2 + \mathrm{y} - 42 = 0,$

$\mathrm{D} = 1 + 168 = 169,$

$y_1 = \frac{-1+13}{2} = 6,$

$y_2 = \frac{-1-13}{2} = -7.$

Сделаем обратную замену.

$$\begin{cases} x^2 + 5x = 6, \\ x^2 + 5x = -7 \end{cases}$$

$x^2 + 5x = 6,$

$x^2 + 5x - 6 = 0,$

$D = 25 + 24 = 49,$

$x_1 = \frac{-5+7}{2} = 1,$

$x_2 = \frac{-5-7}{2} = -6,$

$x^2 + 5x = -7,$

$x^2 + 5x + 7=0,$

$D = 25 - 28 = -3 < 0 \ \Rightarrow$ нет корней.

Ответ. $-6;\ 1.$

Урок 3 – контрольная работа на тему «Целые уравнения высших степеней», цель которой: проверить уровень знаний, умений и навыков, полученных за изучение темы: «целые уравнения и его корни».

Приведем один из вариантов контрольной работы.

Вариант 1.

№1. Определите степень уравнения:

А) $3x^4 + 10x + 8x^5 = 0$ (Ответ: 5).

Б) $4x^4 + 5x^9 - 10 = 0$ (Ответ: 9).

В) $3x + 4x^2 - 9 = 0$ (Ответ: 2).

№2. Решите уравнение $3x^3 - 2x^2 - x = 0$. В ответ запишите наибольший корень.

Решение.

$3x^3 - 2x^2 - x = 0,$

$x(3x^2 - 2x - 1) = 0,$

$x = 0$ или $3x^2 - 2x - 1 = 0$, $D = 4 + 12 = 16$, $x = \frac{2+4}{6} = 1$, $x = \frac{2-4}{6} = -\frac{1}{3}$.

Ответ. 1.

№3 Решите уравнение $(x + 5)(x - 9)(x + 11) = 0$. В ответ запишите сумму корней уравнения.

Решение.

$(x+5)(x-9)(x+11)=0,$

$x+5=0, x=-5$ или $x-9=0, x=9$ или $x+1=0, x=-1,$

$-5+9+(-1)=3.$

Ответ. 3.

№4 Решите уравнение $4x^4-5x^2+1=0.$

Решение.

$4x^4-5x^2+1=0.$

Сделаем замену: $x^2=y.$

$4y^2-5y+1=0,$

D=25-16=9,

$y=\frac{5+3}{8}=1,$

$y=\frac{5-3}{8}=\frac{1}{4},$

Сделаем обратную замену: $x^2=y.$

$x^2=1,$

$x=\pm 1,$

$x^2=\frac{1}{4},$

$x=\pm\frac{1}{2}.$

Ответ. $-1;\ -\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}; 1.$

№5. Решите уравнение: $x^3+2x^2-x-2=0.$

Решение.

$x^2(x+2)-(x+2)=0,$

$(x+2)(x^2-1)=0,$

$x+2=0, x=-2$ или $x^2-1=0, x^2=1, x=\pm 1.$

Ответ. $-1;\ 0;\ 1.$

Заключение. Основные результаты, полученные в ходе написания бакалаврской работы.

1. Рассмотрены основные понятия по теме «Уравнения высших степеней» и методы их решения.

Алгебраическим уравнением n-й степени называется уравнение вида $P(x) = 0$, где $P(x) -$ многочлен степени n.

Алгебраические равнения степени 3 и выше называют уравнениями высших степеней.

Методы решения уравнений высших степеней: разложение на множители; введение новой переменной; графический метод.

2. Проведен анализ содержания темы «Уравнения высших степеней» в учебнике «Алгебра-9» (авторы Макарычев Ю.М. и др.).

3. Разработаны и апробированы методические материалы (планы-конспекты уроков, варианты контрольной работы) по теме «Уравнения высших степеней» для учащихся 9 класса.

Апробация разработанных материалов проходила на базе 9 «А» класса МБОУ СШ №17 г. Камышин Волгоградской области (учитель Морозова Анна Александровна).

Практическая значимость бакалаврской работы состоит в том, что разработанные методические материалы могут быть использованы учителями, работающими в 9 классах общеобразовательных школ, гимназий, лицеев.