

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической физики и вычислительной математики

Задача рассеяния для схемы Абловица-Ладика

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 217 группы

направление **01.04.02 – Прикладная математика и информатика**

механико-математического факультета

Маслова Андрея Владимировича

Научный руководитель

доцент, к.ф.-м.н., доцент _____ М.Ю. Игнатъев

Заведующий кафедрой

зав.кафедрой, д.ф.-м.н., профессор _____ В.А. Юрко

Саратов 2024

Введение Пространственные дискретизации нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) и его обобщений получили своё применение в качестве основы для разработки схем численного решения соответствующих уравнений, и как модели дискретных физических систем. Особенно важными являются интегрируемые дискретизации – дискретные системы, которые могут быть решены при помощи метода обратной задачи рассеяния (МОЗР).

Метод обратной задачи рассеяния (МОЗР) – аналитический метод решения задачи Коши для нелинейных эволюционных уравнений. Он основан на связи нелинейного уравнения с данными рассеяния из семейства вспомогательных линейных дифференциальных операторов, дающей возможность по эволюции данных рассеяния восстановить эволюцию решения нелинейного уравнения. Метод представляет собой аналог метода Фурье решения линейных дифференциальных уравнений в частных производных. При применении метода необходимо решать прямую задачу рассеяния, заключающуюся в определении данных рассеяния и обратную задачу рассеяния, которая состоит в восстановлении линейного дифференциального оператора по его данным рассеяния.

Первая интегрируемая дискретизация НУШ была предложена Абловицем и Ладиком:

$$i \frac{d}{d\tau} Q_n = \Delta Q_n + |Q_n|^2 (Q_{n-1} + Q_{n+1}),$$

где

$$\Delta Q_n = Q_{n-1} - 2Q_n + Q_{n+1}.$$

Это дифференциально-разностное или полудискретное уравнение (дискретное относительно пространства и непрерывное относительно времени), которое фактически является конечно-разностной $O(h^2)$ -аппроксимацией уравнения. Более того, эта дискретизация имеет солитонные решения (решения в виде упруго взаимодействующих локализованных бегущих волн).

Дискретное нелинейное уравнение Шредингера (ДНУШ):

$$i \frac{d}{d\tau} Q_n = Q_{n-1} - 2Q_n + Q_{n+1} - Q_n R_n (Q_{n-1} + Q_{n+1}), \quad (0.0.1)$$

$$-i \frac{d}{d\tau} R_n = R_{n-1} - 2R_n + R_{n+1} - Q_n R_n (R_{n-1} + R_{n+1}), \quad (0.0.2)$$

применимо в тех же областях, что и непрерывное, относительно легко решается численными методами, и вследствие этого имеются многочисленные примеры его использования.

Соответствующая этому уравнению задача рассеяния имеет вид:

$$v_{n+1} = \begin{pmatrix} z & Q_n \\ R_n & z^{-1} \end{pmatrix} v_n \quad (0.0.3)$$

Векторное нелинейное уравнение Шредингера (ВНУШ):

$$i\mathbf{q}_t = \mathbf{q}_{xx} \pm 2\|\mathbf{q}\|^2 \mathbf{q}, \quad (0.0.4)$$

где \mathbf{q} — N -компонентный вектор, а $\|\cdot\|$ — евклидова норма, было впервые рассмотрено С.В. Манаковым в 1973 г. в качестве модели распространения электромагнитной волны произвольной поляризации в среде с кубической нелинейностью и обладающей эффектом двойного лучепреломления.

Дискретное векторное нелинейное уравнение Шредингера (ДВНУШ):

$$i \frac{d}{d\tau} \mathbf{Q}_n = \mathbf{Q}_{n-1} - 2\mathbf{Q}_n + \mathbf{A}\mathbf{Q}_n + \mathbf{Q}_n \mathbf{B} + \mathbf{Q}_{n+1} - \mathbf{Q}_n \mathbf{R}_n \mathbf{Q}_{n-1} - \mathbf{Q}_{n+1} \mathbf{R}_n \mathbf{Q}_n, \quad (0.0.5)$$

$$-i \frac{d}{d\tau} \mathbf{R}_n = \mathbf{R}_{n-1} - 2\mathbf{R}_n + \mathbf{B}\mathbf{R}_n + \mathbf{R}_n \mathbf{A} + \mathbf{R}_{n+1} - \mathbf{R}_n \mathbf{Q}_n \mathbf{R}_{n-1} - \mathbf{R}_{n+1} \mathbf{Q}_n \mathbf{R}_n, \quad (0.0.6)$$

где \mathbf{Q}_n и \mathbf{R}_n - это матрицы размерности $N \times M$ и $M \times N$ соответственно.

Задача рассеяния для этого уравнения имеет вид:

$$\mathbf{v}_{n+1} = \begin{pmatrix} z\mathbf{I}_N & \mathbf{Q}_n \\ \mathbf{R}_n & z^{-1}\mathbf{I}_M \end{pmatrix} \mathbf{v}_n. \quad (0.0.7)$$

В данной работе мы будем рассматривать задачи рассеяния для ДНУШ и ДВНУШ, которые часто называют схемами Абловица–Ладика.

Целью данной работы является изучение прямой и обратной задачи рассеяния для системы Абловица–Ладика в случае дискретного и векторного дискретного НУШ, приведение и оценка быстрых численных методов реше-

ния прямой и обратной задачи.

Основное содержание работы В первой главе под названием "Прямая задача рассеяния для системы Абловица-Лади́ка" рассматривается получение данных рассеяния – вспомогательного набора значений для решения обратной задачи, состоящего из коэффициентов отражения, собственных значений соответствующей задачи и нормировочных констант

Для начала иы рассмотрим прямую задачу рассеяния для дискретного нелинейного уравнения Шредингера.

Прежде всего предположим, что Q_n и R_n достаточно быстро стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$. Данное предположение поможет определить собственные функции $\phi_n(z)$, $\psi_n(z)$, $\bar{\phi}_n(z)$, $\bar{\psi}_n(z)$.

$$\phi_n(z) \sim z^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\phi}_n(z) \sim z^{-n} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{при } n \rightarrow -\infty \quad (0.0.8)$$

$$\psi_n(z) \sim z^{-n} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{\psi}_n(z) \sim z^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{при } n \rightarrow +\infty. \quad (0.0.9)$$

При помощи собственных функций $\phi_n(z)$, $\psi_n(z)$, $\bar{\phi}_n(z)$, $\bar{\psi}_n(z)$ получим определение функций Йоста, которые играют ключевую роль в решении задачи рассеяния:

$$M_n(z) = z^{-n}\phi_n(z), \quad \bar{M}_n(z) = z^n\bar{\phi}_n(z), \quad (0.0.10)$$

$$N_n(z) = z^n\psi_n(z), \quad \bar{N}_n(z) = z^{-n}\bar{\psi}_n(z). \quad (0.0.11)$$

Далее будет показано, что функции $\phi(z)$, $\bar{\phi}(z)$, $\bar{\psi}(z)$, $\psi(z)$ являются линейно независимыми и определяют коэффициенты $a(z)$, $b(z)$, $\bar{a}(z)$, $\bar{b}(z)$:

$$\phi_n(z) = b(z)\psi_n(z) + a(z)\bar{\psi}_n(z), \quad (0.0.12)$$

$$\bar{\phi}_n(z) = \bar{a}(z)\psi_n(z) + \bar{b}(z)\bar{\psi}_n(z), \quad (0.0.13)$$

которые можно выразить при помощи функций Йоста:

$$a(z) = 1 + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} z^{-1} Q_k M_k^{(2)}(z), \quad (0.0.14)$$

$$b(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} z^{2k+1} R_k M_k^{(1)}(z), \quad (0.0.15)$$

$$\bar{a}(z) = 1 + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} z R_k \bar{M}_k^{(1)}(z), \quad (0.0.16)$$

$$\bar{b}(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} z^{-2k-1} Q_k \bar{M}_k^{(2)}(z). \quad (0.0.17)$$

Далее мы вводим вспомогательные функции которые помогут при решении обратной задачи:

$$\left. \begin{aligned} \mu_n(z) &= \frac{M_n(z)}{a(z)} = \begin{pmatrix} 1 + O(z^{-2}) \\ z^{-1} R_{n-1} + O(z^{-3}) \end{pmatrix} \\ \bar{\mu}_n(z) &= \frac{\bar{M}_n(z)}{\bar{a}(z)} = \begin{pmatrix} z Q_{n-1} + O(z^3) \\ 1 + O(z^2) \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (0.0.18)$$

$$\rho(z) = \frac{b(z)}{a(z)}, \quad \bar{\rho}(z) = \frac{\bar{b}(z)}{\bar{a}(z)} \quad (0.0.19)$$

При помощи этих функций можем переформулировать выражения (0.0.10)-(0.0.11) в терминах коэффициентов отражения и функций $\mu_n(z)$ и $\bar{\mu}_n(z)$:

$$\left. \begin{aligned} \mu_n(z) - \bar{N}_n(z) &= z^{-2n} \rho(z) N_n(z), \\ \bar{\mu}_n(z) - N_n(z) &= z^{2n} \bar{\rho}(z) \bar{N}_n(z). \end{aligned} \right\} \quad (0.0.20)$$

Далее следуют аналогичные рассуждения для дискретного векторного нелинейного уравнения Шредингера.

В следующей главе "Обратная задача рассеяния для схемы Абловица-Лади́ка" мы будем решать обратную задачу рассеяния заключающуюся в восстановлении потенциалов по известным данным рассеяния. Другими словами по известным:

- коэффициентам отражения $\rho(z)$, $\bar{\rho}(z)$ определённых при $|z| = 1$,
- собственным значениям и нормировочным константам $\{\pm z_j, C_j\}_{j=1}^J$ и $\{\pm \bar{z}_j, \bar{C}_j\}_{j=1}^{\bar{J}}$ для $|z| > 1$ и $|z| < 1$ соответственно,

необходимо восстановить функции Йоста $\mu_n(z)$, $\bar{\mu}_n(z)$ и $N_n(z)$ и $\bar{N}_n(z)$, затем нужно получить потенциалы Q_n и R_n из имеющихся функций Йоста.

Для начала мы опишем процесс восстановления потенциалов для дискретного нелинейного уравнения Шредингера.

Уравнения (0.0.20) могут рассматриваться как определяющие условия скачка для задачи о граничных значениях Римана-Гильберта (с полюсами) для функций $\mu_n(z)$, $\bar{\mu}_n(z)$, $N_n(z)$ и $\bar{N}_n(z)$, где области аналитичности ограничены единичной окружностью $|z| = 1$.

Для решения задачи Римана-Гильберта мы применяем формулу Племяля — Сохоцкого, где области аналитичности (мероморфности) - это области $|z| > 1$ и $|z| < 1$.

В конечном счете потенциалы Q_n , R_n могут быть восстановлены для любого $z_j \in \{z_j\}_{j=1}^J$ и $\bar{z}_j \in \{\bar{z}_j\}_{j=1}^{\bar{J}}$ соответственно, при помощи разложений функций $\bar{\mu}'_n(z)$ и $\bar{N}'_n(z)$ в степенные ряды $\bar{N}'_n(\bar{z}_j)$ и $\bar{\mu}'_n(z_j)$:

$$R_n = 2 \sum_{j=1}^J C_j z_j^{-2(n+1)} N_n^{(2)}(z_j) + \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=1} w^{-2(n+1)} \rho(w) N_n^{(2)}(w) dw,$$

$$Q_{n-1} = -2 \sum_{j=1}^{\bar{J}} \bar{C}_j \bar{z}_j^{2(n-1)} \bar{N}_n^{(1)}(\bar{z}_j) + \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=1} w^{2(n-1)} \bar{\rho}(w) \bar{N}_n^{(1)}(w) dw.$$

Далее мы повторяем вышеприведенные рассуждения для дискретного векторного нелинейного уравнения Шредингера.

В главе "Супербыстрые алгоритмы решения прямой задачи рассеяния" мы приведем способ быстрого численного решения прямой задачи рассеяния.

Рассмотрим выражение:

$$\begin{pmatrix} v_1^{n+1} \\ v_2^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^{-1} & Q_n \\ R_n & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^n \\ v_2^n \end{pmatrix} \quad (0.0.21)$$

Замечательным является результат, установленный, для похожей задачи, который заключается в том, что значения $a(k_n)$, $b(k_n)$, $n = 1, \dots, N$, могут быть вычислены за $O(N \log_2^2 N)$ операций.

После замены переменных

$$v_1^n = z^{-n} P_1^n, \quad v_2^n = z^{-n-1} P_2^n,$$

получим

$$\begin{pmatrix} P_1^{n+1} \\ P_2^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & Q_n \\ R_n z^2 & z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1^n \\ P_2^n \end{pmatrix}, \quad P^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (0.0.22)$$

или

$$P^{n+1} = M_n P^n$$

В результате

$$P^N = M_n \dots M_1 P^0 = M P^0$$

где

$$M = M_n \dots M_1.$$

Полиномы $P_1^N(k)$, $P_2^N(k)$ определяют функции $v_1^N(k)$, $v_2^N(k)$ и, следовательно, данные рассеяния $a(k)$, $b(k)$. Таким образом, основная задача заключается в быстром вычислении \vec{P}^N .

Предположение 1. Коэффициенты матрицы полиномов

$$M = M_N M_{N-1} \dots M_1$$

могут быть вычислены "сверхбыстрым" образом, т.е. за $O(N \log_2^2 N)$ операций.

Метод сверхбыстрого вычисления произведения матриц $M_N M_{N-1} \dots M_1$ основан на технике "разделяй и властвуй" и быстром умножении полиномов.

Пусть число перемножаемых матриц является степенью двойки: $N = 2^k$. Первый шаг состоит в том, чтобы сгруппировать и перемножить $N/2$

матриц вида $M_2M_1, M_4M_3, \dots, M_NM_{N-1}$. В результате получим

$$M_{2,1} = M_2M_1, \quad M_{4,3} = M_4M_3, \quad \dots, \quad M_{N,N-1} = M_NM_{N-1}$$

На втором шаге перемножаем $N/4$ матриц $M_{4,3}M_{2,1}, \dots, M_{N,N-1}M_{N-2,N-3}$:

$$\begin{aligned} M_{4,3,2,1} &= M_{4,3}M_{2,1}, & M_{8,7,6,5} &= M_{8,7}M_{6,5} \\ M_{N,N-1,N-2,N-3} &= M_{N,N-1}M_{N-2,N-3}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом алгоритм продолжается далее, до тех пор пока не вычисляется матрица M . В результате каждого шага порядок перемножаемых полиномов растет, а количество перемножаемых матриц уменьшается вдвое. Каждое умножение матриц требует только перемножения полиномов. Произведение полиномов требует выполнения операции свертки, которая осуществляется с помощью БПФ. Перемножение матриц требует $O(k \log_2 k)$ операций, где k порядок полиномов, определяющих коэффициенты матрицы. В результате вычисление результирующей матрицы M , как несложно вычислить, требует $O(N \log_2^2 N)$ операций.

Затем в главе "Супербыстрые алгоритмы решения обратной задачи рассеяния" мы изложим быстрый способ решения уже обратной задачи рассеяния.

Сформулируем следующую дискретную обратную задачу рассеяния для схемы Абловица-Ладика. Пусть вектор-столбец

$$P^n = \begin{pmatrix} P_1^n \\ P_2^n \end{pmatrix}$$

определяется рекуррентным соотношением

$$\begin{pmatrix} P_1^{n+1} \\ P_2^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & Q_n \\ R_n z^2 & z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1^n \\ P_2^n \end{pmatrix}$$

или

$$P^{n+1} = M_n P^n. \tag{0.0.23}$$

Начальное условие имеет вид

$$P^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (0.0.24)$$

Требуется найти все значения $Q_n, R_n, n = 1, \dots, N$ для известного вектора P^N .

Непосредственное перемножение матриц M_n дает для координат P_1^N, P_2^N выражение вида

$$P_1^N(k) = 1 + \sum_m Q_m R_{m+1} z^2 + \sum_m Q_m R_{m+2} z^4 + \dots + Q_1 R_N z^{2N} + \dots,$$

$$P_2^N(k) = R_N z^2 + \dots + R_1 z^{2(N+1)} + R_3 Q_2 R_1 z^{2N} + \dots.$$

Коэффициенты полинома $P_2(z)$ при максимальной $z^{2(N+1)}$ и минимальной степенях z^2 , равны Q_1 и Q_N .

Поскольку матрица

$$M_N = \begin{pmatrix} 1 & Q_n \\ R_n z^2 & z^2 \end{pmatrix}$$

то

$$P_{N-1} = M_1 \dots M_{N-1} P_0 = M_N^{-1} P_N$$

Вектор P_{N-1} определяет величину Q_{N-1} и матрицу M_{N-1} . Вычисляя последовательно значения $Q_n, n = N, \dots, 1$, находим все значения Q_n .

Непосредственное применение алгоритма требует $O(N^2)$ операций. В то же время для того, чтобы вычислить Q_{N-1} не требуется использовать все коэффициенты полиномов вектора P_{N+1} , а достаточно использовать только коэффициенты при старших степенях. Комбинируя процесс вычисления коэффициентов Q_n и вычисления произведений матриц M_n способом аналогичным, применяемому при решении прямой задачи рассеяния, возможно снизить временную сложность алгоритма решения обратной задачи рассеяния до порядка, аналогичного алгоритму решения прямой задачи.

В главе "Супербыстрый алгоритм решения задачи рассеяния для системы Захарова-Шабата." приводятся особенности применения изложенных ранее алгоритмов к системе Захарова-Шабата. Мы рассматриваем эту систему поскольку она имеет связь с нелинейным уравнением Шредингера, поэтому эффективное численное решение задачи рассеяния для этой системы является важным с практической точки зрения.

В финальной главе "Численный эксперимент" мы проведем численный эксперимент в котором рассмотрим применение прямой и обратной задачи рассеяния к некоторому "сигналу" полученному при помощи генерации дискретного набора случайно комплексных значений и последующего апсеймпинга этих значений.

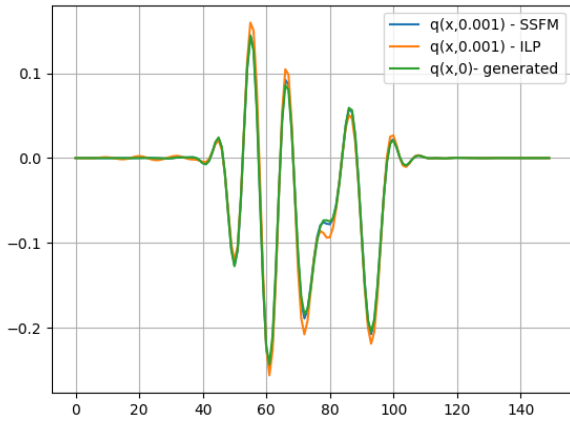
Затем мы рассмотрим применение МОЗР для аналогичного сигнала. Такая постановка задачи имеет прикладное применение. Распространение сигнала в оптическом волокне обычно описывается при помощи НУШ, для решения которого используют МОЗР. Тогда задача сводится к эффективно-му решению прямой и обратной задачи рассеяния для некоторого сигнала, играющего роль потенциалов Q_n и R_n .

В данной работе в качестве такого сигнала для реализации численных методов будет использован 16QAM сигнал с апсеймпингом посредством rc (Raised Cosine) фильтра.

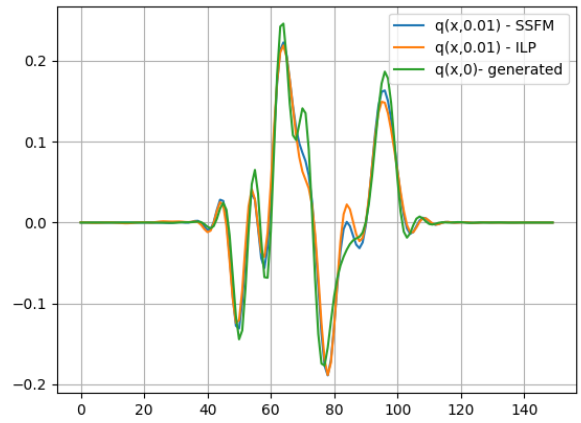
Наберём несколько различных сигналов и найдём $q(x, t)$ методом обратной задачи рассеяния и сравним результат с методом Фурье разделённого шага.

В соответствие с рисунком 1 можно видеть, что решение, найденное методом обратной задачи рассеяния показывает схожий с SSFM результат, однако при росте t начинает отклоняться от него. Из результатов можно сделать вывод, что данная имплементация метода обратной задачи рассеяния достаточно точно восстанавливает $q(x, t)$ при помощи эволюции данных рассеяния, если брать SSFM за эталон.

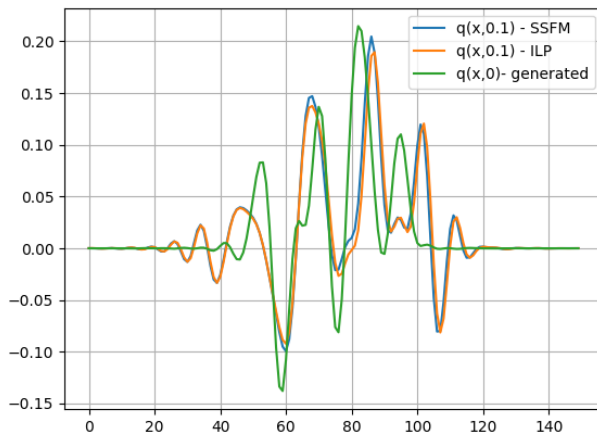
Заключение Как показывают предыдущие разделы, основна теории рассеяния эффективна для широкого спектра систем, включая дискретные системы, рассмотренные ранее. Выгодным качеством этих систем оказалась их интегрируемость в терминах обратной задачи рассеяния.



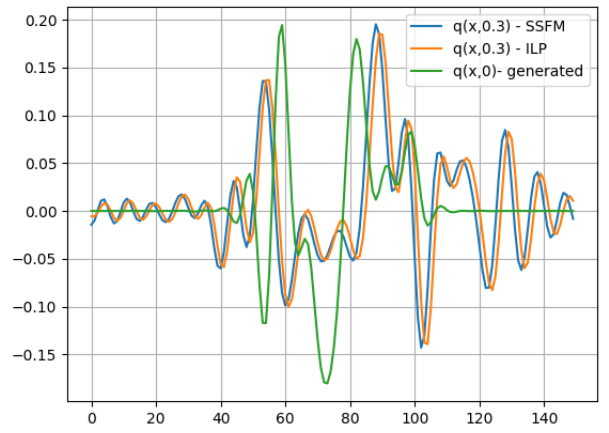
$M = 50, L = 15, t = 0.0001$



$M = 50, L = 15, t = 0.01$



$M = 50, L = 15, t = 0.1$



$M = 50, L = 15, t = 0.3$

Рисунок 1 – Результат работы программы для различных параметров.

Важным аспектом является то, что результаты, полученные для скалярной схемы Абловица-Ладика, могут быть применены и для векторного случая, что имеет прикладное применение в области исследования поведения сигналов в оптическом волокне.

В ходе работы были приведены численные методы решения прямой и обратной задачи рассеяния. Layer Peeling метод является наиболее быстрым из применяемых в настоящее время алгоритмов решения обратной задачи рассеяния. В то же время его устойчивость остается серьезной проблемой.

Численное решение прямой и обратной задачи рассеяния для дискретных систем может быть вполне эффективным, что позволяет, ввиду некоторой схожести систем, порождённых НУШ, применять эти методы на непрерывных объектах (как было показано на примере системы Захарова–Шабата).

Численный эксперимент показал, что использованные алгоритмы не только справляются с решением прямой и обратной задачи рассеяния, но и могут быть использованы в контексте МОЗР для получения решений нелинейных эволюционных уравнений. Ожидается, что результаты разработки численных алгоритмов окажутся полезными в различных прикладных сферах.