МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической физики и вычислительной математики

СИСТЕМЫ ХААРА И ФАБЕРА-ШАУДЕРА В ОБРАБОТКЕ СИГНАЛОВ

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 411 группы
направления 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета
Радина Артёма Евгеньевича

Научный руководитель
доцент, к. ф.-м. н. ______________ Д. С. Лукомский

Заведующий кафедрой
профессор, д. ф.-м. н. ______________ В. А. Юрко

Саратов 2024

Введение. В данной работе рассматриваются системы Хаара и Фабера-Шаудера, а так же их применение в обработке сигналов. В современном мире цифровая обработка сигналов играет ключевую роль в различных областях, таких как связь, медицина, аудио и видео обработка, радиолокация и многое другое. Одним из важных инструментов в этой области являются системы Хаара и Фабера-Шаудера, которые представляют собой мощные методы анализа и обработки сигналов. Например, при анализе электроэнцефалограмм, электрокардиограмм, а также передаче и распознавании речи требуется выделять некоторые характерные параметры сигнала. Иногда возникает необходимость отделения помехи типа шума от сигнала или приведения сигнала к виду, который наиболее удобен для пользователя. В качестве другого примера обработки сигналов можно привести случай, когда сигнал, передаваемый по каналу связи, подвергается различным искажениям и приемник компенсирует их.

Актуальность работы. Системы Хаара и Фабера-Шаудера активно используются в различных современных методах сжатия данных благодаря их способности эффективно представлять и обрабатывать сигналы. Сжатие данных может быть с потерями и без потерь. Сжатие без потерь полностью восстанавливает исходные данные и используется в архивировании и передаче критичных данных. Сжатие с потерями уменьшает объем данных за счет удаления части информации, что допустимо в мультимедиа, например, в JPEG для изображений и MP3 для аудио. Сжатие данных снижает требования к хранению и пропускной способности, улучшая производительность обработки сигналов, что делает системы Хаара и Фабера-Шаудера важными инструментами в этих процессах.

Цель работы. Целью данной работы является изучение вопросов сходимости разложения рядов Фурье по системам Хаара и Фабера-Шаудера, а так же применения этих систем к обработке сигналов. Для этого была написана программа, которая вычисляет коэффициенты разложения, затем производит анализ данных коэффициентов и восстанавливает данные по ним. Для построения грамотного алгоритма программы, была изучена основная теория, касающаяся данных систем.

Основное содержание работы. Основная часть работы состоит из 3 глав. В **первой** главе мы даём определение системы Хаара, вида частных сумм.

Двоичным интервалом называется интервал вида

$$\left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right), \text{ где } i = 1, 2, \dots, 2^k, \quad k = 0, 1, \dots$$

Для $n = 2^k + i, i = 1, 2, \dots, 2^k, k = 0, 1, \dots$ обозначим

$$\begin{gathered} \Delta_n = \Delta_k^i = \left(\tfrac{i-1}{2^k}, \tfrac{i}{2^k}\right); \quad \bar{\Delta}_n = \left[\tfrac{i-1}{2^k}, \tfrac{i}{2^k}\right] \\ \Delta_1 = \Delta_0^0 = (0, 1); \qquad \bar{\Delta}_1 = [0, 1] \end{gathered} \tag{1.1}$$

Если $\delta \subset (0, 1)$ — какой-либо интервал, то через δ^+и δ^-обозначаются соответственно левая и правая половины интервала δ (без включения средней точки). Например $\big(n = 2^k + i\big)$,

$$\begin{gathered} \Delta_n^+ = \left(\Delta_k^i\right)^+ = \left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{2i-1}{2^{k+1}}\right) = \Delta_{k+1}^{2i-1} \\ \Delta_n^- = \left(\Delta_k^i\right)^- = \left(\frac{2i-1}{2^{k+1}}, \frac{i}{2^k}\right) = \Delta_{k+1}^{2i} \end{gathered} \tag{1.2}$$

Интервалы $\left\{\Delta_k^i\right\}_{i=1}^{2^k}$ назовём интервалами k-й пачки, $k = 0, 1, \dots$. Для дальнейшего использования отметим следующие свойства двоичных интервалов:

1) $\Delta_k^i \cap \Delta_k^j = \varnothing$ при $i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, 2^k, k = 1, 2, \dots$.

2) Если Δ_n и Δ_m - двоичные интервалы и $\Delta_n \cap \Delta_m \neq \varnothing$, то либо $\Delta_n \subset \Delta_m$, либо $\Delta_m \subset \Delta_n$.

Свойство 1) очевидно, а 2) вытекает из того, что при $n = 2^k + i$, $m = 2^l + j, k \geqslant l$, в силу равенства

$$\Delta_l^j = \left(\frac{j-1}{2^l}, \frac{j}{2^l}\right) = \left(\frac{2^{k-l}(j-1)}{2^k}, \frac{2^{k-l}j}{2^k}\right)$$

либо $\Delta_m \subset \Delta_n$ (если $2^{k-l}(j-1) < i \leqslant 2^{k-l}j\big)$, либо $\Delta_m \cap \Delta_n \neq \varnothing$ (если $i \leqslant 2^{k-l}(j-1)$ или $i > 2^{k-l}j\big)$.

Определение 1.1 *Система Хаара — это система функций*

$$\chi = \{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}, \quad x \in [0,1]$$

в которой $\chi_1(x) \equiv 1$, *а функция* $\chi_n(x)$ *с* $2^k < n \leqslant 2^{k+1}, k = 0, 1, \ldots,$ *определяется так:*

$$\chi_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \notin \bar{\Delta}_n \\ 2^{k/2} & \text{при } x \in \Delta_n^+ \\ -2^{k/2} & \text{при } x \in \Delta_n^- \end{cases} \tag{1.3}$$

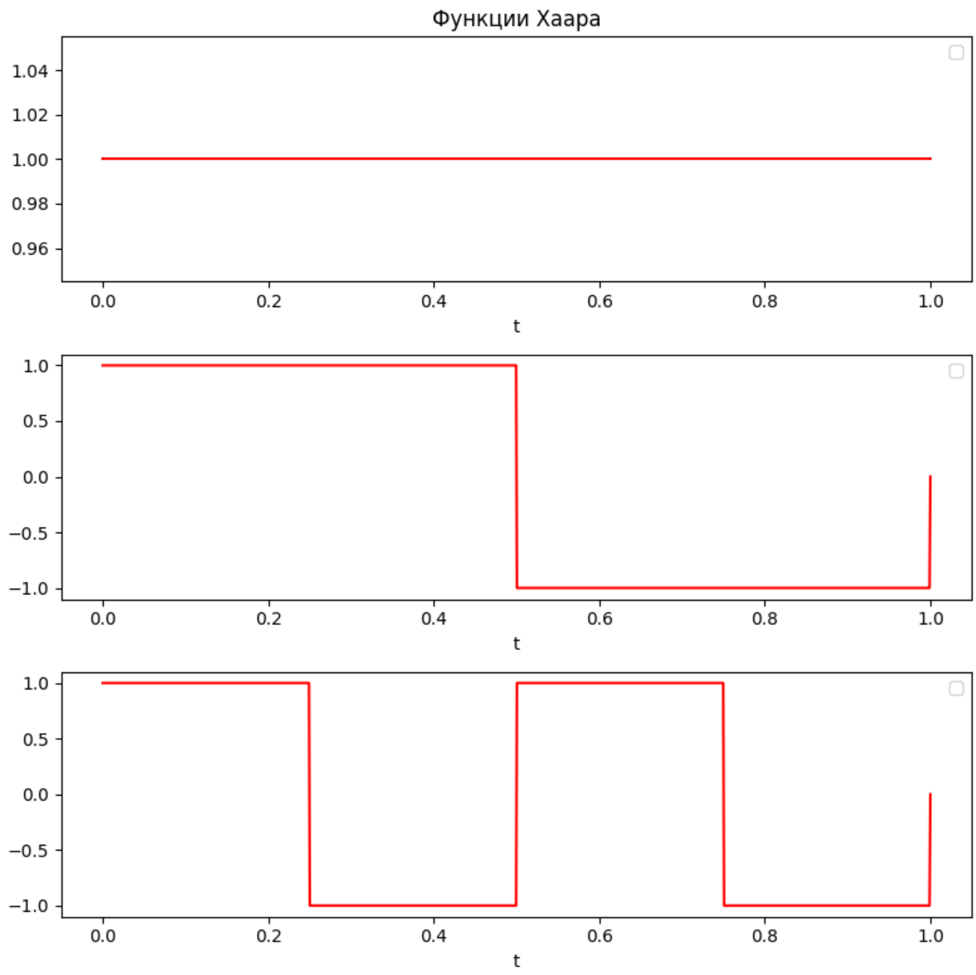

Рисунок 1 – Первые 3 функции Хаара.

Значения $\chi_n(x)$ в точках разрыва и в концах отрезка $[0,1]$ выбираются так, чтобы $\chi_n(x) \in D_{2^k}$, т.е. чтобы выполнялись равенства

$$\chi_n(x) = \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{2}\left[\chi_n(x+\delta)+\chi_n(x-\delta)\right], \quad x\in(0,1)$$
$$\chi_n(0) = \lim_{\delta\to +0}\chi_n(\delta), \quad \chi_n(1) = \lim_{\delta\to +0}\chi_n(1-\delta) \tag{1.4}$$

Группу функций $\{\chi_n(x)\}_{n=2^k+1}^{k+1}$, $k=0,1,\ldots$, будем называть k-й пачкой. Зачастую вместо обычной, "одинарной" нумерации системы Хаара использовать нумерацию, прямо показывающую в какой пачке лежит данная функция, точнее, при $k=0,1,\ldots,i=1,2,\ldots,2^k,n=2^k+i$

$$\chi_k^{(i)}(x) = \chi_n(x), \quad \chi_0^{(0)}(x) = 1, \quad x\in[0,1] \tag{1.5}$$

Отсюда ясно, что система Хаара состоит из объединения пачек $\left\{\chi_k^{(i)}(x)\right\}_{i=1}^{2^k}$, $k=0,1,\ldots$, и функции $\chi_0^{(0)}(x)$.

Из свойств 1) и 2) двоичных интервалов вытекает, что система Хаара является ортонормированной. Для того чтобы доказать ее полноту, заметим

Утверждение 1.1. *Для $N=2^k,k=0,1,\ldots$, линейная оболочка $G_N(\chi)$ функций $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^N$ совпадает с D_N, т.е. при $N=2^k,k=0,1,\ldots$,*

$$G_N(\chi) := \left\{f(x) : f(x) = \sum_{n=1}^N a_n\chi_n(x)\right\} = D_N \tag{1.6}$$

Для частных сумм $S_N(f,x)$ с номерами N типа $N=2^k+i,i=1,2,\ldots,2^k-1,k=1,2,\ldots$, учитывая свойство 1) двоичных интервалов, получим следующее выражение:

$$S_N(f,x) = \begin{cases} S_{2^{k+1}}(f,x) & \text{при } x\in\left[0,\frac{i}{2^k}\right) \\ S_{2^k}(f,x) & \text{при } x\in\left(\frac{i}{2^k},1\right] \\ S_{2^k}(f,x)+c_N\chi_N(x) & \text{при } x=\frac{i}{2^k} \end{cases} \tag{1.11}$$

В заключении отметим, что из (1.11) и (1.8) получается равенство: при $N=2,3,\ldots$

$$S_N(f,x)=\begin{cases}\left|\Delta_N^+\right|^{-1}\int_{\Delta_N^+}f(t)dt \text{ при } x\in\Delta_N^+\\ \left|\Delta_{\bar N}^-\right|^{-1}\int_{\Delta_N^-}f(t)dt \quad \text{ при } x\in\Delta_{\bar N}^-\end{cases}$$

Во **второй** главе рассматриваем систему Фабера-Шаудера.

Определение 2.1 *Системой Фабера-Шаудера называется система функций*

$$\mathbf{\Phi}=\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}, \quad x\in[0,1]$$

в которой

$$\varphi_0(x)=1, \quad \varphi_1(x)=x, \quad x\in[0,1]$$

и при $n=2^k+i, k=0,1,\ldots,i=1,2,\ldots,2^k$

$$\varphi_n(x)=\varphi_k^{(i)}(x):=\begin{cases}0, \text{ если } x\notin\left(\frac{i-1}{2^k},\frac{i}{2^k}\right),\\ 1, \text{ если } x=\frac{2i-1}{2^{k+1}},\\ \text{ линейна и непрерывна}\\ \text{ на } \left[\frac{i-1}{2^k},\frac{2i-1}{2^{k+1}}\right] \text{ и на } \left[\frac{2i-1}{2^{k+1}},\frac{i}{2^k}\right].\end{cases} \tag{2.1}$$

Существует ещё один способ определить систему Фабера-Шаудера — интегрируя функции Хаара. Точнее говоря, имеют место равенства

$$\varphi_1(x)=\int_0^x\chi_1(t)dt, \quad \varphi_n(x)=2\left\|\chi_n\right\|_\infty\int_0^x\chi_n(t)dt, \quad n=2,3,\ldots \tag{2.2}$$

Теперь рассмотрим ряд по системе Фабера-Шаудера:

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_n\varphi_n(x)=A_0\varphi_0(x)+A_1\varphi_1(x)+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{2^k}A_{k,i}\varphi_k^{(i)}(x) \tag{2.3}$$

предположим, что ряд сходится в каждой точке отрезка $[0,1]$ к конечной функции $f(x)$. Докажем, что тогда коэффициенты $\{A_n\}$ однозначно определяются функцией $f(x)$, а именно, что

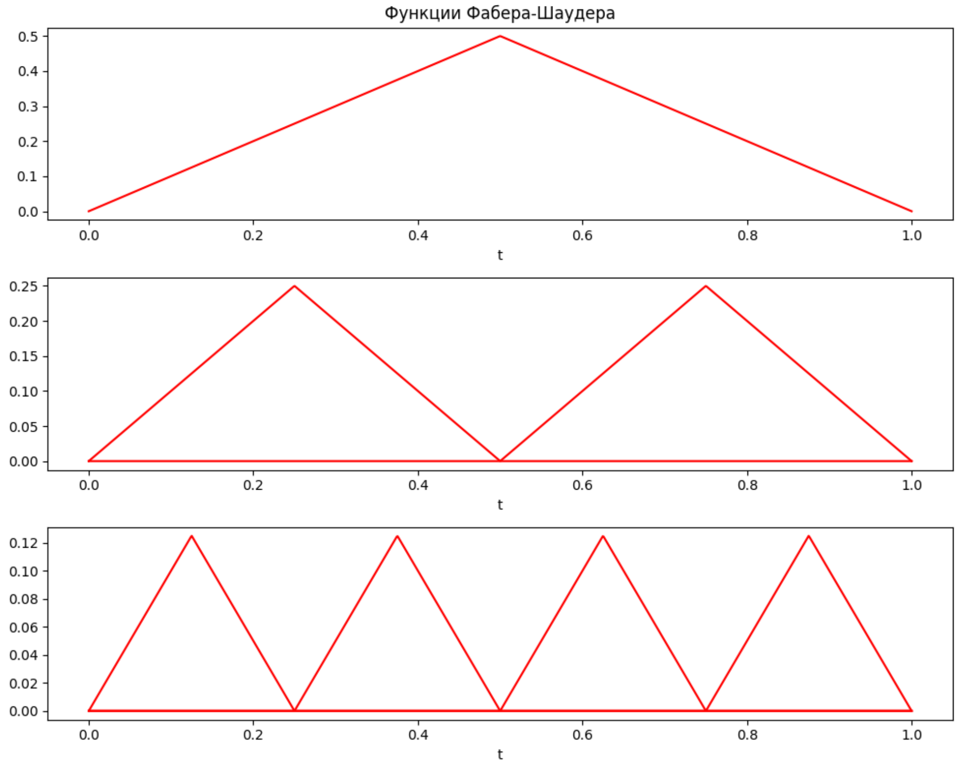

Рисунок 2 – Первые 3 функции Фабера-Шаудера.

$$A_0 = A_0(f) = f(0), \quad A_1 = A_1(f) = f(1) - f(0)$$

$$A_n = A_n(f) = A_{k,i}(f) = f\left(\frac{2i-1}{2^{k+1}}\right) - \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{i-1}{2^k}\right) + f\left(\frac{i}{2^k}\right)\right] \tag{2.4}$$

если $n = 2^k + i, k = 0, 1, \ldots, i = 1, 2, \ldots, 2^k$.
Пользуясь равенствами (см. (2.1)) получим

$$A_n = \sum_{s=2^k+1}^{2^{k+1}} A_s \varphi_s\left(\frac{2i-1}{2^{k+1}}\right) = S_{2^{k+1}}\left(\frac{2i-1}{2^{k+1}}\right) - S_{2^k}\left(\frac{2i-1}{2^{k+1}}\right) \tag{2.5}$$

где $S_N(x)$ — частная сумма ряда (2.3):

$$S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} A_n \varphi_n(x), \quad N = 0, 1, \ldots$$

Из (2.1) можно заметить, что функции $\varphi_n(x)$ равны нулю в точках $x =$

$l/2^k$, $l = 0, 1, \ldots, 2^k$, если $n > 2^k$. Тогда, учитывая, что $S_{2^k}(x)$ линейна на каждом отрезке $\left[\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right], i = 1, 2, \ldots, 2^k$, из соотношения (2.5) мы находим, что

$$\begin{aligned} A_n &= S_{2^{k+1}}\left(\frac{2i-1}{2^{k+1}}\right) - \frac{1}{2}\left[S_{2^k}\left(\frac{i-1}{2^k}\right) + S_{2^k}\left(\frac{i}{2^k}\right)\right] \\ &= f\left(\frac{2i-1}{2^{k+1}}\right) - \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{i-1}{2^k}\right) + f\left(\frac{i}{2^k}\right)\right] \end{aligned}$$

Из полученных нами формул (2.4), получаем, что при $N = 1, 2, \ldots$ равенство

$$\sum_{n=0}^{N} A_n \varphi_n(x) = 0 \text{ всюду на } [0,1]$$

выполняется только в случае, когда $a_n = 0$ при $n = 0, 1, \ldots, N$, т.е. функции $\{\varphi_n\}_{n=0}^{N}$ линейно независимы. Из определения функций $\varphi_n, n = 0, 1, \ldots, N$ (см. (2.1)), и их линейной независимости получаем следующее утверждение:

(A) При $N = 1, 2, \ldots$ пространство $G_N = G_N(\Phi)$ полиномов по системе Фабера-Шаудера вида $P_N(x) = \sum_{n=0}^{N} A_n \varphi_n(x)$ имеет размерность $N + 1$ и совпадает с пространством L_N, определяемым так:

$$L_1 = \{f \in C(0,1) : f''(x) = 0 \text{ при } x \in (0,1)\}$$

$$L_N = \left\{ f \in C(0,1) : f''(x) = 0 \text{ при } x \in \left(\bigcup_{s=1}^{2i} \Delta_{k+1}^{s}\right) \cup \left(\bigcup_{s=i+1}^{2^k} \Delta_k^s\right) \right\} \qquad (2.6)$$

$$\left(N = 2^k + i, \quad k = 0, 1, \ldots, \quad i = 1, 2, \ldots, 2^k\right)$$

Кроме того отметим так же такое свойство системы Фабера-Шаудера:

(B) Для произвольной функции $f(x)$ и $N = 1, 2, \ldots$ сумма

$$S_N(f, x) = \sum_{n=0}^{N} A_n(f) \varphi_n(x)$$

в которой коэффициенты определяются равенствами (2.4), совпадает с

$f(x)$ на множестве π_N :

$$\pi_1 = \{0,1\}, \quad \pi_N = \left\{\frac{s}{2^k}\right\}_{s=0}^{2^k} \cup \left\{\frac{2s-1}{2^{k+1}}\right\}_{s=1}^{i} \tag{2.7}$$
$$\left(N = 2^k + i, \quad k = 0,1,\ldots, \quad i = 1,2,\ldots,2^k\right)$$

Действительно, пусть функция $g(x) \in L_N$ такова, что $g(x) = f(x)$ при $x \in \pi_N$. Тогда, используя (A), $g(x)$ - полином по системе $\Phi : g(x) = \sum_{n=0}^{N} A_n \varphi_n(x)$ и, как было показано выше, $A_n = A_n(g), n = 0,1,\ldots,N$.

Но $g(x) = f(x)$ при $x \in \pi_N$, и поэтому (см. (2.4)) $A_n(g) = A_n(f)$, $n = 0,1,\ldots$, т.е. $S_N(f,x) \equiv g(x)$ и $S_N(f,x) = f(x)$ при $x \in \pi_N$.

Из утверждений (A) и (B) вытекает равномерная сходимость ряда $\sum_{n=0}^{\infty} A_n(f)\varphi_n(x)$ к произвольной непрерывной функции $f(x)$. Единственность ряда, сходящегося к $f(x)$, была проверена ранее (см. (2.3), (2.4)). Таким образом нами получена

Теорема 2.1. *Система Фабера-Шаудера — базис в пространстве $C(0,1)$. При этом коэффициенты разложения*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(f)\varphi_n(x), \quad f \in C(0,1)$$

определяются формулами (2.4), а частные суммы $S_N(f,x)$ этого разложения принадлежат L_N и удовлетворяют соотношению

$$S_N(f,x) = f(x) \quad \text{при} \quad x \in \pi_N, \quad N = 1,2,\ldots \tag{2.8}$$

Замечание. Известно, что всякий ортонормированный базис в $C(0,1)$ является базисом и в $L^p(0,1), 1 \leqslant p < \infty$. Пример системы Фабера-Шаудера показывает, что для неортогональных базисов положение может быть иным. Система Фабера-Шаудера даже не минимальна в $L^p(0,1)$ при $1 \leqslant p < \infty$. Действительно, для любого $\varepsilon \in (0,1)$ легко построить такой полином $P(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n(f)\varphi_n(x)$, что $P(x) = 1$ при $x \in [\varepsilon,1]$ и $0 \leqslant P(x) \leqslant 1$ при $x \in [0,\varepsilon]$, а это значит, что $\|\varphi_0 - P\|_p \leqslant \varepsilon^{1/p}$.

Следствие 1. Пусть $f \in C(0,1)$. Имеют место оценки а) $|A_n(f)| \leqslant \omega^{(2)}\left(\frac{1}{N}, f\right), n = 1, 2, \ldots$, где

$$\omega^{(2)}(\delta, f) := \sup_{0<h\leqslant\delta, h\leqslant x\leqslant 1-h} |f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)|$$

б) $\|f - S_N(f)\|_C \leqslant \omega^{(2)}\left(\frac{1}{N}, f\right)$.

Из неравенства а) следствия 1 нетрудно вывести, что для каждой функции $f(x)$ с $\omega(\delta, f) = O\left(\frac{1}{\log^{1+\varepsilon} 1/\delta}\right)$ при $\delta \to 0 (\varepsilon > 0)$ ее ряд по системе Фабера-Шаудера абсолютно (а значит, и безусловно) сходится по норме пространства $C(0, 1)$. Вместе с тем не для всякой непрерывной функции $f(x)$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |A_n(f)\varphi_n(x)|$ сходится равномерно.

Теорема 2.2. *В пространстве $C(0, 1)$ не существует безусловного базиса.*

Теорема 2.3. *Пусть $0 < \alpha < 1$. Для того чтобы ряд (2.3) являлся разложением функции $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение*

$$|A_n| \leqslant Cn^{-\alpha}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2.17}$$

Утверждение 2.1. *Пусть $f \in C(0, 1), f(0) = f(1) = 0 u 0 = k_0 < k_1 < \cdots$ — последовательность целых чисел.*

Существуют целые числа $i_s, 1 \leqslant i_s \leqslant 2^{k_s}, s = 0, 1, \ldots$, и непрерывная на $[0, 1]$ функция $\tau(x)$ с условием

$$0 = \tau(0) < \tau(x) < \tau(y) < \tau(1) = 1 \quad \text{при} \quad 0 < x < y < 1 \tag{2.19}$$

такие, что разложение суперпозиции $F(x) := f \circ \tau(x)$ по системе Фабера-Шаудера имеет вид:

$$F(x) = \sum_{s=0}^{\infty} A_{k_s, i_s} \varphi_{k_s}^{(i_s)}(x) \tag{2.20}$$

В **третьей** главе — практическая часть работы. Она заключается в построении алгоритма нахождения коэффициентов разложения функций по системе Фабера-Шаудера и в последующем анализе найденных коэффициентов для применения данного алгоритма к обработке сигналов.

Для начала разобьём отрезок [0, 1] на количество точек 2^n, где n- фиксированное целое число. В первом и во втором разделе, мы ввели понятие частной суммы ряда Фурье по системам Фабера-Шаудера. Для нахождения коэффициентов для системы Фабера-Шаудера, будем использовать следующую формулу:

$$A_n = A_n(f) = A_{k,i}(f) = f\left(\frac{2i-1}{2^{k+1}}\right) - \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{i-1}{2^k}\right) + f\left(\frac{i}{2^k}\right)\right]$$

где $\{A_n\}$ — коэффициенты ряда $\sum_{n=0}^{\infty} A_n \varphi_n(x)$.После нахождения коэффициентов, сортируемых их в порядке возрастания и зануляем наименьшие из них по модулю, чтобы определить, как количество коэффициентов влияет на погрешность разложения. По оставшимся коэффициентам восстанавливаем функцию $f(x)$, и сравниваем её с исходной, построив графики этих функций.

В ходе численного эксперимента будем обнулять коэффициенты начиная от 40% заканчивая 60%. Так же будем пробовать увеличивать количество точек при расчётах.

Рассмотрим результаты численного эксперимента для системы Фабера-Шаудера при N=8.

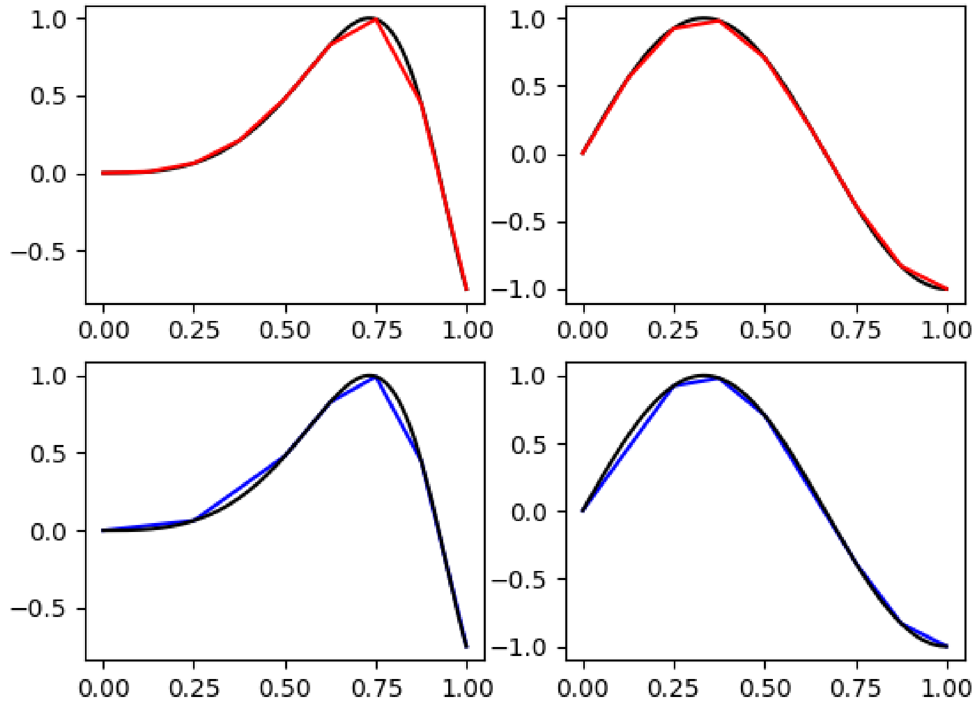

Рисунок 3 – Приближенное решение Фабера-Шаудера без обнуления и с обнулением на 40%.

Погрешности в этих случаях равны:

1. Погрешность функции 1 без зануления= 0.001729580408464
2. Погрешность функции 2 без зануления= 0.001337139817176
3. Погрешность функции 1 при занулении= 0.0017295804
4. Погрешность функции 2 при занулении= 0.0013371398

Сравнивая значения полученных погрешностей, можно сделать вывод, что погрешность увеличивается пропорционально количеству зануленных коэффициентов преобразования. Кроме того, увеличение числа точек N с 8 до 16 приводит к уменьшению погрешности, что демонстрирует улучшение точности восстановления функции при большем числе точек. Эти результаты подчеркивают важность баланса между компрессией данных и сохранением критических коэффициентов для достижения оптимального качества восстановления сигнала.

Заключение. При выполнении данной работы были рассмотрены и изучены системы Хаара и Фабера-Шаудера. В первом разделе работы были даны основные определения, рассмотрены свойства и ряды Фурье по системе Хаара. Второй раздел работы посвящен исследованию системы Фабера-Шаудера. Были даны определения системы и ряда по ней, заданны основные формулы разложения коэффициентов, а так же рассмотрены системы типа Фабера-Шаудера, с доказательством того, что при наложении определённых ограничений, эти системы являются базисом пространства C(0, 1). Заключительная глава работы заключалась в реализации алгоритма нахождения коэффициентов разложения функции по системе Фабера-Шаудера и дальнейшему анализу данных полученных коэффициентов с целью применения данного алгоритма в обработке сигналов.