МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра геометрии

Овальные линии коевклидовой плоскости

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 421 группы
направления 02.03.01 Математика и компьютерные науки
механико-математического факультета

Крючкова Ивана Андреевича

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.н., доцент ____________________ Л.Н. Романина
подпись, дата

И.о. зав. кафедрой
к.п.н., доцент ____________________ А.В. Букушева
подпись, дата

Саратов 2024

ВВЕДЕНИЕ

1. Актуальность темы исследования. Идея исследования различных неевклидовых геометрий в единой логической системе коренится в трудах английского математика Артура Кэли, который вводит мероопределение с помощью образа второго порядка и тем самым устанавливает связь между теорией инвариантов и проективной геометрией [1, с. 329]. Впервые сформулирована данная идея в знаменитой лекции немецкого математика Феликса Клейна, прочитанной в 1872 году в университетете г. Эрланген (Германия) и известной под названием «Эрлангенская программа» [2, с. 656]. Согласно представлениям Кэли и Клейна о геометрии как совокупности свойств фигур, инвариантных относительно некоторой подгруппы группы проективных преобразований, существует девять различных геометрий [3–6], определенных образом второго порядка на проективной плоскости. В классическую схему Кэли – Клейна входит геометрия коевклидовой плоскости, абсолют которой состоит из пары мнимо сопряженных прямых и соответствует по принципу двойственности проективной плоскости абсолюту евклидовой плоскости.

На современном этапе интерес к геометрии коевклидовой плоскости актуализирован развитием геометрии расширенного гиперболического пространства H^3 [7–9] в силу того, что плоскости такого типа являются касательными к абсолютной овальной квадрике пространства H^3.

2. Цели и задачи работы.

Целью работы является изучение овальных линий в геометрии коевклидовой плоскости. Для достижения данной цели были сформулированы и решены следующие задачи.

- Изучение основ геометрии коевклидовой плоскости.
- Исследование коевклидовых преобразований.
- Краткое изложение теории овальных линий коевклидовой плоскости.
- Визуализация исследованных объектов с помощью программных средств.

3. Содержание работы. Работа состоит из введения, трех основных разделов, заключения, списка использованных источников, содержащего 19 наименований и приложения. Основная часть работы имеет реферативный характер. Объем работы составляет 54 страницы.

В первом разделе рассмотрена теория линейных преобразований в коевклидовой геометрии. Второй раздел посвящен общей теории овальных линий коевклидовой плоскости. В третьем разделе выведены канонические уравнения для овальных линий всех типов и по ним исследованы свойства линий.

В приложении представлена самостоятельно подготовленная программа визуализации и распознавания овальных линий.

4. Методы работы. При выполнении работы изучен и систематизирован имеющийся материал по геометрии коевклидовой плоскости, в процессе подготовки работы использованы методы индукции, анализа и дедукции. Геометрия коевклидовой плоскости описана в проективной модели Кэли – Клейна, исследование объектов проведено аналитически с применением проективных координат.

5. Апробация работы. По результатам исследования сделан доклад на заседании кафедры геометрии.

Общая теория овальных линий. Уравнения квадрики. Овальная линия.

Множество всех точек коевклидовой плоскости, проективные координаты в некотором каноническом репере R которых удовлетворяют уравнению

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0, \tag{1}$$

назовем *линией второго порядка*, или *квадрикой* коевклидовой плоскости

Уравнение (1) назовем *общим уравнением квадрики*, а его коэффициенты, определенные с точностью до общего множителя, — *однородными проективными координатами* квадрики, или кратко: *координатами* квадрики.

Симметрическую матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{2}$$

назовем *матрицей координат* квадрики (1), или: *матрицей* квадрики (1).

Линию второго порядка будем называть *вырожденной* (*невырожденной*), если ее матрица вырожденная (невырожденная). Невырожденную линию второго порядка назовем *овальной линией*, если она содержит хотя бы одну вещественную точку.

Через каждую точку $C(c_1 : c_2 : c_3)$ проективной плоскости проходят две касательные к овальной линии [13, с. 77]: действительные различные, если точка внешняя по отношению к квадрике; мнимо сопряженные, если точка внутренняя; совпавшие, если точка принадлежит квадрике. В последнем случае уравнение касательной к линии имеет вид [13, с. 58]:

$$x_1(c_1a_{11} + c_2a_{12} + c_3a_{13}) + x_2(c_1a_{12} + c_2a_{22} + c_3a_{23}) \\ +x_3(c_1a_{13} + c_2a_{23} + c_3a_{33}) = 0. \qquad (3)$$

Типы и классы овальных линий. Геометрический смысл инварианта квадрики.

Классификацию овальных линий проведем, учитывая положение линии по отношению к абсолюту. Абсолют коевклидовой плоскости содержит одну действительную точку, поэтому возможны три случая.

1. Действительная точка абсолюта является внешней точкой по отношению к квадрике. Тогда квадрика имеет две различные действительные изотропные касательные (1). Такие овальные линии будем называть *когиперболами*, учитывая их соответствие по принципу двойственности с гиперболами евклидовой плоскости. Когипербола изображена на рисунке 2.1.

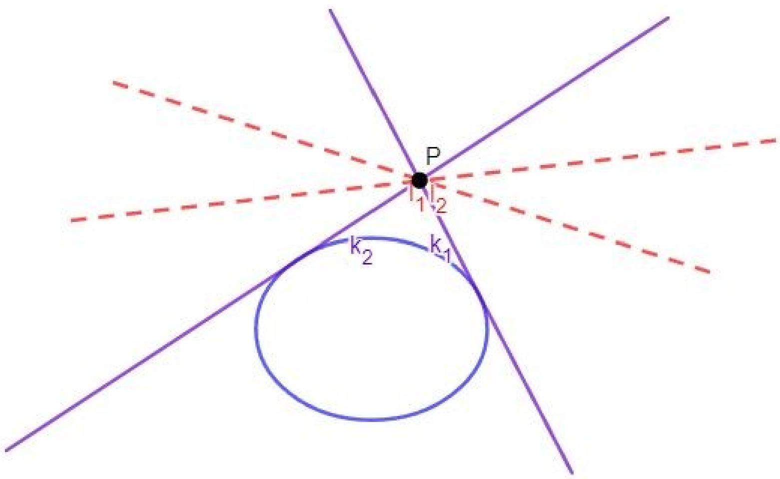

Рисунок 1 — Когипербола коевклидовой плоскости

2. Абсолютная точка P является внутренней по отношению к овальной линии, следовательно, линия имеет две мнимо сопряженные изотропные ка-

сательные k_1, k_2 (2). Назовем такие линии *коэллипсами*. Коэллипс изображен на рисунке 2.2.

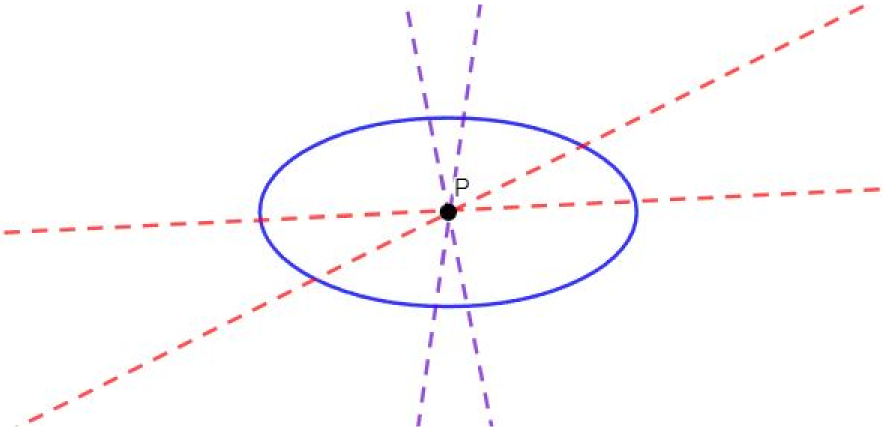

Рисунок 2 — Коэллипс коевклидовой плоскости

Частным видом коэллипсов являются линии, для которых абсолютные прямые являются касательными. Будем называть такие линии *коокружностями*.

3. Абсолютная точка P лежит на линии. Овальная линия имеет две совпавшие действительные изотропные касательные (3). Такие линии назовем *копараболами*. Для них выполняется условие (**??**). Копарабола изображена на рисунке 2.3.

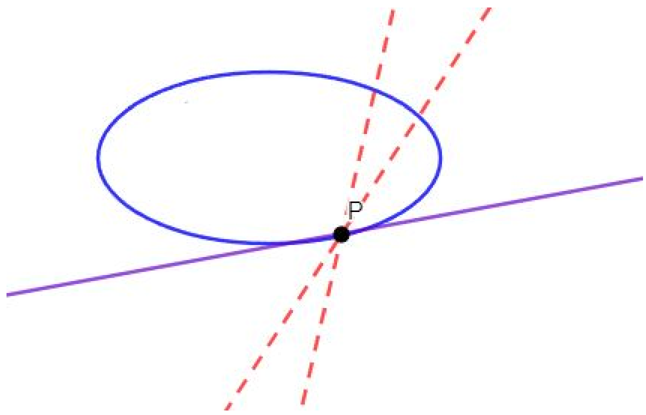

Рисунок 3 — Копарабола коевклидовой плоскости

Итак, на коевклидовой плоскости существуют три типа овальных линий: когиперболы, копараболы и коэллипсы, в частности, коокружности.

Геометрический смысл инварианта ∇ определен: ∇ – есть косинус расстояния между изотропными касательными к линии (1).

Канонические уравнения овальных линий.

Каноническим уравнением овальной линии будем называть уравнение наиболее простого вида, определяющее линию в некотором каноническом репере. Канонический репер, в котором уравнение квадрики имеет канонический вид, будем называть присоединенным репером квадрики.

Семейство всех канонических реперов коевклидовой плоскости зависит от четырех параметров, следовательно, пристраивая к линии наиболее удобным способом канонический репер, мы имеем право израсходовать не более четырех параметров.

Любые пять точек общего положения на проективной плоскости определяют единственную овальную линию [13, с. 65], через них проходящую. Учитывая, что точки K_1, K_2, H_1, H_2, F_1 принадлежат линии, то есть их координаты удовлетворяют уравнению (1), найдем условия на координаты квадрики. Первая пара точек дает условия:

$$a_{11} + 2a_{13}\alpha + a_{33}\alpha^2 = 0, \quad a_{11} - 2a_{13}\alpha + a_{33}\alpha^2 = 0.$$

Откуда

$$a_{13} = 0, \quad a_{11} = -a_{33}\alpha^2. \tag{4}$$

Следующие точки определяют равенства:

$$a_{12} = 0, \quad a_{23} = 0, \quad a_{22} = -a_{33}\beta^2. \tag{5}$$

Таким образом, уравнение квадрики принимает вид:

$$\alpha^2 x_1^2 + \beta^2 x_2^2 - x_3^2 = 0. \tag{6}$$

Назовем уравнение (6) *каноническим уравнением* коэллипса. Переходя к тангенциальным координатам квадрики, получим уравнение

$$\frac{X_1^2}{\alpha^2} + \frac{X_2^2}{\beta^2} = X_3^2. \tag{7}$$

Каноническое уравнение для когиперболы имеет вид

$$\alpha^2 x_1^2 - \beta^2 x_2^2 - x_3^2 = 0. \tag{8}$$

Каноническое уравнение копараболы имеет вид

$$x_1^2 - \alpha x_2 x_3 = 0. \tag{9}$$

Пусть коэллипс задан каноническим уравнением (6). Пусть для определенности α и β – положительные числа, причем, $\alpha > \beta$.

Угол между касательными

$$k_1 : \beta x_2 - x_3 = 0, k_2 : \beta x_2 + x_3 = 0$$

найдем по формуле:$\widehat{k_1 k_2} = 2\beta$.

Аналогично находим угол между касательными

$$h_1 : \alpha x_1 - x_3 = 0, \qquad h_2 : \alpha x_1 + x_3 = 0$$

проходящими через центр A_2 коэллипса. Имеем $\widehat{h_1 h_2} = 2\alpha$, где $\alpha > 0$.

Угол между прямыми d_1, d_2 обозначим 2ω:

$$\widehat{d_1 d_2} = 2\alpha\beta \sqrt{\frac{X_1^2 + X_2^2}{\beta^2 X_1^2 + \alpha^2 X_2^2}} = 2\omega. \tag{10}$$

Так как числа α, β, ω действительные положительные и $\beta < \alpha$, имеет место неравенство:

$$\beta < \omega < \alpha. \tag{11}$$

Таким образом, 2β, 2α — соответственно наименьший и наибольший угол между касательными коэллипса, проходящими через некоторую точку его полярной оси. Назовем эти углы соответственно меньшим и большим полярными углами коэллипса.

Прямые k_1, k_2 и h_1, h_2, проходящие через центр коэллипса и образующие соответственно меньший и больший полярные углы, назовем главными полярными касательными коэллипса.

Определенный геометрический смысл коэффициентов канонического уравнения коэллипса позволяет утверждать, что числа α, β являются инвариантными относительно всех движений коевклидовой плоскости.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе представлены основные факты геометрии коевклидовой плоскости, в частности, теория овальных линий этой геометрии. Проведена классификация овальных линий, найдены их основные метрические инварианты. Выведены канонические уравнения овальных линий каждого вида и установлен геометрический смысл коэффициентов таких уравнений.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Атанасян Л. С., Базылев В.Т. Геометрия. / Л. С. Атанасян, В.Т., Базылев. М.: Просвещение, 1986. В 2-х ч. Ч. 2. Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов. С. 352.

2 Прохоров Ю.В. Математика. / Ю.В. Прохоров. Большой энциклопедический словарь – 3-е изд. М.: Большая Российская энциклопедия, 2000. С. 848.

3 Буземан Г., Келли П.Д. Проективная геометрия и проективные метрики / Г. Буземан , П.Д. Келли. М.: Изд-во иностр. лит., 1957. С. 410.

4 Клейн Ф. Неевклидова геометрия / Ф. Клейн. М.: ОНТИ НКТП СССР, 1936. С. 100.

5 Понарин Я.П. Неевклидовы геометрии с аффинной базой / Я.П. Понарин. М. : Просвещение, 1991. Киров : Кировский гос. пед. ин-т, 1991. С. 150–156.

6 Яглом И.М. Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия / И.М. Яглом. М.: Наука, 1969. С. 304.

7 Розенфельд Б.А. Неевклидовы пространства / Б.А. Розенфельд. М. : Наука, 1965. С. 25.

8 Ромакина Л.Н. “Свойство ортосхемы расширенного гиперболического пространства”, Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения: Материалы XV Междунар. конф., посвященной столетию со дня рождения профессора Николая Михайловича Коробова / Л.Н. Ромакина. Тула: ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 2018. С. 287–289.

9 Lyudmila. N. Romakina. “Coordinates of the midpoint of a segment in an extended hyperbolic space” / Lyudmila. N. Romakina. International Electronic Journal of Geometry, 16:1 (2023). С. 272 – 282.

10 Розенфельд Б.А. Неевклидовы геометрии / Б. А. Розенфельд. М.: ГИТТЛ, 1955. С. 744.

11 Ромакина Л. Н. Геометрии коевклидовой и копсевклидовой плоскостей / Л. Н. Ромакина. Саратов : Науч. кн. Учебное пособие, 2008. С. 279.

12 Ефимов Н.В. Высшая геометрия. 6-е изд. / Н.В. Ефимов. М.: Наука, 1978. С. 576.

13 Атанасян Л. С., Базылев В.Т. Геометрия./ Л.С. Атанасян, В.Т. Базылев. М.: Просвещение, 1986. В 2-х ч. Ч. 1. Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов. С. 336.

14 Певзнер С.Л. Проективная геометрия / С. Л. Певзнер. М.: Просвещение, 1980. С. 128.

15 Розенфельд Б.А., Яглом И.М. Неевклидовы геометрии / Б.А. Розенфельд, И.М. Яглом. М. В кн.: Энциклопедия элементарной математики, 1966. т. V. С. 83.

16 Харстхорн Р. Основы проективной геометрии / Р. Харстхорн. М.: Пер. с англ., 1970. С. 55.

17 Четверухин Н.Ф. Проективная геометрия / Н.Ф. Четверухин. М.: 8-е изд., 1969. С. 368

18 Глаголев Н.А. Проективная геометрия / Н.А. Глаголев. М.: 2-е изд., 1963. С. 344.

19 Александров П.С., Маркушевич А.И., Хинчин А.Я. Энциклопедия элементарной математики. Кн. 4. Геометрия / П.С. Александров, А.И. Маркушевич, А.Я. Хинчин. М.: ГИФМЛ, 1963. С. 568.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Построение овальных линий на основе канонических уравнений на Python

Используем программные средства языка программирования Python для визуализации овальных линий коевклидовой плоскости. Перейдем от проективных координат к евклидовым. Построим графики на основе заданных уравнений, проверим их зависимость от α и β. Вычислим инвариант для каждого канонического вида уравнений и выведем его на экран.

```
from random import randint
from random import random
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import mpl_toolkits.mplot3d as Axes3D
import scipy as sp
from scipy.integrate import odeint
from scipy.integrate import solve_ivp

# Вводим параметры для построения уравнений
x_1 = float(input())
x_2 = float(input())
x_3 = float(input())
y_1 = float(input())
y_2 = float(input())
y_3 = float(input())

# Введем переход от проективных координат к евклидовым
x1 = x_1/x_3
x2 = x_2/x_3
x3 = x_2/x_1



# Задаем случайным образом параметры альфа и бетта
alpha =  random()
beta =  random()



# Составляем функции для каждого канонического уравнения
def kohyper(x1,y1):
solve = pow(alpha, 2)*pow(x1, 2) - pow(beta, 2)*pow(x2, 2) - pow(x3, 2)
return solve
```

```
def koellips(x2,y2):
solve = pow(alpha, 2)*pow(x1, 2) + pow(beta, 2)*pow(x2, 2) - pow(x3, 2)
return solve

def koparabola(x3,y3):
    solve =  np.sqrt(alpha*x2*x3)
    return solve


def invariant_koh(x1,y1):
   solve = (x1-x3/np.sqrt((x3-x1)**2 + 4*(pow(x2, 4))))
   return solve


def invariant_koe(x2,y2):
   solve = (x1-x3/np.sqrt((x3-x1)**2 + 4*(pow(x2, 4))))
   return solve

def invariant_kop(x3,y3):
   solve = x1/(np.sqrt(x1**2 + 4*(pow(x2, 2))))
   return solve

print(invariant_koh(0,1))
print(invariant_koe(0,1))
print(invariant_kop(0,1))



# Задаем параметры разбиения для визуализации
x_1 = np.linspace(0, 25, 100)
y_1 = kohyper(x_1, y_1)

x_2 = np.linspace(0, 25, 100)
y_2 = koellips(x_2, y_2)


x_3 = np.linspace(0, 25, 100)
y_3 = koparabola(x_3, y_3)

# Визуализируем полученные графики
```

```
plt.plot(y_1, x_1)

plt.show()


plt.plot(y_2, x_2)
plt.show()


plt.plot(y_3, x_3)
plt.show()
```

Результаты визуализации:

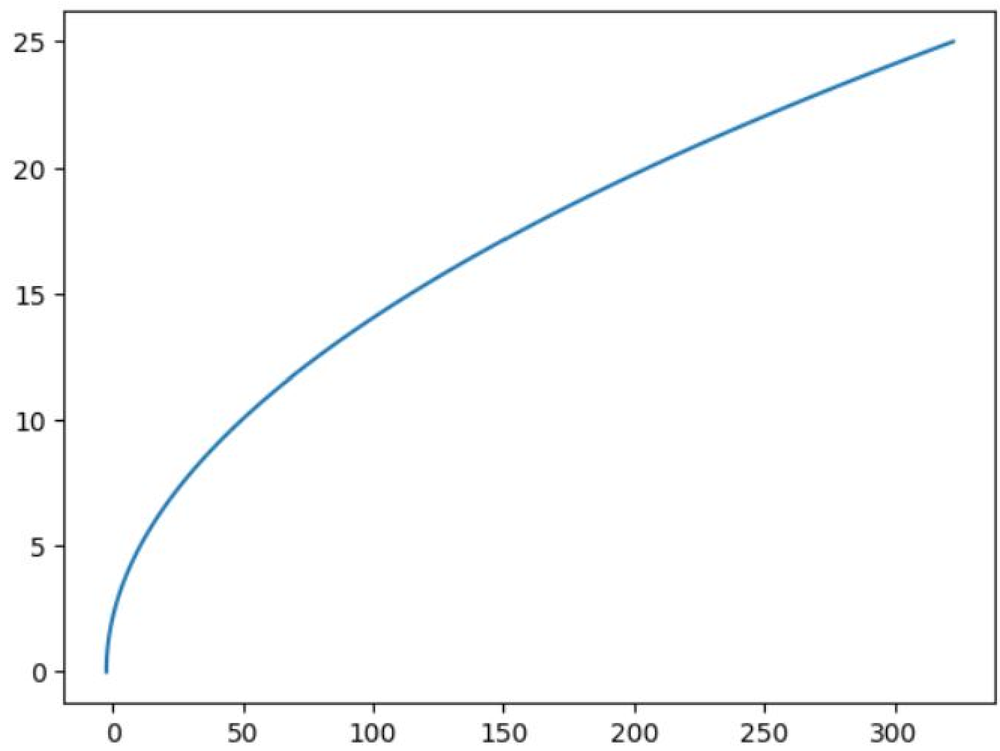

Рисунок А.1 — График для когиперболы

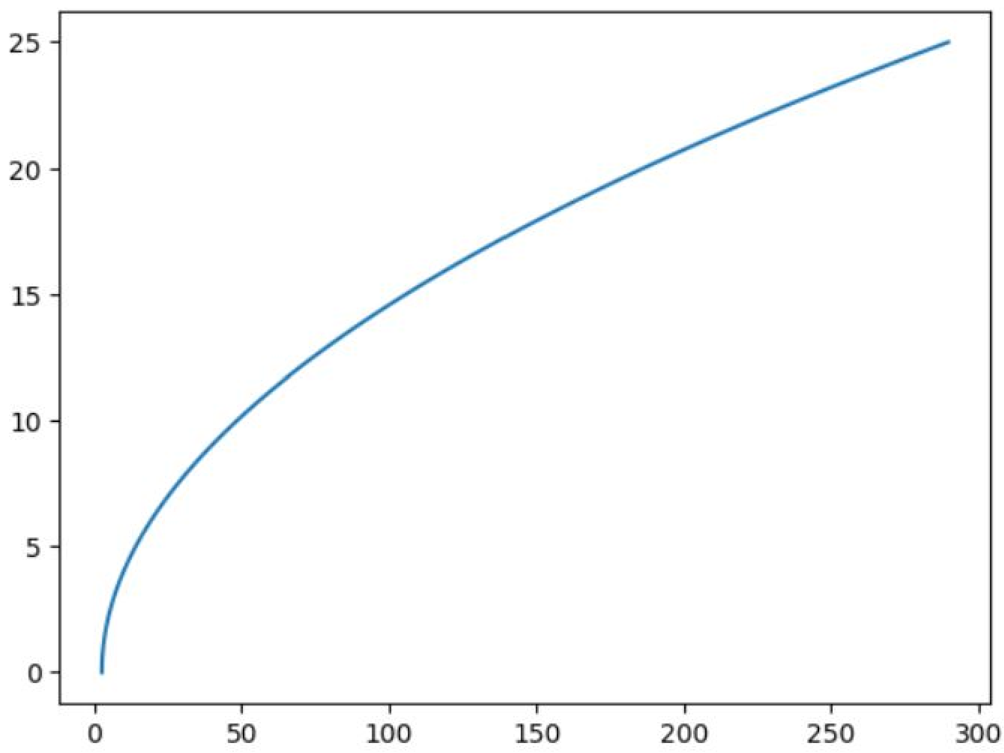

Рисунок А.2 — График для копараболы

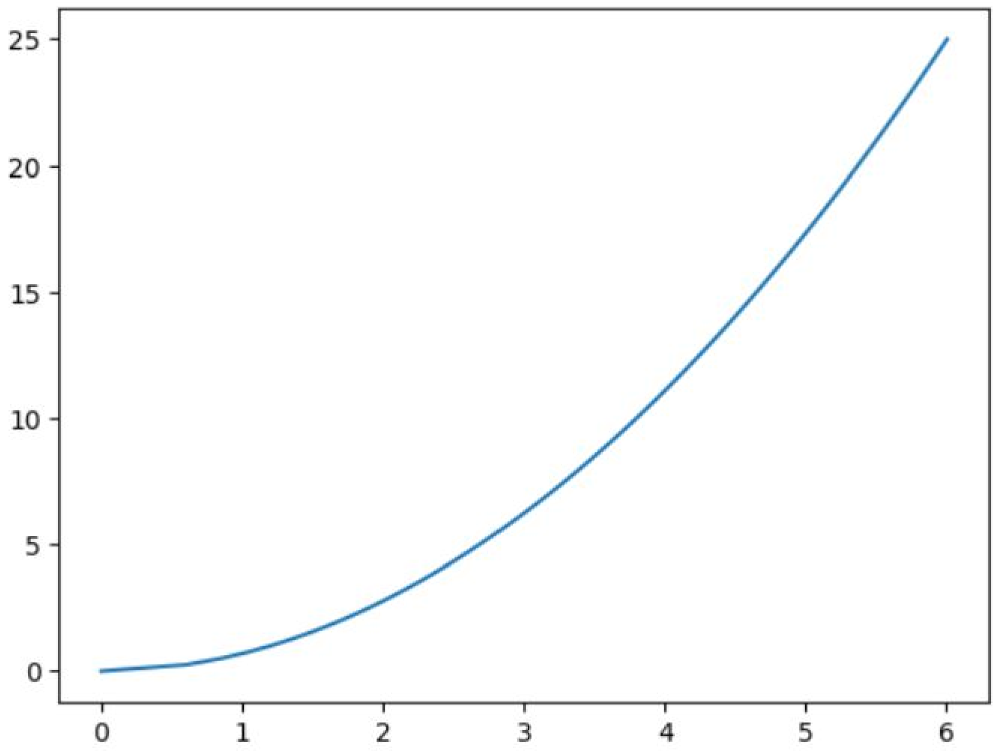

Рисунок А.3 — График для коэллипса

```
-0.09950371902099893
2.0294117647058822
0.52999894000318
```

Рисунок А.4 — Численное значение инварианта