МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра геометрии

Гиперциклические координаты на расширенной гиперболической плоскости

АВТОЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 421 группы
направления 02.03.01 Математика и компьютерные науки
механико-математического факультета

Кириллова Максима Игоревича

Научный руководитель
к.ф.-м.н., доцент ____________________ Л.Н. Ромакина
подпись, дата

И.о. зав. кафедрой
к.п.н., доцент ____________________ А.В. Букушева
подпись, дата

Саратов 2024

Введение В проективной схеме Кэли – Клейна гиперболическая плоскость положительной кривизны $\widehat{H}$ является внешней областью расширенной гиперболической плоскости H^2 (проективной плоскости P_2) относительно овальной линии γ, которая называется абсолютом плоскости.

В качестве прямых плоскости $\widehat{H}$ рассматриваются три типа объектов:

1. гиперболические (эллиптические) прямые, которые пересекают линию γ в двух действительных (мнимо сопряженных) точках;

2. параболические прямые, касательные к линии γ.

На внутренней относительно γ области плоскости H^2 реализуется полная плоскость Лобачевского.

Плоскость $\widehat{H}$ гомеоморфна листу Мёбиуса без границ и имеет общую с плоскостью Лобачевского фундаментальную группу G. Эта группа представляет собой группу проективных автоморфизмов линии γ.

Основное содержание работы

Определение 1. Гиперцикл[1] - собственная на $\widehat{H}$ овальная линия, пересекающая абсолют в двух мнимо сопряженных точках. Через центр гиперцикла проходят две общие с абсолютом мнимо сопряженные касательные.

Определение 2. Пусть $\bar{R}_1^3$ - псевдоевклидово векторное пространство с заданной квадратичной формой $\varphi = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$. Форма φ позволяет ввести на $\bar{R}_1^3$ норму, или длину векторов. Полярная к φ билинейная форма $\bar{\varphi}$ определяет на $\bar{R}_1^3$ скалярное произведение векторов.

Определение 3. Каждой паре векторов $\mathbf{x}\left(x_1; x_2; x_3\right), \mathbf{y}\left(y_1; y_2; y_3\right)$ поставим в соответствие число

$$\mathbf{xy} = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3,$$

которое назовем скалярным произведением этих векторов.

Определение 4. Число $\mathbf{x}^2 = \mathrm{xx}$ назовем скалярным квадратом вектора $\mathbf{x}$. Длиной вектора $\mathbf{x}$ назовем число $|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x}^2}$. Ненулевой вектор пространства $\bar{R}_1^3$ назовем изотропным, если его длина равна нулю. Неизотропный вектор пространства $\bar{R}_1^3$ назовем евклидовым (псевдоевклидовым), если его длина является действительным (мнимым) числом.

[1]Ромакина, Л. Н. Конечные замкнутые 3(4)-контуры расширенной гиперболической плоскости / Л. Н. Ромакина // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. - 2010. - Сер. Математика. Механика. Информатика. - Т. 10, вып. 3. - С. 14-26.

Выберем некоторый ортонормированный базис (i, j, k) пространства $\bar{R}_1^3$:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = -\mathbf{k}^2 = 1, \quad \mathrm{ij} = \mathbf{jk} = \mathbf{ik} = 0.$$

Каждый ненулевой вектор пространства $\bar{R}_1^3$ - как векторного пространства порождает точку проективной плоскости P_2. Каждые два коллинеарных вектора порождают одну точку этой плоскости.

Пусть векторы $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{e} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ порождают соответственно точки A_1, A_2, A_3, E на P_2. Никакие три из точек A_1, A_2, A_3, E не лежат на одной прямой, так как никакие три из векторов $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{e}$ не являются компланарными. Построим проективный репер[2] $R^* = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ плоскости P_2, порожденный базисом $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$.

Все изотропные векторы пространства $\bar{R}_1^3$ порождают на P_2 овальную линию γ, заданную в репере R^* уравнением

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0.$$

Пусть $R^+(\mathbf{x})\,(R^-(\mathbf{x}))$ - одномерное подпространство пространства $\bar{R}_1^3$, натянутое на евклидов (псевдоевклидов) вектор x. Каждая внешняя (внутренняя) относительно линии γ точка плоскости P_2 порождена векторами одного из подпространств $R^+(\mathbf{x})\,(R^-(\mathbf{x}))$. Все подпространства $R^+(\mathbf{x})\,(R^-(\mathbf{x}))$ порождают внешнюю (внутреннюю) относительно линии γ область плоскости P_2.

Гиперболическая плоскость положительной кривизны $\widehat{H}$ [3] образуется из множества всех подпространств $R^+(\mathbf{x})$ евклидовых векторов пространства $\bar{R}_1^3$.

В точечно-векторном псевдоевклидовом пространстве R_1^3 с базовым векторным пространством $\bar{R}_1^3$ есть соответствие, при котором каждому одномерному подпространству $R^+(\mathbf{x})$ сопоставляется одна и только одна пара диаметрально противоположных точек сферы действительного радиуса. И

[2]Певзнер, С.Л. Проективная геометрия: учеб. пособие по курсу «Геометрия» для студентов-заочников II-III курса физ.-мат. фак. / С.Л. Певзнер. М.: Просвещение, 1980. 128 с.

[3]Ромакина, Л. Н. Геометрия гиперболической плоскости положительной кривизны : в 4 ч. Ч. 1 : Тригонометрия / Л.Н. Ромакина. - Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2013. - 244 с.

наоборот, каждой паре диаметрально противоположных точек соответствует одномерное подпространство.

Таким образом, плоскость $\widehat{H}$ может быть реализована на сфере действительного радиуса ρ со склеенными диаметрально противоположными точками в пространстве R_1^3 и, следовательно, является проективной моделью двумерного пространства де Ситтера. Число $\rho, \rho \in \mathbb{R}_+$, называют радисом кривизны, число $1/\rho^2$ - кривизной плоскости $\widehat{H}$.

В пространстве R_1^3 с каждой точкой связан изотропный, или световой, конус, который состоит из всех прямых, проходящих через эту точку и направленных по изотропным векторам.

Каждую плоскость в пространстве R_1^3 можно отнести к одному из трёх типов. Для этого рассмотрим произвольную точку M на плоскости α. Если плоскость α пересекает изотропный конус с вершиной в точке M по двум мнимо сопряжённым образующим, то плоскость α называется евклидовой. Если плоскость α пересекает изотропный конус по двум действительным различным образующим, то плоскость α называется псевдоевклидовой. А если плоскость α пересекает изотропный конус по совпадающим образующим, то плоскость α называется флаговой.

Очевидно, что это определение не зависит от выбора точки M.

Эллиптическим, гиперболическим и параболическим прямым плоскости $\widehat{H}$ в двумерном пространстве де Ситтера соответствуют сечения сферы действительного радиуса в пространстве R_1^3 евклидовыми, псевдоевклидовыми и флаговыми плоскостями, проходящими через центр сферы.

При сдвигах вдоль эллиптических прямых точки плоскости $\widehat{H}$ движутся по гиперциклам. Определим гиперцикл метрически.

Множество всех точек плоскости $\widehat{H}$, удаленных от заданной эллиптической прямой l на данное действительное расстояние h, назовем гиперциклам плоскости $\widehat{H}$ с базой l и высотой h. Обозначение: $\omega(l,h)$ - гиперцикл с базой l и высотой h.

Полюс прямой l относительно абсолюта, несобственную точку плоскости $\widehat{H}$, обозначим S. Гиперцикл $\omega(l,h)$ является множеством всех точек плоскости $\widehat{H}$, удаленных от точки S на расстояние $r = i\pi\rho/2 - h$. Точку S назовем центром гиперцикла $\omega(l,h)$, число r - его радиусом. Каждую прямую, проходящую через центр гиперцикла, назовем осью гиперцикла. Полуплоскость между двумя осями гиперцикла назовем центральным углом гиперцикла, определенным данными осями.

В пространстве Минковского гиперциклу с базой l плоскости $\widehat{H}$ соответствует сечение сферы действительного радиуса евклидовой плоскостью, параллельной плоскости, соответствующей эллиптической прямой l.

Теорема 5.1 В каждой точке гиперцикла плоскости $\widehat{H}$ существует эллиптическая касательная к гиперциклу, ортогональная оси гиперцикла, проведенной через точку касания.

Выберем на плоскости $\widehat{H}$ радиуса кривизны $\rho, \rho \in \mathbb{R}_+$, ортогональные пересекающиеся в точке O прямые, эллиптическую Ou и гиперболическую Ov, и собственную точку E плоскости $\widehat{H} : E \notin Ou, E \notin Ov$ (Рисунок 1). Поскольку $Ou \perp Ov$, точка $U(V)$, полюс прямой $Ou(Ov)$ относительно абсолюта, принадлежит прямой Ov (Ou). Проекцию точки E из $U(V)$ на прямую $Ou(Ov)$ обозначим E_1 (E_2); отрезок между точками O, V, содержащий точку $E_1, -\bar{e}_1$; квазиотрезок между точками O, U, содержащий точку $E_2, -\bar{e}_2$.

Квазиугол между прямыми Ou, Ov, содержащий точку E, обозначим α. Положительным направлением на прямой Ov будем считать направление луча этой прямой, принадлежащего квазиотрезку $\bar{e}_2$.

Каждой точке M плоскости $\widehat{H}$ поставим в соответствие пару чисел (u, v) следующим образом. Пусть M_1 - проекция точки M на прямую Ou из точки $U, \bar{a}$ - отрезок между точками O, M_1, который либо полностью, либо большей своей частью принадлежит отрезку $\bar{e}, a(b)$ - длина отрезка $\bar{a}$ (MM_1). Обозначим

$$u = \frac{a}{\rho}, \quad v = \delta\frac{b}{\rho}, \tag{5.8}$$

где $\delta = 1$ при $M \in \alpha, \delta = -1$ при $M \notin \alpha$.

Равенства (5.8) устанавливают взаимно однозначное соответствие между точками плоскости $\widehat{H}$ и парами чисел $(u, v), u \in [0, \pi), v \in \mathbb{R}$.

Систему элементов $C_{\mathrm{h}} = Ou, Ov, E$ мы будем называть гиперциклической системой координат плоскости $\widehat{H}$.

Прямую $Ou(Ov)$ мы будем называть эллиптической (гиперболической) координатной осью, а точку E — направляющей точкой системы C_{h}.

Очевидно, что две направляющие точки, которые принадлежат одному квазиуглу α и одной полуплоскости между прямыми Ov и UV, задают одну систему гиперциклических координат с осями Ou и Ov.

Чтобы не было неопределённости, условимся выбирать точку E на пересечении параболических прямых, которые проходят через точки O и V.

Пару чисел (u, v), где $u \in [0, \pi)$, а $v \in \mathbb{R}$, определённую равенствами (6), мы будем называть гиперциклическими координатами точки M.

Выясним геометрический смысл гиперциклических координат точки на $\widehat{H}$. Полуплоскость между прямыми Ov, MU, основанием которой является отрезок $\bar{a}$, назовем опорной полуплоскостью точки M в системе C_{h}. По лемме 1u-мера опорной полуплоскости точки $M(u, v)$.

Пусть M_0 - полюс прямой MU относительно абсолюта, тогда $M_0 \in O$. Прямая MM_0 ортогональна гиперболической прямой MU и пересекает ее в собственной на $\widehat{H}$ точке M, следовательно, является эллиптической прямой[4].

Эллиптический угол M_1M_0M с основанием M_1M назовем опорным углам точки M в системе C_{h}.

Гиперцикл ω с базой Ou и касательной MM_0 в точке M пересекает ось Ov в двух точках, которые принадлежат разным лучам прямой Ov, исходящим из точки O.

Точку пересечения, которая лежит на квазиотрезке $\bar{e}_2$, обозначим как M_2. Длина отрезка OM_2 равна длине отрезка M_1M и составляет b.

Следовательно, эллиптический угол с основанием OM_2 между прямыми Ou и VM_2 равен опорному углу точки M в системе координат C_{h}. При этом $|v|$ — это величина опорного угла точки $M(u, v)$.

На плоскости $\widehat{H}$ зададим гиперциклическую систему координат $C_{\mathrm{b}} = Ou, Ov, E$ таким образом, чтобы прямые OE и VE были параболическими.

Канонический репер $R^* = O, V, U, E$ первого типа будем считать присоединённым к системе C_{b}.

[4]Ромакина, Л.Н. Геометрии коевклидовой и копсевдоевклидовой плоскостей. Учебное пособие по спецкурсу для студентов- математиков педагогических специальностей вузов. / Л.Н. Ромакина — Саратов.: Научная книга, 2008. — 279с.

Определим связь между гиперциклическими координатами (u, v) точки M в системе координат C_{h} и её собственными проективными координатами $(\bar{x}i)$ в репере R^*, присоединённом к $C\mathrm{h}$.

Пусть (x_i) - вещественные проективные координаты точки M в R^*. Тогда точка M_1 имеет в R^* координаты ($x_1 : x_2 : 0$).

По формулам вычисления расстояния $|AB|$, если между точками A, B гиперболической (эллиптической) прямой в репере R^* заданы координаты (a_i), (b_i)

$$\operatorname{ch}\frac{|AB|}{\rho} = \pm\frac{a_1b_1 + a_2b_2 - a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 - a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 - b_3^2}}$$
$$\left(\cos\frac{|AB|}{\rho} = \pm\frac{a_1b_1 + a_2b_2 - a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 - a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 - b_3^2}}\right).$$

с учетом введенных обозначений получаем

$$\cos\frac{a}{\rho} = \cos u = \pm\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad \operatorname{ch}\frac{b}{\rho} = \operatorname{ch} v = \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 - x_3^2}},$$

следовательно,

$$\operatorname{tg}^2 u = \frac{x_2^2}{x_1^2}, \quad \operatorname{cth}^2 v = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_3^2}. \tag{5.9}$$

Применяя равенства (5.9), собственные координаты собственной точки M плоскости $\widehat{H}$ в репере R^* запишем в виде

$$\bar{x}_1 = \rho\cos u\operatorname{ch} v, \quad \bar{x}_2 = \rho\sin u\operatorname{ch} v, \quad \bar{x}_3 = \rho\operatorname{sh} v, \quad 0 \leq u < \pi, v \in \mathbb{R}. \tag{5.10}$$

Параметризацию плоскости $\widehat{H}$, заданную формулами (5.10), назовем гиперциклической.

Пусть собственная точка M плоскости $\widehat{H}$ задана координатами (5.10). Точки $M_u = \frac{\partial M}{\partial u}, M_v = \frac{\partial M}{\partial v}$, принадлежащие касательным в точке M к координатным линиям u, v, имеют в репере R^* координаты:

$$M_u(-\rho \sin u \operatorname{ch} v; \rho \cos u \operatorname{ch} v; 0), \quad M_v(\rho \cos u \operatorname{sh} v; \rho \sin u \operatorname{sh} v; \rho \operatorname{ch} v). \quad (5.12)$$

В силу того, что $\bar{\varphi}(M, M_u) = 0, \bar{\varphi}(M, M_v) = 0, \bar{\varphi}(M_u, M_v) = 0$, трехвершинник MM_uM_v является автополярным первого рода: точки M_u, M_v сопряжены относительно абсолюта и принадлежат поляре m точки M относительно абсолюта. Следовательно, прямой m принадлежит и точка $dM = M_u du + M_v dv$. В координатах (5.10), (5.12) получаем

$$\varphi(dM) = \gamma_{uu}(du)^2 + 2\gamma_{uv} du dv + \gamma_{vv}(dv)^2,$$
$$\gamma_{uu} = \varphi(M_u) = \rho^2 \operatorname{ch}^2 v, \quad \gamma_{uv} = \bar{\varphi}(M_u, M_v) = 0, \quad \gamma_{vv} = \varphi(M_v) = -\rho^2$$

Итак, гиперциклическая параметризация (5.10) - ортогональная ($\gamma_{uv} = 0$), квадрат линейного элемента $dl_{\mathrm{h}}\,(dl_{\mathrm{e}})$ в гиперциклических координатах равен

$$(dl_{\mathrm{h}})^2 = -\rho^2 \operatorname{ch}^2 v (du)^2 + \rho^2 (dv)^2 \quad \left((dl_{\mathrm{e}})^2 = \rho^2 \operatorname{ch}^2 v (du)^2 - \rho^2 (dv)^2\right).$$

Рассмотрим на плоскости $\widehat{H}$ гладкую гиперболическую (эллиптическую) линию ξ, заданную уравнениями:

$$u = u(t), \quad v = v(t), \quad t \in I, \quad I \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq u(t) < \pi, \quad v(t) \in \mathbb{R}.$$

Длина $l_{\mathrm{h}}(AB)\,(l_{\mathrm{e}}(AB))$ дуги гиперболической (эллиптической) линии ξ, заключенной между точками $A(t_1), B(t_2), [t_1, t_2] \in I$, равна

$$l_{\mathrm{h}}(AB) = \rho \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{-\operatorname{ch}^2 v \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2} dt$$
$$\left(l_{\mathrm{e}}(AB) = \rho \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\operatorname{ch}^2 v \left(\frac{du}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dv}{dt}\right)^2} dt\right)$$

Для фиксированного значения $u = u_0$ из равенств (5.10) находим:

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \cot u_0 = 0 \tag{5.14}$$

Уравнение (5.14) определяет на $\widehat{H}$ гиперболическую прямую, проходящую через точку U. Следовательно, координатные линии v в гиперциклической параметризации плоскости $\widehat{H}$ - гиперболические расходящиеся прямые пучка с центром в точке U. Положительным направлением координатных линий v будем называть направление их лучей, принадлежащих квазиуглу α.

Множество всех точек плоскости $\widehat{H}$, удаленных от прямой Ou на заданное расстояние $b = |v_0|\,\rho$, является гиперциклом с базой Ou высоты b, заданным в репере R^* уравнением

$$x_1^2 + x_2^2 - \operatorname{cth}^2 v_0 x_3^2 = 0.$$

Таким образом, в гиперциклической параметризации плоскости $\widehat{H}$ координатными линиями u являются концентрические гиперциклы с общим центром U. Прямые пучка с центром в точке U представляют координатные линии v и являются осями каждого координатного гиперцикла.

Линии u являются замкнутыми. Пусть линия u $(v = v_0 = const)$ пересекает положительно направленный луч Ov в точке A. Положительным направлением обхода линии u от точки A назовем ее обход, начинающийся с той дуги линии, которая принадлежит полуплоскости между прямыми Ov, UV, содержащей E.

Касательная к гиперциклу в каждой его точке по теореме 1.3 является эллиптической прямой, следовательно, дуга гиперцикла является гладкой эллиптической линией. Найдем длину $l_{\mathbf{e}}$ дуги координатной линии u ($v = v_0 =$ const) с концами в точках $A\,(u_1)\,, B\,(u_2)\,, u_1 < u_2$:

$$l_{\mathrm{e}}(AB) = \int_{u_1}^{u_2} \rho \operatorname{ch} v_0 du = \rho\,(u_2 - u_1) \operatorname{ch} v_0. \tag{5.15}$$

Согласно равенствам (5.8), (5.15) справедлива следующая теорема.

Теорема 5.2 На плоскости $\widehat{H}$ радиуса кривизны ρ длина l дуги гиперцикла высоты h, соответствующая центральному углу величиной β, может быть вычислена по формуле

$$l = \rho\beta \operatorname{ch} \frac{h}{\rho}.$$

Элемент площади dS в гиперциклических координатах (5.9) плоскости $\widehat{H}$ имеет вид

$$dS = \sqrt{|\gamma_{uu}\gamma_{vv} - \gamma_{uv}^2|} = \rho^2 \operatorname{ch} v du dv. \tag{5.16}$$

Заметим, что dS является произведением длин сторон криволинейного координатного прямоугольника, исходящих из точки плоскости и соответствующих бесконечно малым приращениям параметров u, v в данной точке.

Пусть F - поверхность с краем $\eta, F \subset \widehat{H}, \eta$ - кусочно-гладкая простая двусторонняя линия, D - область изменения параметров u, v, соответствующая поверхности F. Площадь S поверхности F согласно (5.16) определена равенством

$$S = \rho^2 \iint_D \operatorname{ch} v du dv.$$

Теорема 6.3 На плоскости H радиуса кривизны ρ дая площади S простого 4-контура, длина гиперболической (эллиптической) диагонали которого равна $2b$ (2a), имеет место равенство

$$S = 4\rho^2 \ln \operatorname{ch} \frac{b}{\rho} \quad \left(S = -4\rho^2 \ln \cos \frac{a}{\rho} \right).$$

Теорема 6.4 На плоскости $\widehat{H}$ радиуса кривизны ρ для площади S простого 4-контура с инвариантом Δ справедливо равенство

$$S = -2\rho^2 \ln(-\Delta).$$

Заключение В работе вводится гиперциклическая ортогональная система координат на расширенной гиперболической плоскости, подробно описывается мероопределение, системы координат гиперболической плоскости положительной кривизны.

Также были изучены и доказаны теоремы о площадях фигур, которые имеют важное значение для понимания геометрии расширенной гиперболической плоскости и её практического применения.

Был разработан и апробирован чат-бот для ответов на вопросы, связанные с гиперциклической системой координат.

Таким образом, в рамках данной работы были достигнуты поставленные цели и задачи, а результаты исследования могут быть использованы для дальнейшего изучения геометрии расширенной гиперболической плоскости.