

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра физики открытых систем

**Мультистабильное поведение связанных нелинейных систем с
удвоениями периода с различным уровнем диссипации в подсистемах**

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 2241 группы

направления 09.04.02 Информационные системы и технологии

института физики

Юданова Даниила Витальевича

Научный руководитель
доцент КФОС, к.ф.-м.н

_____ Савин Д. В.

Зав. кафедрой физики открытых систем,

д.ф.-м.н., профессор

_____ Короновский А.А.

Саратов 2023 г.

Введение

Изучение связанных систем с хаотической динамикой с регулируемым уровнем диссипации и получение новой информации об особенностях поведения таких систем представляется интересной задачей, поскольку, во-первых, связанные системы с хаотической динамикой можно использовать для создания систем связи и передачи информации [1], а во-вторых, поведение систем с малым уровнем диссипации обладает рядом интересных особенностей – например, демонстрируют увеличение количества сосуществующих аттракторов при уменьшении диссипации [2]. Знания о поведении таких систем, таким образом, могут быть полезны для разработки и модификации схем передачи информации при помощи хаотических сигналов, что продолжает оставаться актуальной задачей информационных технологий и, таким образом, обеспечивает **актуальность** настоящей работы. В работе исследуются определённые аспекты поведения связанных отображений с хаотической динамикой при уменьшении уровня диссипации, а именно: изучаются зависимость количества сосуществующих аттракторов от параметров в связанных нелинейных системах с удвоениями периода с различным уровнем диссипации и структура областей на плоскости параметров, в которых детектируется несколько сосуществующих аттракторов. В качестве объекта для изучения выбраны два четырёхмерных отображения: два линейно связанных отображения Эно и система связанных стандартных отображений Чирикова-Тейлора. Ранее обе указанные системы рассматривались только при одинаковом уровне диссипации в подсистемах. С целью изучения более общего случая кажется интересным рассмотреть поведение несимметричных по параметру диссипации связанных систем — т.е. различающихся параметрами диссипации, — в том числе в случае, когда диссипация в одной из подсистем мала. Такая ситуация ранее не исследовалась, что обеспечивает **новизну** рассматриваемой проблемы.

Таким образом, **целью** настоящей **работы** является изучение поведения несимметричных по параметру диссипации связанных систем с

удвоениями периода, структуры и количества сосуществующих аттракторов таких систем при изменении уровня диссипации в подсистемах. В ходе выполнения работы решались следующие **задачи**: создание комплекса программ, позволяющих визуализировать поведение четырёхмерных дискретных отображений, в частности - связанных стандартных отображений и связанных отображений Эно; изучение структуры плоскости параметров указанных отображений в окрестности границы области хаоса и её трансформаций при изменении параметров диссипации в каждой из подсистем по отдельности; изучение изменений количества сосуществующих аттракторов при изменении уровня диссипации в подсистемах; исследование взаимного расположения аттракторов в областях мультистабильности.

При численном исследовании для визуализации динамики и получения информации о структуре пространства параметров рассматриваемых систем использовались различные методы, а именно: построение карт динамических режимов, карт мультистабильности, бифуркационных деревьев для множества начальных условий. Для компьютерного моделирования использовался язык программирования Pascal, для создания программ была использована свободно распространяемая среда разработки Lazarus.

Работа состоит из трех разделов. В первом разделе описываются методы исследования. Во втором разделе приводятся результаты исследований системы связанных отображений Эно и рассматривается, как изменяется структура её плоскости параметров при изменении параметров диссипации, а так же изучается изменение количества сосуществующих с основным «побочных» аттракторов при уменьшении уровня диссипации. В третьем разделе приводятся результаты аналогичных исследований для системы связанных стандартных отображений Чирикова-Тейлора.

Мультистабильность в связанных отображениях Эно

В качестве базовой системы для исследования в данной работе выбрано четырёхмерное отображение, представляющее собой два линейно связанных отображения Эно. Исследуемая нами система имеет вид

$$x_{n+1} = \lambda_1 - x_n^2 - b_1 y_n + \varepsilon(x_n - u_n), y_{n+1} = x_n \quad (1)$$

$$u_{n+1} = \lambda_2 - u_n^2 - b_2 v_n + \varepsilon(u_n - x_n), v_{n+1} = u_n$$

Уравнения данной системы содержат параметры $\lambda_1, \lambda_2, b_1, b_2, \varepsilon$. Параметр связи ε в рамках нашей работы будет фиксирован и равен 0.4. Четыре других являются управляющими параметрами: λ_1 и λ_2 управляют удвоениями периода в подсистемах, параметры b_1 и b_2 определяют диссипацию. В случае, если параметры диссипации в обеих подсистемах одинаковы и равны b , для такой системы определитель матрицы Якоби (якобиан) равен b^2 [3].

При различных сочетаниях значений параметров динамика отображения может быть различной: периодической, квазипериодической или хаотической. В случае равенства параметров диссипации в подсистемах (будем в дальнейшем называть такую ситуацию случаем симметричной диссипации) отображение (1) исследовалось ранее. При увеличении b в этом случае происходит усложнение структуры плоскости параметров в области границы хаоса — линии удвоения периода, которые при малых b были непрерывными для всех циклов из каскада удвоения периода, теперь начиная с определённого периода, разделяются на несколько фрагментов [3]. Анализ карт динамических режимов показывает, что в случае различных значений параметров диссипации b в подсистемах (несимметричный случай) описанного выше усложнения структуры плоскости параметров при уменьшении диссипации в одной из подсистем не наблюдается.

Для изучения мультистабильности был использован метод построения бифуркационных деревьев для набора (множества) начальных условий [3]. При сохранении симметрии по параметру нелинейности λ , в случае, когда подсистемы уже несимметричны по диссипации, при сильной диссипации сосуществующих аттракторов немного, но их интервалы существования по параметру λ довольно велики. С уменьшением диссипации можно наблюдать, что количество побочных аттракторов становится несколько больше, но их

интервал существования по параметру λ уменьшается. В полностью несимметричном случае также, как и ранее, наблюдается сосуществование одновременно с основным «побочных» аттракторов, и при изменении параметра нелинейности в подсистеме с меньшей диссипацией интервал существования побочных аттракторов становится несколько больше.

Для изучения того, как расположены области в пространстве параметров, где наблюдается сосуществующие аттракторы, перейдём к методу построения карт мультистабильности [4]. На рисунке 1 представлена такая карта в несимметричном случае, а также карта динамических режимов, в случае, когда диссипация в одной из подсистем зафиксирована сильной. При увеличении параметра диссипации уменьшается размер области, в которой существует хаотический аттрактор, а областей, где имеются сосуществующие периодические аттракторы, почти нет.

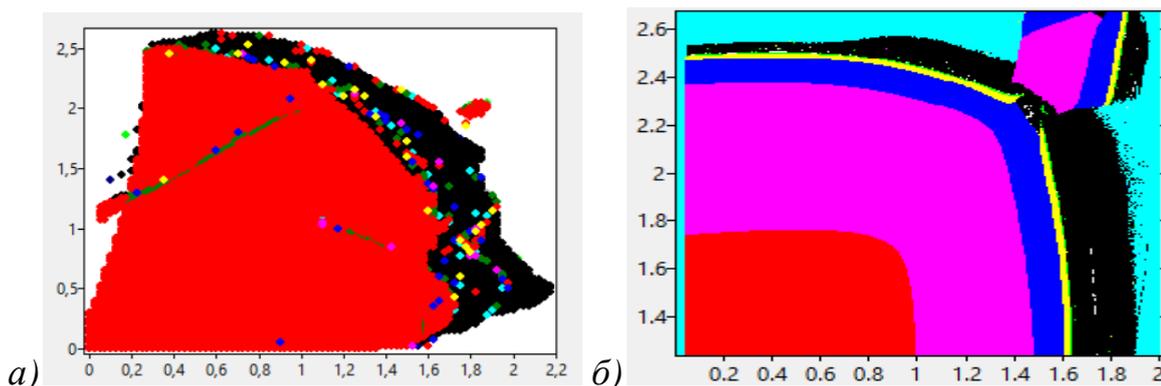


Рисунок 1 – Карты мультистабильности (а) и карты динамических режимов (б) для отображения (1) в несимметричном по диссипации случае. На координатной плоскости по вертикали откладывается значение параметра λ_2 , а по горизонтали λ_1 . Значения параметров: а) $b_2=0.5$, б) $b_2=0.5$. Параметр $b_1=0.1$

При увеличении зафиксированного в одной из систем параметра диссипации на карте появляются полосы, где наблюдается сосуществование нескольких (как правило, двух) аттракторов одновременно; такие области распределяются по всей плоскости параметров, количество таких областей увеличивается, и самих сосуществующих аттракторов в каждой из областей становится больше (Рисунок 2).

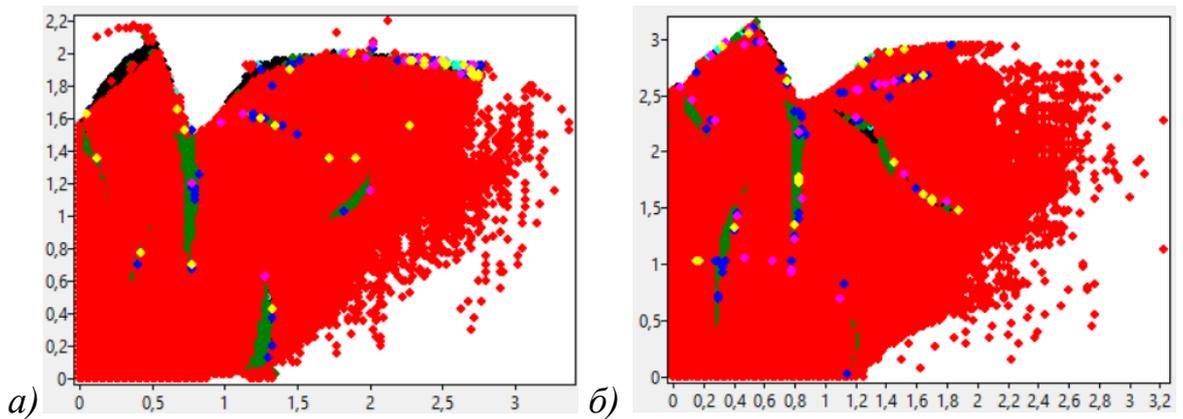


Рисунок 2 – Карты мультистабильности для отображения (1) в несимметричном случае. На координатной плоскости по вертикали откладывается значение параметра λ_2 , а по горизонтали λ_1 . Значения параметров: а) $b_2=0.3$, б) $b_2=0.7$. Параметр $b_1=0.99$

Для более детального исследования описанных выше областей сосуществования аттракторов в форме «полос» на плоскости параметров построим увеличенный фрагмент карт мультистабильности.

На рисунке 3 можно наблюдать карту мультистабильности с увеличенным фрагментом в несимметричном случае при $b_1=0.1$, $b_2=0.9$, $e=0.4$. Видно (рис. 3 б), что области, в которых программа определяет наличие сосуществующих аттракторов, на увеличенном фрагменте имеют форму языков синхронизации. Это может быть связано с тем, что одновременно с периодическими аттракторами существует квазипериодический режим, а используемая программа определяет неперiodические аттракторы, как большое количество периодических аттракторов, и рассматриваемая область закрашивается черным цветом. Как только в области квазипериодики происходит синхронизация (т.е. точка попадает на язык синхронизации), программа начинает работать корректно и определяет, что сосуществуют несколько периодических аттракторов. Построим также бифуркационные деревья в областях плоскости параметров с нетривиальной структурой, чтобы определить взаимное расположение аттракторов друг относительно друга.

На рисунке 4 приведено бифуркационное дерево для множества начальных условий, построенное «внутри» увеличенного фрагмента карты мультистабильности в несимметричном случае.

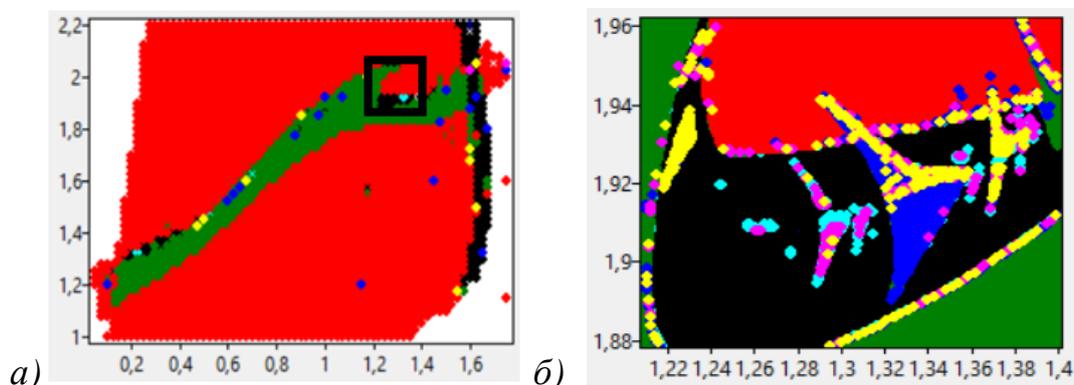


Рисунок 3 – Карта мультистабильности в несимметричном случае (а) с увеличенным фрагментом в области сосуществующих аттракторов (б). На координатной плоскости по вертикали откладывается значение параметра λ_2 , а по горизонтали λ_1 . Значения параметров $b_1=0.1$, $b_2=0.9$, $e=0.4$; б) увеличенный фрагмент карты мультистабильности в областях плоскости параметров, выделен черным прямоугольником на рис. а.

Можно наблюдать, что одновременно с несколькими периодическими аттракторами существует квазипериодический. Структура бифуркационного дерева имеет характерный для такого случая вид: непериодический аттрактор появляется из периодического «мягким» образом, и при удалении от точки бифуркации размер аттрактора (инвариантной кривой) увеличивается (см. правую картинку рис. 4).

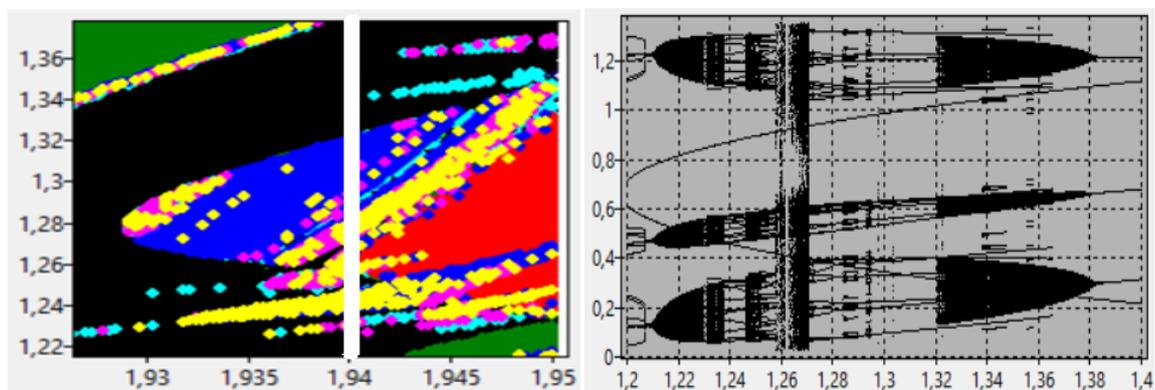


Рисунок 4 – Увеличенный фрагмент карты мультистабильности в несимметричном случае в области сосуществования нескольких аттракторов, а также бифуркационное дерево. На координатной плоскости карты мультистабильности по вертикали откладывается значение параметра λ_2 , а по горизонтали λ_1 . Значения параметров: $b_1=0.99$,

$b_2=0.1$, $e=0.4$. На координатной плоскости бифуркационного дерева по вертикали откладывается значение переменной x , а по горизонтали λ_1 . На увеличенном фрагменте карты мультистабильности белым цветом выделен маршрут, вдоль которого построено бифуркационное дерево для множества начальных условий.

Мультистабильность в связанных стандартных отображениях

Кажется разумным рассмотреть наряду с динамикой связанных отображений Эно мультистабильность в системе, также построенной на базе двумерных отображений с удвоениями периода, но имеющей более ясную физическую мотивацию. С этой целью в качестве дополнительной системы для исследования выбрана система связанных стандартных отображений Чирикова-Тейлора

$$\begin{aligned} J_{n+1} &= BJ_n - K_1 \sin x_n + \varepsilon(x_n - y_n), \\ x_{n+1} &= x_n + \frac{1+B}{2} J_{n+1}, \\ I_{n+1} &= BI_n - K_2 \sin y_n + \varepsilon(y_n - x_n), \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{1+B}{2} I_{n+1}, \end{aligned} \quad (2)$$

которая может быть получена из уравнений связанных нелинейных осцилляторов в форме уравнения математического маятника [5]. В данной системе k_1 , k_2 и B – параметры, x , y , I , J — переменные. Уровень диссипации регулируется значением параметра B : если затухание в осцилляторах отсутствует, $B=1$; уменьшение B соответствует увеличению диссипации. Удвоениями периода в подсистемах управляют параметры k_1 и k_2 . Якобиан системы (2) равен B^2 , следовательно, система консервативна лишь тогда, когда консервативны подсистемы, и связь не вносит дополнительной диссипации [5]. При малых B в данной системе общий вид области существования устойчивых периодических режимов сходен с видом аналогичной области для отображения Эно, а именно: наблюдается область существования неподвижной точки, с дальнейшим увеличением параметра видны области существования цикла периода 2 и 4, а также существование области непериодического поведения (хаоса и/или квазипериодического режима) и участков, где переменные убегают на бесконечность. Структура

карт динамических режимов позволяет сделать вывод о существовании одновременно двух аттракторов уже при сильной диссипации. Кроме того, можно отметить, что при B близких к 1 не получается построить карты динамических режимов - это связано с тем, что бассейны притяжения устойчивых режимов становятся узкими, и сложно подобрать начальные условия, попадающие в эти бассейны.

Перейдём теперь к изучению структуры пространства параметров с помощью карт мультистабильности. На рисунке 5 приведены карты мультистабильности в симметричном случае. В случае сильной диссипации количество сосуществующих аттракторов невелико (как правило, сосуществуют два аттрактора, области существования которых видны и на карте динамических режимов), а области их существования на плоскости параметров имеют большой размер и гладкие границы (см. рис. 5 а). При уменьшении диссипации количество областей мультистабильности увеличивается, а их форма существенно усложняется (см. рис. 5 б).

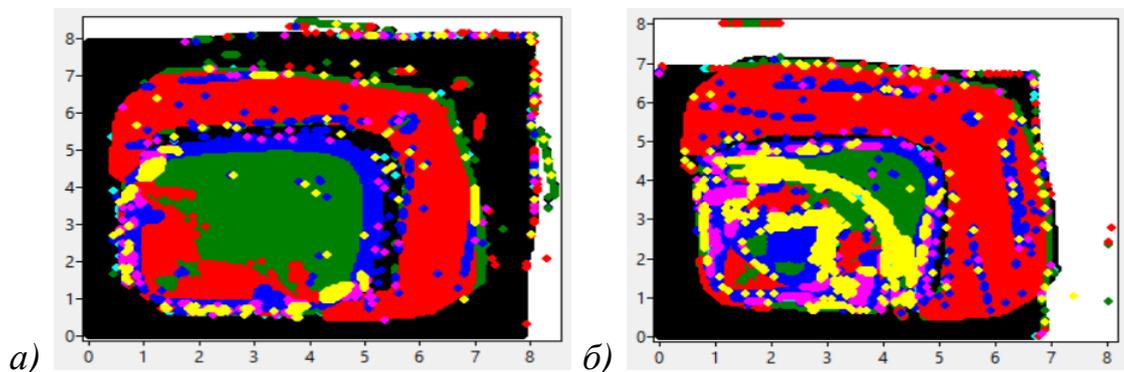


Рисунок 5 - Карты мультистабильности в симметричном случае для связанных стандартных отображений. Шаг по начальным условиям равен 0.1. На координатной плоскости по вертикали откладывается значение параметра k_2 , а по горизонтали k_1 . Значения параметров: а) $B=0.1$, б) $B=0.3$.

На рисунке 6 представлены карты мультистабильности в несимметричном случае, когда один из параметров диссипации фиксирован, а другой параметр диссипации изменяется от 0.1 до 1 . Можно наблюдать, что по мере усиления асимметрии появляются дополнительные области мультистабильности, в уже существующих областях увеличивается

количество аттракторов (рис. 6 б). По мере уменьшения диссипации в обеих подсистемах структура областей мультистабильности становится всё более и более сложной, как и в симметричном случае.

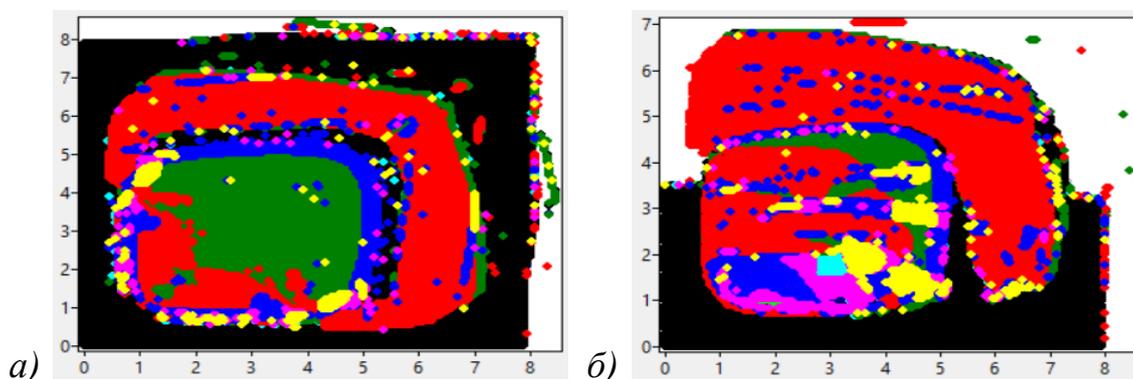


Рисунок 6 – Карты мультистабильности в несимметричном случае. На координатной плоскости по вертикали откладывается значение параметра k_2 , а по горизонтали k_1 . Значения параметров: а) $B_2=0.1$, б) $B_2=0.7$. Параметр $B_1=0.1$.

Вновь возникающие области мультистабильности, смещены в ту часть карты, которая соответствует небольшим значениям параметра k в системе с более сильной диссипацией, т.е. их возникновение соответствует движению по плоскости параметров в направлении, соответствующем каскаду удвоения периода в системе с более слабой диссипацией. При B_2 , близком к 1, появляются периодические аттракторы такого же типа, как в системах со слабой диссипацией - это аттракторы небольших периодов, которые существуют в небольшом интервале по параметру.

Вид бифуркационных деревьев, построенных в разных частях плоскости параметров, соответствует тому, что наблюдается на картах: по мере уменьшения диссипации длина интервала по параметру, в котором существуют побочные появляющиеся аттракторы, становится меньше. В случаях, когда внутри области с сосуществующими периодическими аттракторами возникает полоса существования непериодических аттракторов, анализ бифуркационных деревьев показывает, что обсуждаемые непериодические аттракторы рождаются и погибают в результате кризисов.

Заключение

В ходе выполнения магистерской работы проводилось изучение мультистабильности в связанных отображениях Эно и связанных стандартных отображениях Чирикова-Тейлора. Была изучена структура пространства параметров, отвечающих за удвоения в подсистемах, при различных значениях параметра диссипации. При небольших значениях параметров, отвечающих за удвоения периода в подсистемах, наблюдается область существования неподвижной точки, с дальнейшим увеличением параметра – области существования цикла периода 2 и 4, а также существование области неперiodического поведения (хаоса) и участков, где переменные убегают на бесконечность.

Мультистабильное поведение изучалось при помощи метода построения бифуркационных деревьев и карт мультистабильности в симметричном и несимметричном по диссипации случаях. В обоих случаях при сильной диссипации сосуществующих аттракторов немного, и их интервалы существования по параметру λ довольно велики.

Для системы связанных отображений Эно в симметричном случае при увеличении параметра диссипации на картах мультистабильности уменьшается размер области, в которой существует хаотический аттрактор, а областей, где имеются сосуществующие периодические аттракторы, почти нет. В несимметричном случае, когда в обеих подсистемах диссипация мала, области, в которых сосуществуют несколько аттракторов одновременно, распределяются по всей плоскости параметров, количество таких областей увеличивается, и самих сосуществующих аттракторов в каждой из областей становится больше.

Для более детального исследования областей, где детектировались сосуществующие аттракторы, были построены увеличенные фрагменты карт мультистабильности, а так же бифуркационные деревья в соответствующих областях плоскости параметров. Во всех случаях в рассматриваемой области

с нетривиальной структурой карты мультистабильности существует непериодический аттрактор, предположительно квазипериодический.

Для связанных стандартных отображений Чирикова-Тейлора при близких к равным значениям параметров диссипации карта имеет примерно такую же структуру, как и в симметричном случае. По мере усиления асимметрии по диссипации появляются дополнительные области мультистабильности, в уже существующих областях увеличивается количество аттракторов. По мере уменьшения диссипации в обеих подсистемах структура областей мультистабильности становится всё более и более сложной, как и в симметричном случае. Появляются сосуществующие низкопериодические аттракторы с малым интервалом существования по параметру, характерные для слабодиссипативных систем. В отличие от отображений Эно наблюдаемые в этом случае непериодические аттракторы являются, предположительно, хаотическими, и разрушаются в результате кризисов.

Список литературы

1. Дмитриев, А.С. Динамический хаос. Новые носители информации для систем связи. / А.С. Дмитриев, А.И. Панас — М.: Физматлит, 2002. — 252 с.
2. Feudel, U. Complex dynamics in multistable systems. / U. Feudel. // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. — 2008 — V. 18, № 6 — P. 1607–1626.
3. Savin, D.V. Different types of critical behavior in conservatively coupled Hénon maps. / D.V. Savin, A.P. Kuznetsov, A.V. Savin, and U. Feudel. // *Physical Review E*. — 2015 — V. 91 — P. 062905.
4. Поздняков, М.В. Особенности мультистабильных режимов несимметрично связанных логистических отображений. / М.В. Поздняков, А.В. Савин. // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. - 2010. - Т. 18, №5. - С. 45-54.

5. Савин, Д.В. Динамика неавтономных систем осцилляторного типа в случае слабой диссипации : дисс. ... канд. физ.-мат. наук : 01.04.03 / Д.В. Савин ; науч. рук. А.П. Кузнецов ; Саратовский гос. ун-т. им. Н.Г. Чернышевского, 2011. - 139 с.