

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра физики открытых систем

**Численное исследование особенностей фазовой синхронизации в системах со
сложной топологией аттрактора**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 4 курса 4041 группы
направления 09.03.02. Информационные системы и технологии
код и наименование направления (специальности)
Института физики
наименование факультета, института, колледжа
Тарасовой Анастасии Александровны
фамилия, имя, отчество

Научный руководитель
профессор кафедры ФОС,
д.ф.-м.н., доцент
должность, уч. степень, уч. звание

дата, подпись

О.И. Москаленко
инициалы, фамилия

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н., профессор
должность, уч. степень, уч. звание

дата, подпись

А.А. Короновский
инициалы, фамилия

Саратов 2023 год

Введение

Синхронизация хаоса – это явление, которое может происходить в двух и более связанных диссипативных хаотических системах. Она является одним из интереснейших явлений нелинейной динамики, которые затрагивают многие области исследования, такие как химия, биология, медицина, информационно-телекоммуникационные системы, решая в каждой из них свою задачу [1-3]. Выделяют несколько типов хаотической синхронизации в связанных динамических системах [4]. Это полная синхронизация, фазовая синхронизация, обобщённая синхронизация и синхронизация с запаздыванием.

Фазовая синхронизация является одним из важнейших режимов в современной теории нелинейных колебаний. Фазовая синхронизация означает, что происходит захват фаз хаотических сигналов, при этом амплитуды этих сигналов остаются несвязными друг с другом и выглядят хаотическими.

Данный тип синхронизации активно обсуждается в научной литературе, но затрагивает, как правило, ограниченный класс динамических систем. Это, в первую очередь, системы с относительно простой топологией аттрактора. Однако, известны системы с более сложной (двулистной) структурой, подобных исследований для которых до настоящего времени проведено не было.

Целью данной бакалаврской работы является исследование фазовой синхронизации и эффектов на её границе в системе со сложной топологией аттрактора, а именно однонаправленно связанных системах Лоренца при помощи численного моделирования с использованием языков программирования C# и Python.

Работа включает в себя 5 глав: фазовая синхронизация, перемежаемость на границе фазовой синхронизации, объект и методы исследования, фазовая синхронизация в исследуемой системе, перемежаемость в исследуемой системе.

Содержание работы

В первой главе рассматриваются основные понятия и способы введения фазы при исследовании фазовой синхронизации в динамических системах.

В основе концепции фазовой синхронизации лежит понятие мгновенной фазы

$\varphi(t)$ хаотического сигнала, которая может вводиться в рассмотрение несколькими разными способами [5-6]. Одним из самых распространенных из них является введение фазы как угла поворота в полярной системе координат:

$$\tan \varphi = \frac{y}{x}, \quad (1)$$

при этом все траектории на плоскости (x, y) должны вращаться вокруг начала координат, не пересекая и не огибая его. О наличии фазовой синхронизации говорят в том случае, когда фазы хаотических сигналов взаимодействующих систем оказываются захваченными, то есть выполняется условие:

$$|\Delta\varphi(t)| = |\varphi_2(t) - \varphi_1(t)| < \text{const} \quad (2)$$

где $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ – мгновенные фазы этих систем.

Для описания фазовой синхронизации взаимодействующих систем также используется понятие фазовой некогерентности и когерентности. Аттрактор является фазово-когерентным, когда фазовая траектория вращается вокруг начала координат плоскости, не пересекая его, а фазово-некогерентным в обратном случае.

Мера когерентности может быть определена как минимальное расстояние между точками фазовой траектории [7], т.е.

$$\rho = \min_{t \rightarrow \infty} \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \quad (3)$$

где $x(t)$, $y(t)$ – координаты фазовой траектории. $\rho > 0$ соответствует фазово-когерентному хаотическому аттрактору, $\rho = 0$, когда аттрактор теряет фазовую когерентность.

Во второй главе описывается режим перемежаемости и проводится его классификация в зависимости от величины расстройки управляющих параметров. Также приводятся статистические характеристики перемежаемости типа «игольное ушко».

Под перемежаемостью на границе синхронизации понимается режим, при котором сигнал представляет собой чередующуюся последовательность длинных участков синхронного поведения и коротких турбулентных всплесков. В контексте фазовой синхронизации сигналом является разность фаз взаимодействующих систем, а короткие турбулентные всплески представляют собой скачки на величину 2π .

На границе фазовой синхронизации тип перемежающегося поведения зависит от величины расстройки между системами. При сильной величине расстройки наблюдается, как правило, перемежаемость типа «кольцо» [8], а при относительно слабой расстройке – перемежающееся поведение типа «игольное ушко» [9].

Для того чтобы определить, какой именно тип перемежающегося поведения наблюдается на границе фазовой синхронизации, необходимо проанализировать статистические характеристики длительностей ламинарных фаз. Для режима перемежаемости «игольного ушка» характерен экспоненциальный характер распределения длительностей ламинарных фаз.

$$N(\tau) = \frac{1}{T} \exp\left(-\frac{\tau}{T}\right), \quad (4)$$

а зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности подчиняется закономерности:

$$T = \exp\left(k|\varepsilon - \varepsilon_c|^{-\frac{1}{2}}\right), \quad (5)$$

где k – некоторая положительная константа, ε_c – критическое значение управляющего параметра (параметра связи ε), соответствующее границе фазовой синхронизации [9-11].

В третьей главе приводится описание исследуемой системы и методов её исследования. В качестве объекта исследования в работе выступают две однонаправленно связанные системы Лоренца [12], которые характеризуются сложной (двулистной) структурой аттрактора:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \sigma(y_1 - x_1), \\ \dot{y}_1 &= r_1 x_1 - y_1 - x_1 z_1, \\ \dot{z}_1 &= -b z_1 + x_1 y_1, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= \sigma(y_2 - x_2) - \varepsilon(x_1 - x_2), \\ \dot{y}_2 &= r_2 x_2 - y_2 - x_2 z_2, \\ \dot{z}_2 &= -b z_2 + x_2 y_2, \end{aligned}$$

где $\mathbf{x}_{1,2} = (x_{1,2}, y_{1,2}, z_{1,2})$ – векторы состояний взаимодействующих систем; $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$, $r_1 = 40$, $r_2 = 35$ – управляющие параметры; ε – параметр связи.

Решение данных систем уравнений проводилось численно с использованием метода Рунге-Кутты 4 порядка. Для численного решения была написана программа на языке программирования C#. Также для графического представления результатов и исследования была написана программа на языке программирования Python.

В четвёртой главе описываются результаты, полученные при исследовании фазовой синхронизации.

В силу того, что система имеет сложную топологию аттрактора, введение фазы осуществлялось несколько иначе, чем для динамических систем, топология аттрактора которых является относительно простой [13]. В данном случае, необходимо было перейти к системе координат $(z_{1,2}, u_{1,2})$, где $u_{1,2}$ определяется в соответствии с формулой:

$$u_{1,2} = \sqrt{x_{1,2}^2 + y_{1,2}^2} \quad (7)$$

в которой траектории обеих систем вращаются относительно точек $(z_{1,2}^0, u_{1,2}^0)$. В новой системе координат мгновенные фазы взаимодействующих систем вводились в рассмотрение как углы поворота в полярной системе координат в соответствии с выражением:

$$\tan \varphi_{1,2} = \frac{u_{1,2} - u_{1,2}^0}{z_{1,2} - z_{1,2}^0}, \quad (8)$$

где $(z_1^0, u_1^0) = (39; 12.49), (z_2^0, u_2^0) = (33.86; 11.7)$, а диагностика фазовой синхронизации в системе (6) осуществлялась тем же способом, что и для систем с более простой структурой аттрактора, путем проверки выполнения условия захвата фаз (2) для различных значений параметра связи ε .

Рассмотрено, каким образом осуществляется переход к режиму фазовой синхронизации в системе (6). Показано, что при увеличении параметра связи наблюдается переход от асинхронного состояния к режиму фазовой синхронизации через перемежаемость.

Кроме того, диагностика фазовой синхронизации производилась при помощи расчета меры когерентности. В силу того, что исследуемые системы имеют сложную топологию аттрактора, формула (3) была переписана в виде:

$$\rho = \min_{t \rightarrow \infty} \sqrt{(z(t) - z_0)^2 + (u(t) - u_0)^2} \quad (9)$$

Используя формулу (9), была рассчитана мера когерентности для исследуемой системы при $\varepsilon \in [0; 50]$. Полученная зависимость приведена на рисунке 1.

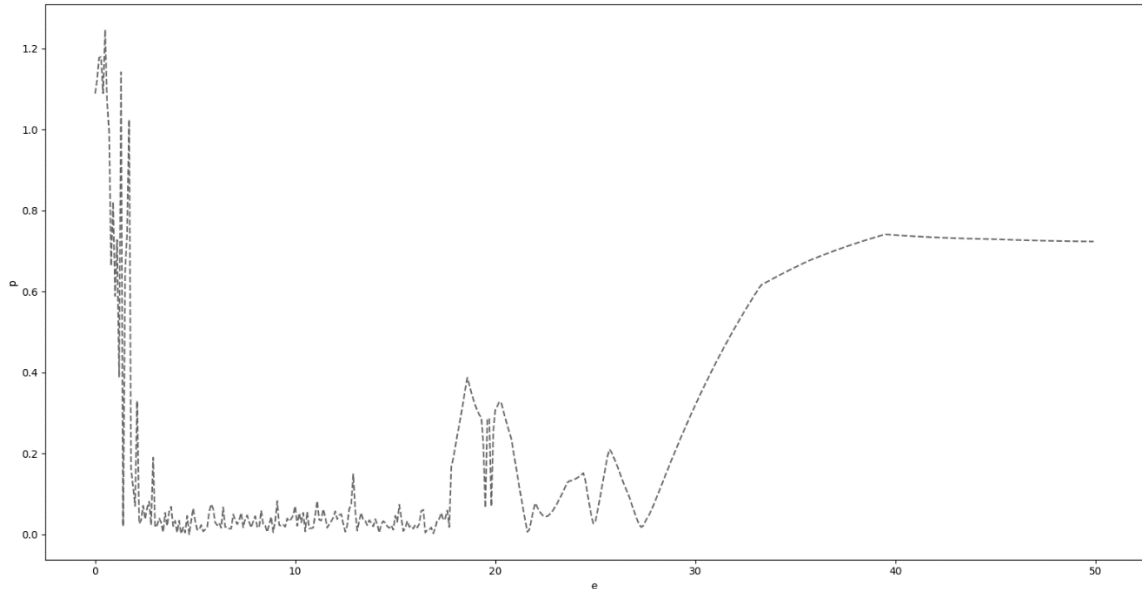


Рисунок 1 — Зависимость меры когерентности, рассчитанной для двух однонаправленно связанных систем Лоренца (6) при $r_1 = 40$, от параметра связи ε

Из рисунка видно, что при небольшом изменении параметра связи мера когерентности достаточно резко уменьшается и становится практически равной нулю, что говорит о том, что аттрактор теряет свою фазовую когерентность. Далее при ε порядка 18 мера когерентности снова выходит в положительную область, но ее величина остается достаточно малой, аттрактор становится фазово-когерентным. При $\varepsilon > 28$ начинается резкий монотонный рост меры когерентности, что может быть связано с установлением режима фазовой синхронизации.

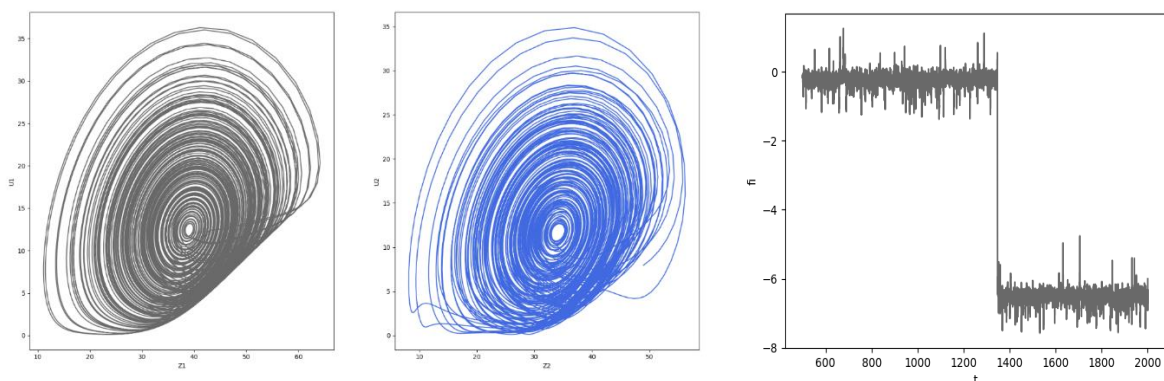
Путем проверки выполнения условия ограниченности разности фаз:

$$|\Delta\varphi(t)| < 2\pi. \quad (10)$$

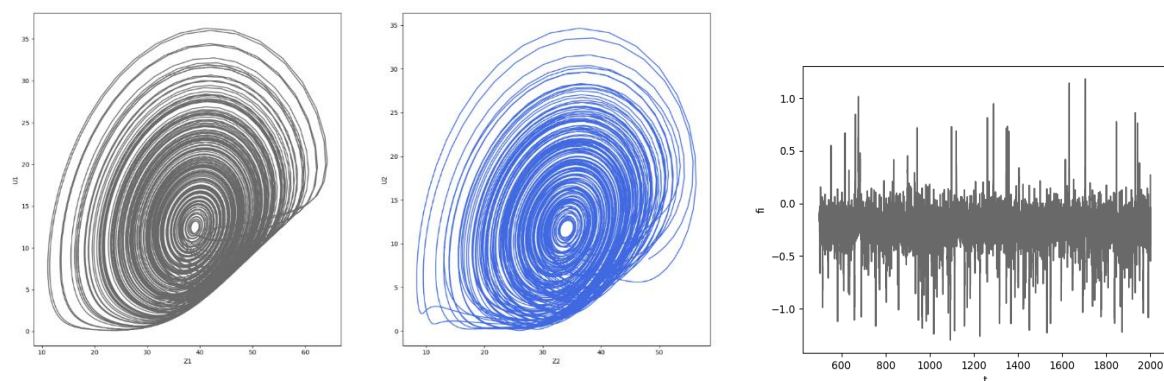
установлено, что при выбранных значениях управляющих параметров, фазовая синхронизация действительно наступает при $\varepsilon=28$.

Рассмотрено поведение взаимодействующих систем Лоренца выше и ниже этой границы и изучен вопрос о трансформации их фазовых портретов на плоскости

(z, u) и зависимости разности фаз от времени при изменении силы связи ε между системами (рисунки 2-3).



a



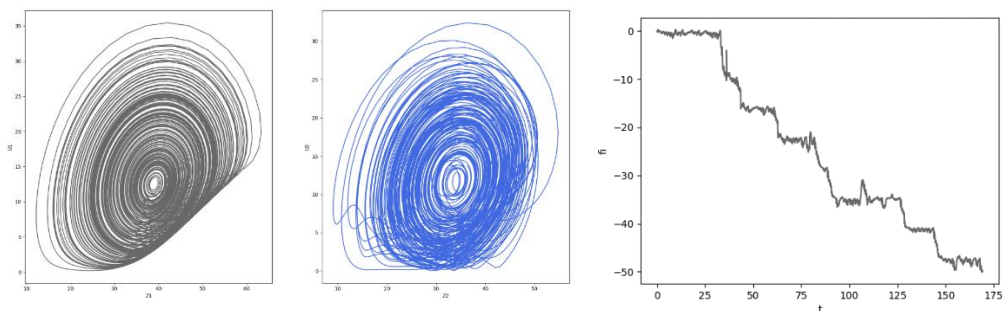
б

Рисунок 2 – Фазовые портреты систем Лоренца (б) и зависимости разности фаз в системе координат (z, u) при различных параметрах связи: (а) $\varepsilon=27$, (б) $\varepsilon=29$

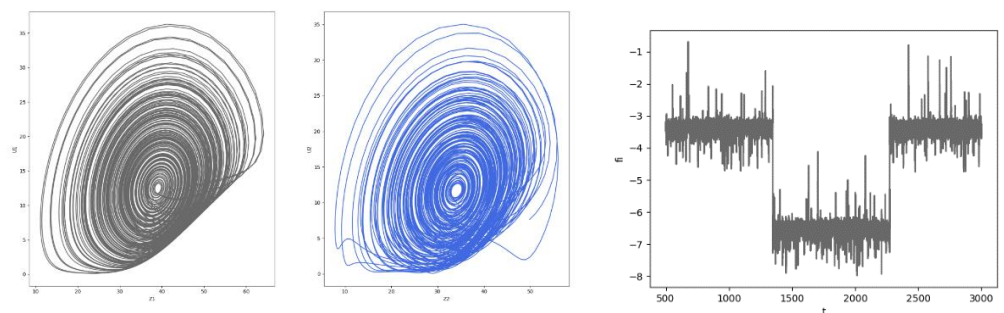
Из рисунков видно, что аттрактор ведомой системы является фазово-когерентным, как до, так и после порога наступления режима фазовой синхронизации, что соответствует положительным значениям меры когерентности (рисунок 1). При этом, по зависимостям разности фаз от времени можно четко определить границу наступления режима фазовой синхронизации.

Также в соответствии с рисунком 1 был рассмотрен участок, где мера когерентности близка к 0, и построены фазовые портреты и зависимости разности фаз от времени при значениях параметра связи, соответствующих этому участку (рисунок 3). Из рисунка 3а видно, что при относительно малых значениях параметра связи аттрактор ведомой системы является фазово-некогерентным, а на

зависимости разности фаз от времени наблюдается ее убегание.



a



б

Рисунок 3 – Фазовые портреты систем Лоренца (б) и зависимости разности фаз в системе координат (z, u) при различных параметрах связи: (а) $\varepsilon=12$, (б) $\varepsilon=25$

Ближе к границе синхронизации аттрактор ведомой системы становится снова фазово-когерентным (рисунок 3б), а на зависимости разности фаз от времени наблюдается перемежаемость.

Таким образом, ввиду достаточно большой расстройки между системами при увеличении параметра связи аттрактор ведомой системы теряет фазовую когерентность, но при приближении к границе фазовой синхронизации снова становится фазово-когерентным.

В пятой главе описаны результаты исследования перемежаемости на границе фазовой синхронизации в исследуемой системе. Для этого использовался метод выделения ламинарных и турбулентных фаз, предложенный в работе [14]. Разность фаз между системами была сведена к диапазону шириной 2π , а начало и конец ламинарной фазы определялись путем проверки пребывания этой разности внутри заранее установленного диапазона значений. Были получены статистические

характеристики длительностей ламинарных фаз для различных значений силы связи ε из диапазона от 15 до 21 и проведено их сопоставление с теоретическими закономерностями (4)-(5), характерными для перемежаемости «игольного ушка» (рисунок 4).

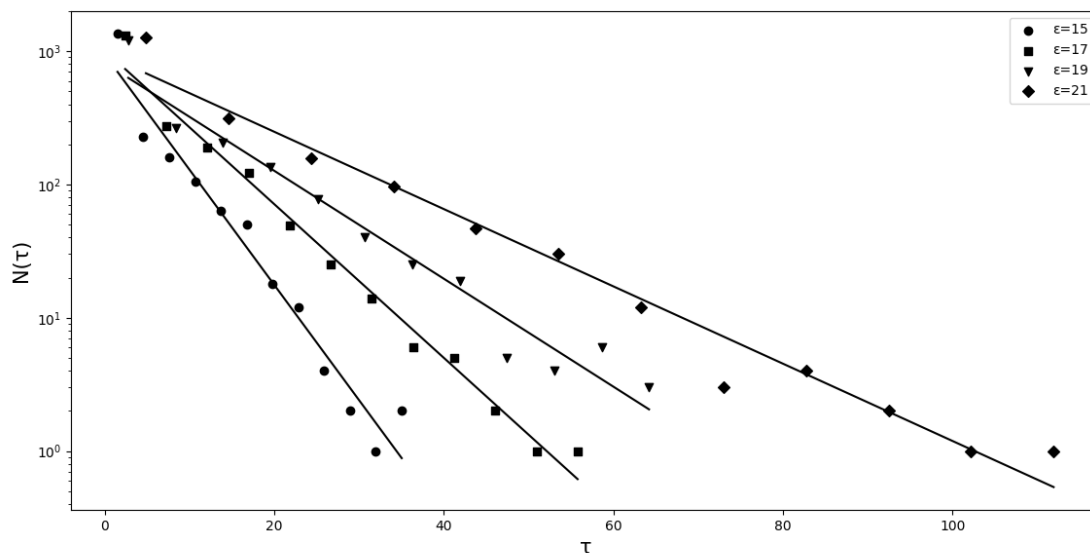


Рисунок 4 – Распределения длительностей ламинарных фаз $N(\tau)$ полученные при различных значениях параметра связи ε , и соответствующие им аппроксимации экспоненциальным законом (4): $\varepsilon = 15$ (●), $\varepsilon = 17$ (■), $\varepsilon = 19$ (▼), $\varepsilon = 21$ (◆)

Из рисунка 4 видно, что при всех рассмотренных значениях параметра связи данные численного моделирования находятся в хорошем соответствии с теоретической закономерностью, характерной для перемежаемости «игольного ушка».

Для этого же диапазона значений силы связи ε построена зависимость средней длительности ламинарных фаз T от параметра надкритичности $|\varepsilon - \varepsilon_c|$ и ее аппроксимация закономерностью (5) (рисунок 5). Данная зависимость также является доказательством наличия именно перемежаемости «игольного ушка» вблизи границы фазовой синхронизации в системах со сложной топологией аттрактора.

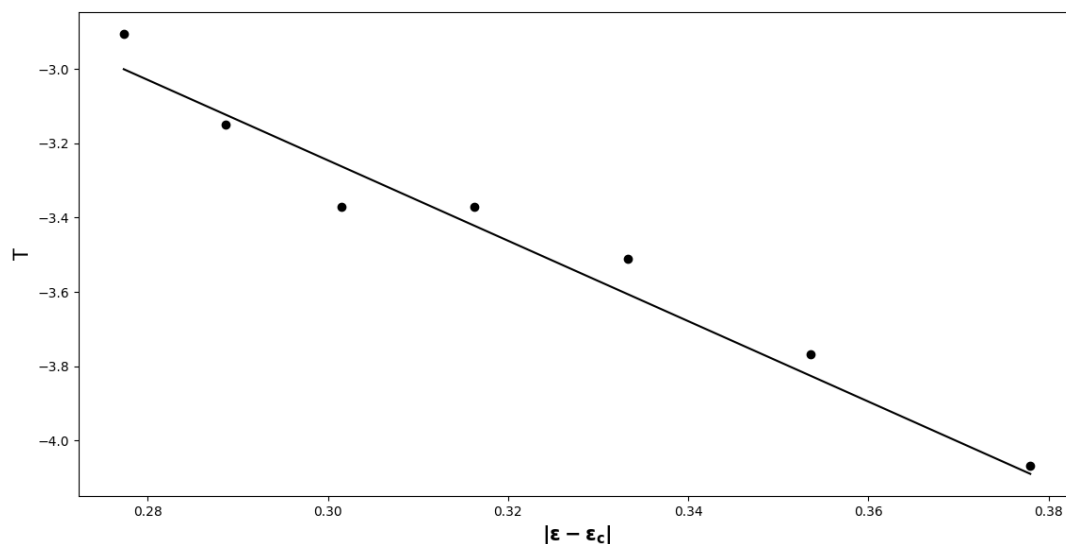


Рисунок 5 – Зависимость средней длительности ламинарных фаз T от параметра надкритичности $|\varepsilon - \varepsilon_c|$ и её аппроксимация закономерностью (5)

Из рисунка 5 видно, что численно полученные результаты находятся в хорошем соответствии с теоретическими закономерностями.

Заключение

В данной бакалаврской работе было проведено исследование фазовой синхронизации и эффектов, возникающих на ее границе в системе со сложной (двулистной) топологией аттрактора. Были рассмотрены особенности введения фазы, проведён расчёт меры когерентности и поставлен вопрос о возможности использования данной характеристики для определения границы фазовой синхронизации, также были исследованы характеристики перемежающегося поведения вблизи границы фазовой синхронизации в сравнении с уже имеющимися результатами для систем с относительно простой топологией аттрактора. Для этого были построены фазовые портреты и зависимости разности фаз от времени при различных значениях силы связи и рассчитаны статистические характеристики, благодаря которым можно сделать выводы о поведении системы при изменении параметра связи. С этой целью было выполнено численное моделирование двух однонаправленно связанных систем Лоренца с использованием языков программирования C# и Python.

При расчёте мере когерентности показано, что полученное численно значение

границы фазовой синхронизации $\varepsilon=28$ соответствует началу области монотонного роста меры когерентности, что позволяет таким образом диагностировать фазовую синхронизацию. При рассмотрении вопроса о трансформации фазовых портретов взаимодействующих систем и зависимости разности фаз от времени при изменении силы связи между системами, показано, что аттрактор ведомой системы становится фазово-когерентным еще до наступления режима фазовой синхронизации, а переход от асинхронного состояния к режиму фазовой синхронизации в исследуемой системе происходит через перемежаемость. Опираясь на полученные данные, были исследованы характеристики перемежающегося поведения. С использованием метода выделения ламинарных и турбулентных фаз построены распределения длительностей ламинарных фаз при различных значениях параметра связи ε . Показано, что при относительно слабой расстройке между взаимодействующими системами в данном случае наблюдается перемежаемость типа «игольное ушко». Полученные результаты подтверждены при помощи расчета статистических характеристик длительностей ламинарных фаз и их сопоставления с известными теоретическими закономерностями.

Список литературы

1. Boccaletti S., Kurths J., Osipov G., Valladares D.L., Zhou C.S. The synchronization of chaotic system // *Physics Reports*. 2022.V. 366.P. 1-101.
2. Пиковский А.С., Розенблюм М.Г., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление // М.: Техносфера, 2003.
3. Anishchenko V.S., Astakhov V.V., Neiman A.B. et al. *Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems // Tutorial and Modern Development*. 2nd Edition. Springer, Berlin, Heidelberg, 2007.
4. Короновский А.А., Москаленко О.И., Пономаренко В.И., Прохоров М.Д., Храмов А.Е. Синхронизация хаоса: фундаментальные подходы и практические приложения. Изд-во Саратовского университета, Саратов (2015).

- 5 Анищенко В.С., Постнов Д.Э., Эффект захвата базовой частоты хаотических автоколебаний. Синхронизация странных аттракторов //Письма в ЖТФ. 1988. Т. 14.№ 6.С.569-573.
- 6 Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J. Phase synchronization of chaotic oscillators // Phys. Rev. Lett. 1996. V. 76. N. 11.P. 1804-1807.
- 7 Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K. Two types of phase synchronization destruction //Phys.Rev. E 75 036205 2007, 9 с
- 8 Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K. Boccaletti S. Ring Intermittency in Coupled Chaotic Oscillators at the Boundary of Phase Synchronization // Phys. Rev. Lett. 2006. V. 97. P. 114101.
- 9 Pikovsky A.S., Osipov G.V., Rosenblum M.G., Zaks M.A., Kurths J. Attractor-repeller collision and eyelet intermittency at the transition to phase synchronization//Phys. Rev. Lett. 1997. V. 79. No. 1. 47-50.
- 10 Москаленко О.И. Переход к фазовой синхронизации в случае воздействия внешнего хаотического сигнала на систему с периодической динамикой // Письма в ЖТФ. 2007. Т. 33.№ 19.С. 72-79.
- 11 Куровская М.К. Распределение длительностей ламинарных фаз при перемежаемости«игольного ушка»// Письма в ЖТФ. 2008. Т. 34.№ 24.С. 48-54.
- 12 Koronovskii A.A., Moskalenko O.I., Pivovarov A.A., Khanadeev V.A., Hramov A.E., Pisarchik A.N. Jump intermittency as a second type of transition to and from generalized synchronization. Phys. Rev. E. 102, (2020) 012205.
- 13 Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Osipov G.V. Kurths J. Phase synchronization of chaotic oscillators by external driving // Physica D.1997. V. 104. N. 4. P. 219-238
- 14 Журавлев М.О., Куровская М.К., Москаленко О.И. Метод выделения ламинарных и турбулентных фаз в перемежающихся временных реализациях систем, находящихся вблизи границы фазовой синхронизации// Письма в ЖТФ. 2010. Т. 36, № 10. С. 31-38.