МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»
Кафедра дискретной математики и информационных технологий

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОБРАЗЫ АВТОМАТОВ

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 421 группы
направления 09.03.01 — Информатика и вычислительная техника
факультета КНиИТ
Тарасова Олега Игоревича

Научный руководитель
доцент, к. ф.-м. н. ______________ Л. Б. Тяпаев

Заведующий кафедрой
доцент, к. ф.-м. н. ______________ Л. Б. Тяпаев

Саратов 2023

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Данная тема является актуальной в современном мире по нескольким причинам:
1) автоматные функции и их геометрические образы используются в компьютерных системах, программировании и информационных технологиях. Они помогают разрабатывать эффективные и оптимальные алгоритмы, обеспечивающие высокую скорость выполнения задач. Кроме того, они используются для решения различных задач в области искусственного интеллекта, машинного обучения, обработки естественного языка и других смежных областях;
2) теория автоматов и формальных языков является важным фундаментальным направлением в математике и информатике. Она используется для формализации и описания явлений и объектов в различных областях науки и техники, например, в теории игр, криптографии, логике, теории баз данных и др.;
3) автоматные функции и их геометрические образы находят применение в решении практических задач в различных областях деятельности, например, в биологии, химии, физике, экономике, социологии. Они могут использоваться для моделирования и анализа сложных систем и процессов, для прогнозирования и оптимизации ресурсов и др.

Цель бакалаврской работы — Изучение теоретических возможностей автоматов в плане построения иллюстрации некоторых физических концептов.

В соответствие с поставленной целью определены следующие задачи:

1. Рассмотреть основные понятия, связанные с автоматами;
2. Изучить особенности моделирования физических явлений с помощью автоматов;
3. Разработать и реализовать программный код, реализующий алгоритм построения геометрических образов автоматов и их автономных компонент.

Методологические основы исследования автоматных функций и их геометрических образов представлены в работах Z. Kasa, Л. Б. Тяпаев, Р. И. Григорчук.

Теоретическая значимость бакалаврской работы. Автоматные функции и их геометрические образы являются одним из ключевых понятий в теории автоматов и формальных языков. С помощью конечных автоматов могут быть проинтерпретированы многие фундаментальные физические принципы и законы квантовой механики. Более того, автоматная интерпретация позволяет определить границу между макро- и планковским уровнями физической реальности на языке непрерывных функций как относительно действительной метрики, так и относительно p-адической метрики.

Практическая значимость бакалаврской работы. Разработана программа для построения геометрических образов автоматных функций и их автономных компонент.

Структура и объем работы. Бакалаврская работа состоит из введения, 2 разделов, заключения, списка использованных источников и одного приложения. Общий объем работы — 64 страниц, из них 46 страниц — основное содержание, включая 27 рисунков, список использованных источников информации — 12 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Первый раздел «Фундаментальные физические принципы и необходимый математический формализм» посвещен основным свединиям из физической и математической теории.

В *подразделе 1.1* описываются постулаты И.В. Воловича:

1. Наблюдать можно только рациональные числа; иррациональные числа наблюдать невозможно.
2. Расстояния меньше планковских не могут быть измерены.
3. Фундаментальные физические законы должны быть инвариантны по отношению к изменению числового поля.

и постулат т' Хоофта: «Вполне возможно, что на самом базовом уровне в природе не существует случайностей; всё, вплоть до мельчайших деталей, управляется неизменными законами; каждое значительное событие в нашей Вселенной происходит не просто так, оно вызвано действием физического закона, а не просто случайностью.».

А так же некоторые усовия, связанные с функциями, соответствующими постулатам.

Подраздел 1.2 включает в себя некоторые элементы теории автоматов: важнейшими функциями автоматов являются распознавание и преобразование множеств. Соответственно автоматы бывают двух типов: акцепторы и трансформаторы.

Одним из центральных вопросов теории конечно автоматных групп является вопрос о вложимости в них других известных классов групп. Он положительно решен для свободных групп, свободных абелевых групп, некоторых классов линейных и разрешимых групп, групп Р. Томпсона. Оказалось также, что группы автоморфизмов сдвигов конечного типа (т.е. группы обратимых клеточных автоматов) являются группами конечных (асинхронных) автоматов.

В *подразделе 1.3* описываются автоматные функции, особенности их представления в виде графов, а так же примеры этих функций:

Для заданного автомата $\mathfrak{A}$, автомат определяет уникальное отображение $f_{\mathfrak{A}} : \ldots \chi_2\chi_1\chi_0 \to \ldots \xi_2\xi_1\xi_0$ бесконечных слов над алфавитом $\mathcal{I}$ в бесконечные слова над алфавитом $\mathcal{O}$ следующим образом: в момент времени $i = 0$ автомат находится в состоянии s_0, принимает первую входную букву χ_0, обновляет свое состояние до нового состояния $s_1 = S(\chi_0, s_0)$ и производит выходную букву $\xi_0 = O(\chi_0, s_0)$; в следующий момент времени $i = 1$ автомат принимает букву χ_1, обновляет свое состояние до состояния $s_2 = S(\chi_1, s_1)$ и производит выходную букву $\xi_1 = O(\chi_1, s_1)$; и так далее. Следовательно, $\xi_i = \phi_i(\chi_0, ..., \chi_i)$, где $\phi_i : \mathcal{I}^i \to \mathcal{O}$ — уникально определенная последовательность отображений. Отображение $f_{\mathfrak{A}}$ называется автоматной функцией автомата $\mathfrak{A}$. Очевидно, что отображение является причинным.

Зафиксируем простое число p и рассмотрим автоматы, входной алфивит которых (соответственно, выходной алфавит) состоит из m-кортежей $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{F}_p^m = \mathcal{I}$ (соответственно, n-кортежей над $\mathbb{F}_p^n = \mathcal{O}$). Если $\mathcal{I} = \mathbb{F}_p^m$, $\mathcal{O} = \mathbb{F}_p^m$, то автоматная функция является отображением $\mathbb{Z}_p^m \to \mathbb{Z}_p^n$, удовлетворяющее условию Липшица с константой 1 (далее будем называть такие автоматные функции 1-Липшицевыми, для краткости) относительно p-адической метрики, которая определяется p-адической нормой $|(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)|_p = \max\{|\alpha_1|_p, \ldots, |\alpha_k|_p\}$ на $\mathbb{Z}_p^k$. Верно и обратное: всякое 1-Липшицевое отображение $f : \mathbb{Z}_p^m \to \mathbb{Z}_p^n$ является автоматной функцией некоторого автомата $\mathfrak{A}_f$.

В *подразделе 1.4* вводится понятие причинных функций, которые являются автоматными для любого p, и в то же время считаются непрерывными вещественными функциями:

Следующий пример вводит класс функций, являющихся автоматными для любого p и, кроме того, которые в то же время могут считаться непрерывными вещественными функциями.

Пример 1.2 (Многочлены над $\mathbb{Z}$ — это автоматные функции).

Полиномиальное отображение f, где $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ — автоматная функция; f никогда не будет функцией конечного автомата, если $\deg f \geq 2$.

Универсально причинные функции — это такие функции, которые являются причинными для любого выбора t конечных множеств $\mathcal{I}$ и $\mathcal{O}$ (элементарных причин и элементарных следствий), мощности которых равны, $\#\mathcal{I} = \#\mathcal{O} = p$, где $p \in \{2, 3, 4, ...\}$. Класс этих функций намного шире полиномов над $\mathbb{Z}$:

Теорема 1.1 (Универсально причинные функции). Одномерная функция f универсально причинна тогда и только тогда, когда f может быть представлена в виде:

$$f(x) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \cdot \mathrm{lcm}\{1, 2, ..., i\} \cdot \binom{x}{i} = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \cdot e^{\psi(i)} \cdot \binom{x}{i}$$

где $a_i \in \mathbb{Z}$, lcm{1, 2, . . . , i} — наименьшее общее кратное чисел 1, 2, . . . , i, $\Psi(i) = \sum\limits_{q<i,\ q\ prime} [\log_q i]$— вторая функция Чебышева (напомним, что $\Psi(i) = i + o(i)$), i = 1, 2, ... Более того, если все, кроме конечного числа a_i равны 0, то f является полиномом над $\mathbb{Q}$ (таким образом, является непрерывной и как вещественная и как p-адическая функция), которая отображает $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$.

Подраздел 1.5 описывает модель физической системы, подготовленной в некотором фиксированном состоянии:

Модель физической системы, подготовленной в некотором фиксированном состоянии, представляет собой инициальный автомат, который на уровне планковских масштабов подвергается экспериментатором рядом «элементарных воздействий», которые порождают серии «элементарных реакций». Воздействия/реакции происходят в дискретные моменты времени, поскольку в планковском масштабе время предполагается дискретным. Экспериментатор готовит набор «элементарных воздействий» и, в результате эксперимента, наблюдает набор «элементарных реакций». Экспериментатор подготавливает ряд одинаковых систем в одном и том же состоянии и исследует их, подвергая различным воздействиям, наблюдая реакции и получая таким образом ряд экспериментальных точек (воздействие; реакция). Поскольку никакие измерения в планковских масштабах в настоящее время не представляются возможными, экспериментатор рассматривает любое измеренное значение как действительное число до ненулевой действительной ошибки. Ошибка, однако, может быть большой в планковском масштабе. Таким образом, возникает вероятность. Следует подчеркнуть ещё раз, что ошибка на планковском масштабе не является скрытым параметром, поскольку соотношение неопределенности имеет место быть, если ошибка равна нулю.

Подраздел 1.6 описывает волновые функции, и их связь с автоматами:

Редуцированная диаграмма переходов состояний конечного автомата — это диграф, каждый путь которого в конечном итоге достигает минимальной подсистемы. Исходящих путей от подсистем не существует. С помощью подачи автомату случайных длинных слов, каждой минимальной подсистеме присваивается вероятность, при которой автомат достигает состояний, которые принадлежат этой подсистеме. Подсистема может рассматриваться как набор (под)автоматов, начальные состояния которых являются состояниями подсистемы. Если подавтомат аффинный, то (в силу минимальности) все подавтоматы подсистемы являются аффинными, а предельная график каждого подавтомата — это одно и то же семейство обмоток тора. Таким образом, можно присвоить вероятность функции $\psi(x,k) = e^{i(ax-2\pi p^k b)}$.

Второй раздел «Построение геометрических образов автоматов» посвящен построению геометрических образов автоматов и их автономных компонент.

В *подразделе 2.1* рассматривается система $\mathfrak{A} = (\mathcal{I}, \mathcal{S}, \mathcal{O}, S, O, s_0)$ — инициальный автомат, причем входной алфавит состоит из N символов, $|\mathcal{I}| = N$, а выходной – из M символов, $|\mathcal{O}| = M$ (причем, мы не исключаем $|\mathcal{I}| = |\mathcal{O}| = p$). Так же в этом подразделе описывается алгоритм построения геометрического образа автомата $\mathfrak{A} = (\mathcal{I}, \mathcal{S}, \mathcal{O}, S, O, s_0)$.

В *подразделе 2.2* непосредственно реализуется алгоритм построения геометрических образов автоматов и их автономных компонент на примере автоматов A_1, A_2, A_3, которые получают на вход двоичные слова, длинна которых ограничена величиной $k = 1, 2, \ldots$, диаграммы переходов между состояниями которых выглядят так, как показано на рисунках 1, 2, 3.

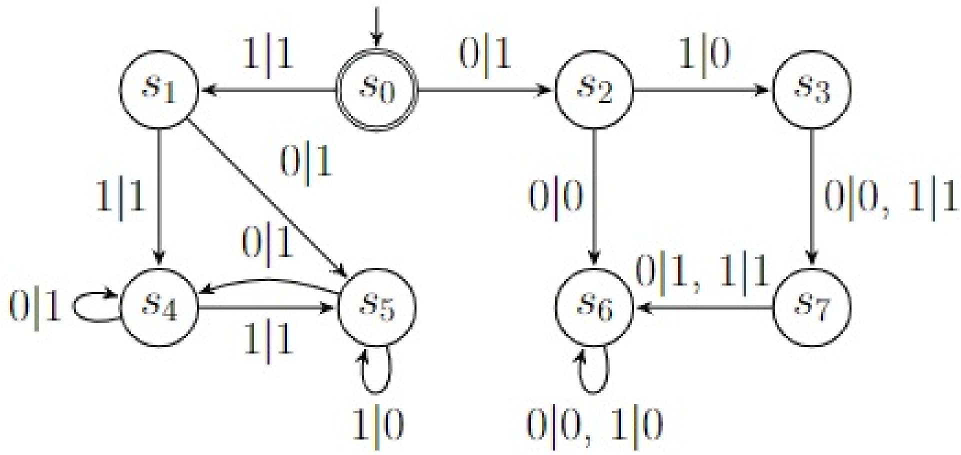

Рисунок 1 — Диаграмма переходов между состояниями автомата A_1.

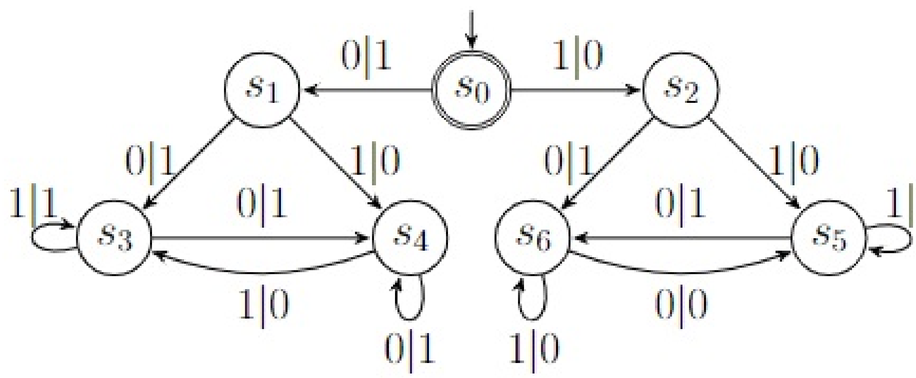

Рисунок 2 — Диаграмма переходов между состояниями автомата A_2.

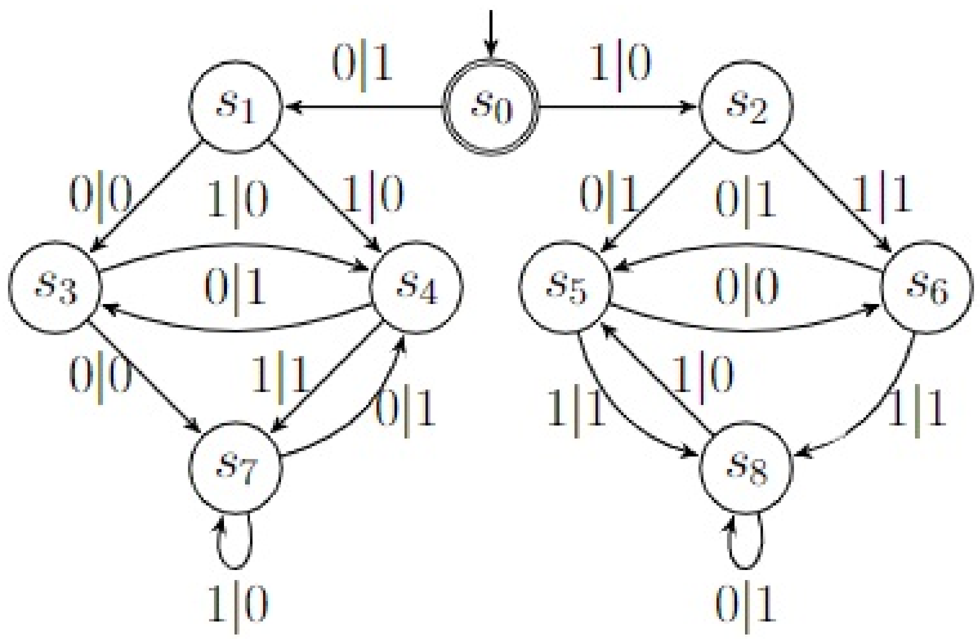

Рисунок 3 — Диаграмма переходов между состояниями автомата A_3.

В начале создаётся набор функций, которые выполняют следующие задачи:

1. Функции AutomatFunktion1(a), AutomatFunktion2(a), AutomatFunktion3(a) моделируют работу автоматов, изображённых на рис. 13, 14, 15 соответственно.
2. Функция ConvertFunktion(k) получает на вход строку, и возвращает значения типа данных "число" , заменяя во входной строке "0" на "1" и "1" на "2".
3. Функция FindXorYFunktion(c) получает на вход число, состоящее из 1 и 2, и однозначно сопостовляет этому числу некоторый x (или y).
4. Функции IsZero(b) и IsOne(b) получают на вход строку, состоящую из 0 и 1, и производят проверку этих строк: если строка состоит полностью из 0 (соответственно, 1), функция возвращает значение "истина иначе функция возвращает значение функция возвращает значение "ложь". Это необходимо для того, чтобы в дальнейшем построить геометрические образы автономных компонент автомата.
5. Функция InputGenerate(n) получает на вход натуральное число n (максимальная длинна слов), и генерирует массив всех двоичных слов длинны n и меньше, вплоть до одного знака.
6. Функции Funktion1A1(x),..., Funktion6A3(x) реализуют аналитические функции для каждого автомата.

Далее происходит объявление массива входных данных inputArray, значения в котором генерируются с помощью функции InputGenerate(n)

Следующий цикл заполняет массив outputArray значениями, которые получаются из элементов массива inputArray, после того как они обрабатываются функцией AutomatFunktion1 (здесь count - это количество элементов массива inputArray):

```
for i in range(count):
    outputArray[i] = AutomatFunktion1(inputArray[i])
```

В следующем цикле происходит заполнение массивов Xarray и Yarray, в которых хранятся, соответственно, значения X и Y, полученные после обработки входных (для X) и выходных (для Y) слов автомата A1.

```
for i in range(count):
    Xarray[i] = FindXorYFunktion(str(ConvertFunktion(inputArray[i])))
    Yarray[i] = FindXorYFunktion(str(ConvertFunktion(outputArray[i])))
```

Далее с помощью библиотеки matplotlib создаётся график (изображённый на рисунке 4) по точкам X и Y, полученным ранее:

```
plt.plot(Xarray, Yarray, 'ro')
```

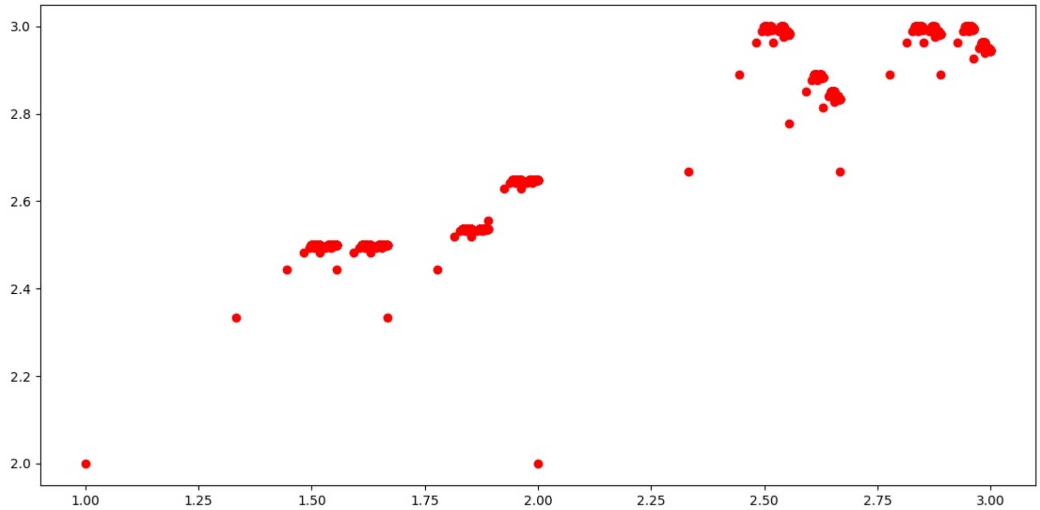

Рисунок 3 — Диаграмма переходов между состояниями автомата A_3.

Аналогичным способом строятся геометрические образы автоматов A_2 и A_3.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе данной бакалаврской работы были изучены фундаментальные физические принципы, причинные функции, необходимые элементы современной теории автоматов, алгоритм построения геометрических образов автоматов и их автономных компонент.

С помощью конечных автоматов могут быть проинтерпретированы многие фундаментальные физические принципы и законы квантовой механики. Более того, автоматная интерпретация позволяет определить границу между макро- и планковским уровнями физической реальности на языке непрерывных функций как относительно действительной метрики, так и относительно p-адической метрики.

В практической части работы был разработан и реализован программный код, реализующий алгоритм построения геометрических образов автоматов и их автономных компонент, и был проведён анализ полученных результатов.

Таким образом, поставленные задачи были решены, обозначенные цели были достигнуты.

Основные источники информации:

1. Anashin, V. Toward the (non-cellular) automata interpretation of quantum mechanics: Volovich postulates as a roadmap. Int. J. Mod. Phys. A 2022, 37, 2243003.
2. Goldin, D.; Smolka, S.A.; Wegner, P. (Eds.) Chapter A Theory of System Interaction: Components, Interfaces, and Services. Interactive Computation; Springer: Berlin/Heidelberg, Germany, 2006; pp. 41–96.
3. Kalman, R.E.; Falb, P.L.; Arbib, M.A. Topics in Mathematical System Theory; McGraw-Hill: New York, NY, USA, 1969.
4. Григорчук, Р. И. Автоматы, динамические системы и группы / Р. И. Григорчук, В. В. Некрашевич, В. М. Сущанский // Тр. МИАН. — 2000. — Т. 231, № 12. — С. 134–214.
5. Anashin, V.; Khrennikov, A. Applied Algebraic Dynamics. In de Gruyter Expositions in Mathematics; Walter de Gruyter GmbH and Co.: Berlin, Germany, 2009; Volume 49.
6. Тяпаев Л.Б. Классы автоматных отображений, продолженных по непрерывности на пространство действительных чисел. //Компьютерные на-

уки и информационные технологии: Материалы между науч. конф. — Саратов, 2021. С.24-27.

7. Anashin V.S., The p-adic theory of Automata Functions. STEAM-H: Science, Technology, Engineering, Agriculture, Mathematics and Health, Springer Nature, 2021, pp.9-113.
8. Tyapaev L.B., Transitive families and measure-preserving an n-unit delay mappings. In Proceedings of the International Conference on Computer Science and Information Technologies (June 30-July 2, 2016, Saratov), pages 425–429, Saratov, 2016. Publishing Center Nauka.
9. Tyapaev L.B., Solving some problems of automata behaviour. Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform., 6(1–2):121–133, 2006.