

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра дискретной математики и информационных технологий

АВТОМАТНЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ ГРАФИКИ

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 421 группы
направления 09.03.01 — Информатика и вычислительная техника
факультета КНиИТ
Постнова Дмитрия Сергеевича

Научный руководитель

доцент, к. ф.-м. н.

Л. Б. Тяпаев

Заведующий кафедрой

доцент, к. ф.-м. н.

Л. Б. Тяпаев

Саратов 2023

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Работа посвящена актуальной задаче на стыке физики, математики и современной теории автоматов: математическому описанию физической реальности на планковских масштабах пространства и времени с помощью автоматов. Следует отметить, что возможность применения клеточных автоматов на планковских масштабах были предприняты т' Хоофтом. В данной работе рассматривается интерпретация квантовой механики с помощью классических (неклеточных) конечных автоматов, опираясь на исследования В.С. Анашина по неархимедовой теории автоматов, и физические постулаты И.В. Воловича и 'т Хоофта. В данной работе автор рассматривает конечные автоматы как функции над кольцом целых радиальных чисел, которые допускают их дальнейшее вложение в геодезические на поверхность двумерного тора и на поверхность цилиндра, образующие комплексно-значные обмотки, которые можно интерпретировать как волновые функции.

Цель бакалаврской работы — создание программного обеспечения для построения графиков автоматных функций на поверхности тора и на поверхности цилиндра.

Задачами работы являются следующие:

1. изучение элементов неархимедовой теории автоматных функций;
2. изучение описания волновой функции с помощью графиков автоматных функций;
3. экспериментальное наблюдение проекций линейных и нелинейных автоматных функций.

Методологические основы исследования автоматных функций и их графиков представлены в работах v. Anashin, Л. Б. Тяпаев, Р. И. Григорчук.

Теоретическая значимость бакалаврской работы. Автоматные функции и их графики являются одним из ключевых понятий в теории автоматов и формальных языков. Конечные автоматы, функционирующие в дискретном времени могут являться моделями волновых функций. Графики могут наглядно проиллюстрировать волновые функции.

Практическая значимость бакалаврской работы. Разработана программа для отображения графиков автоматных функций на поверхности цилиндра и тора.

Структура и объем работы. Бакалаврская работа состоит из введения, 5 разделов, заключения, списка использованных источников и одного приложения. Общий объем работы — 59 страниц, из них 40 страниц — основное содержание, включая 41 рисунок, список использованных источников информации — 20 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Первый раздел «Постулаты И.В. Волочиа и т'Хоофта» посвящен основным постулатам (постулаты Воловича), на которых основана p -адическая математическая физика:

1. Наблюдать можно только рациональные числа; иррациональные числа наблюдать невозможно.
2. Расстояния меньше планковских не могут быть измерены.
3. Фундаментальные физические законы должны быть инвариантны по отношению к изменению поля чисел.

Постулат причинности 'т Хоофта (который лежит в основе интерпретации клеточного автомата квантовой механики) гласит:

«Вполне возможно, что на самом базовом уровне в природе не существует случайностей. . . Всё, вплоть до мельчайших деталей, управляется неизменными законами. Каждое значительное событие в нашей Вселенной происходит не просто так, оно вызвано действием физического закона, а не просто случайностью».

Второй раздел «Элементы теории автоматов» посвящен основным понятиям из теории автоматов.

В *подразделе 2.1* представлены основные сведения о детерминированных автоматах.

В *подразделе 2.2* рассматриваются недетерминированные автоматы.

В *подразделе 2.3* описывается p -адическая теория автоматных функций.

В *подразделе 2.4* описывается инициальный асинхронный автомат. .

Подраздел 2.5 посвящен описанию рациональных множеств.

В *подразделе 2.6* приводится редукция (обобщение алгоритма минимизации).

В *подразделе 2.7* приводится описание графиков автоматных функций. Наша модель физической системы, подготовленной в некотором фиксированном состоянии, представляет собой инициальный автомат, который на уровне

планковских масштабов подвергается экспериментатором набором "элементарных воздействий" и, таким образом, производит наблюдает набор "элементарных реакций": воздействия/реакции происходят в дискретные моменты времени поскольку в планковском масштабе время предполагается дискретным. Экспериментатор подготавливает серии "элементарных воздействий" и, таким образом, наблюдает серии "элементарных реакций". Экспериментатор подготавливает ряд одинаковых систем в одном и том же состоянии и исследует их, подвергая различным воздействиям, наблюдая реакции и получая таким образом ряд экспериментальных точек (воздействие; реакция). Поскольку никакие измерения на планковских масштабах в настоящее время не представляются возможными, экспериментатор рассматривает любое измеренное значение как действительное число до ненулевой действительной ошибки. Ошибка, однако, может быть большой в планковском масштабе. Таким образом, возникает вероятность. Следует подчеркнуть ещё раз, что ошибка на планковском масштабе не является скрытым параметром, поскольку соотношение неопределенности имеет место быть, если ошибка равна нулю.

Говоря очень упрощенно, график — это изображение, которую экспериментатор получает в результате эксперимента, состоящего из ряда отдельных зондирований физической системы, которая готовится в одном и том же состоянии перед каждым зондированием. Доказано, что имеет место следующая альтернатива: либо $\mathcal{P}^2(f)$ нигде не плотен в \mathbb{I}^2 либо $\mathcal{P}^2(f) = \mathbb{I}^2$. Если говорить упрощенно, это означает, что в первом случае график не может содержать "фигуры" но может содержать "линии". При дополнительном (и физически обоснованном) предположении, что число "эпистемологических состояний" автомата конечно, "гладкие линии" такого рода полностью описываются: Если склеить противоположные стороны единичного квадрата \mathbb{I}^2 , то получается (двумерный) тор $\mathbb{T}^2 \subset \mathbb{R}^3$, и тогда линии становятся обмотками тора. На рисунках 1-2 показаны примерные линии, когда автомат является автономным.

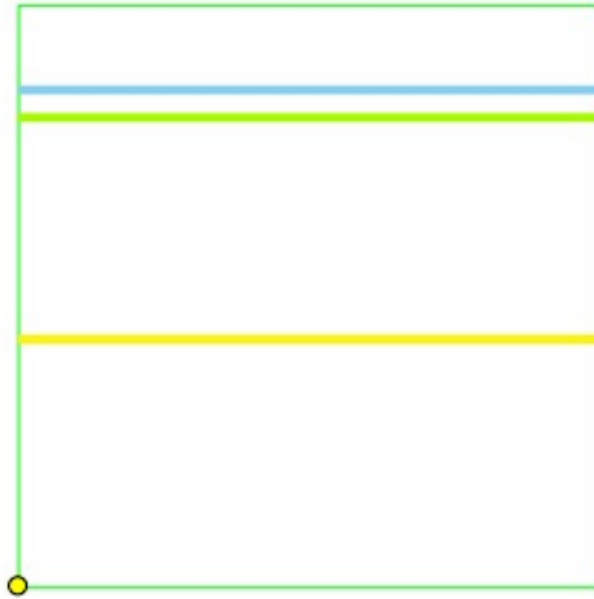


Рисунок 1 – Предельный график функции $f(z) = 2/7(z \in Z_2)$, в I^2

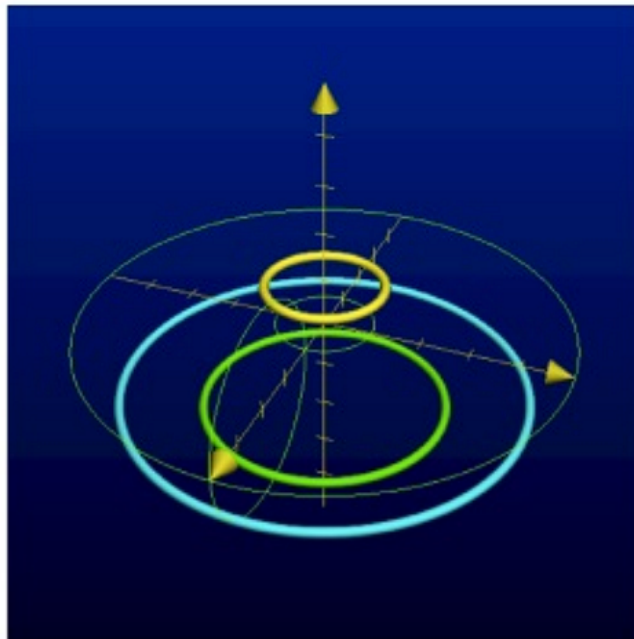


Рисунок 2 – Предельный график той же функции на торе T^2

На рисунках 3-4 изображены линии, созданные неавтономным автоматом.

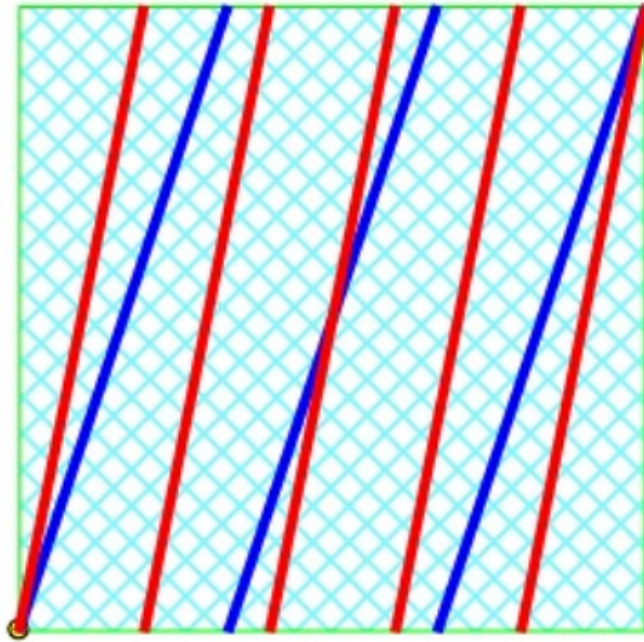


Рисунок 3 – Предельный график автомата, имеющего два субавтомата, функциями которых являются $z \rightarrow 3z$ и $z \rightarrow 5z$, ($z \in Z_2$).

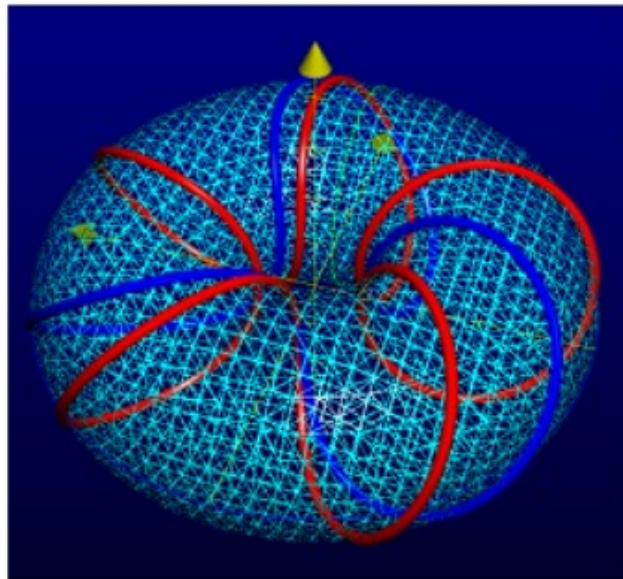


Рисунок 4 – Предельный график того же автомата на торе $T^2 \subset \mathbb{R}^3$.

В *подразделе 2.8* приводится автоматная интерпретация волновой функции. Функции являются строительными блоками для построения волновых функций на основе причинно-следственных связей. Редуцированная диаграмма переходов состояний конечного автомата — это диграф, каждый путь которого в конечном итоге достигает минимальной подсистемы (подавтомата). Исходящих путей из подсистем не существует. С помощью подачи автома-

ту случайных длинных слов, каждой минимальной подсистеме присваивается вероятность, при которой автомат достигает состояний, которые принадлежат этой подсистеме. Подсистема может рассматриваться как набор (под)автоматов, начальные состояния которых являются состояниями подсистемы. Если подавтомат аффинный, то (в силу минимальности) все подавтоматы подсистемы являются аффинными, а предельный график каждого подавтомата — это одно и то же семейство обмоток тора. Таким образом, можно присвоить вероятность функции $\psi(x, k) = e^{i(ax - 2\pi p^k b)}$.

Автомат A называется конечным аффинным автоматом, если при любом бесконечном входном слове w над входным алфавитом $\mathcal{I} = \mathbb{F}_p = \{0, 1, \dots, p-1\}$, автомат на конечном шаге достигает состояния, принадлежащего минимальной подсистеме, которая является конечной и чей подавтомат является аффинным (поскольку эта подсистема связана со строго определенной функцией $\psi(x, k)$). Возьмем максимальную подсистему, которая содержит эту минимальную подсистему и чей предельный график такой же, как у этой минимальной подсистемы; обозначим эту максимальную подсистему через $S_\psi(A)$.

$\Psi_A(x, k)$ является вполне определенной функцией $\mathbb{R} \times \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{C}$; Далее эта функция будет называться (одномерной) волновой функцией (системы A) над дискретным временем. Вследствие абсолютной сходимости ряда все эти волновые функции можно рассматривать как элементы гильбертова пространства l^2 . Объединение подсистем $S_\psi(A)$, соответствующие волновые функции ψ которых имеют одинаковый коэффициент a , можно рассматривать как (онтическое) чистое состояние, вероятность которого равна сумме вероятностей, приписываемых этим подсистемам; в то время как другие подсистемы, которые включают подсистемы $S_\psi(A)$ с более чем одним различным коэффициентом a , могут рассматриваться как (онтологические) смешанные состояния. Если автомат A достигает этого чистого состояния, то все следующие эпистемологические состояния будут принадлежать подсистеме $S_\psi(A)$; таким образом, происходит коллапс волновой функции (автомата).

Третий раздел «Реализация программы построения графиков автоматных функций» посвящен описанию программы для построения графиков автоматных функций на поверхности цилиндра и тора.

В *подразделе 3.1* представлено описание и интерфейс программы. Про-

грамма написана на двух языках программирования: *Python* (в среде разработки *VSCode*) и *C#* с использованием кроссплатформенной среды разработки *Unity*. С помощью программы можно строить графики автоматных функций на единичном квадрате в евклидовом пространстве, а так же визуализировать в *3D* на поверхностях цилиндра и тора. Программный комплекс работает в диалоговом режиме, как представлено на рисунке 5.

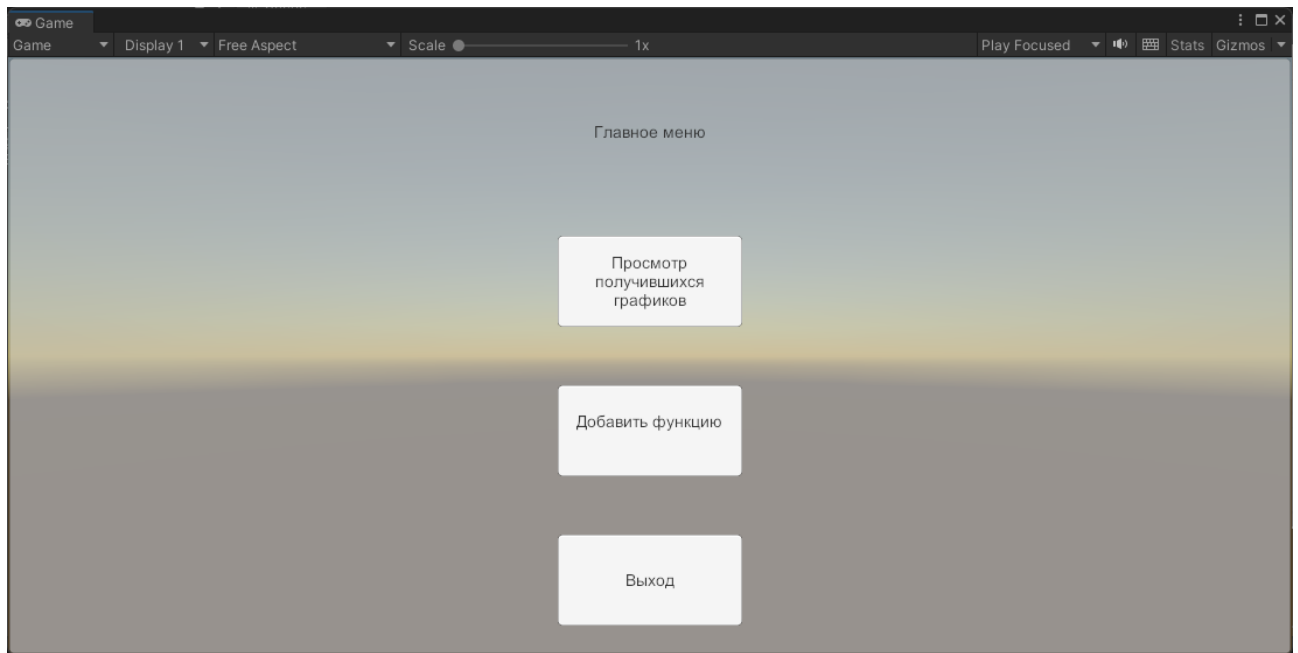


Рисунок 5 – Интерфейс программы

В *подразделе 3.2* описана структура программы.

В *подразделе 3.3* рассмотрены примеры работы программы. Рассмотрим автоматные функции $f(x) = 3x + 1$, $f(x) = 5x + 1$. Для начала подробно рассмотрим функцию $f(x) = 3x + 1$.

Зададим график функций в *Unity* как на рисунке 6.

Теперь рассмотрим как график функции будет выглядеть на плоскости в единичном квадрате на рисунке 7.

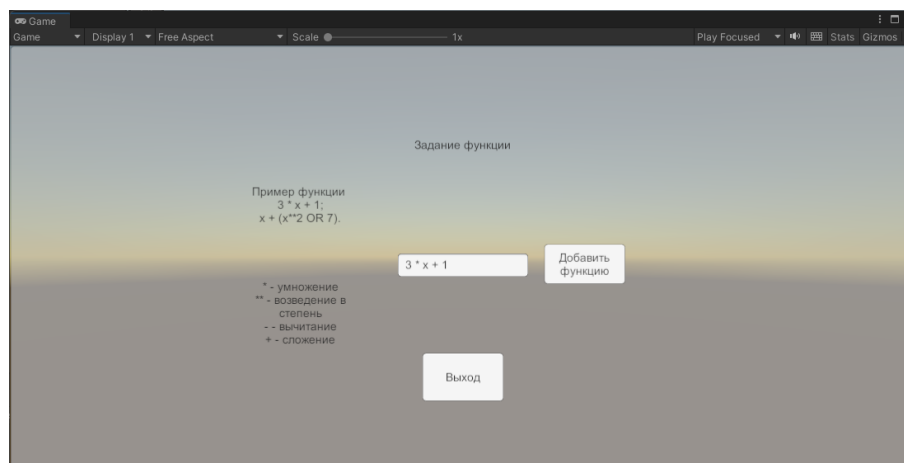


Рисунок 6 – Пример ввода функции $f(x) = 3x + 1$ в *Unity*

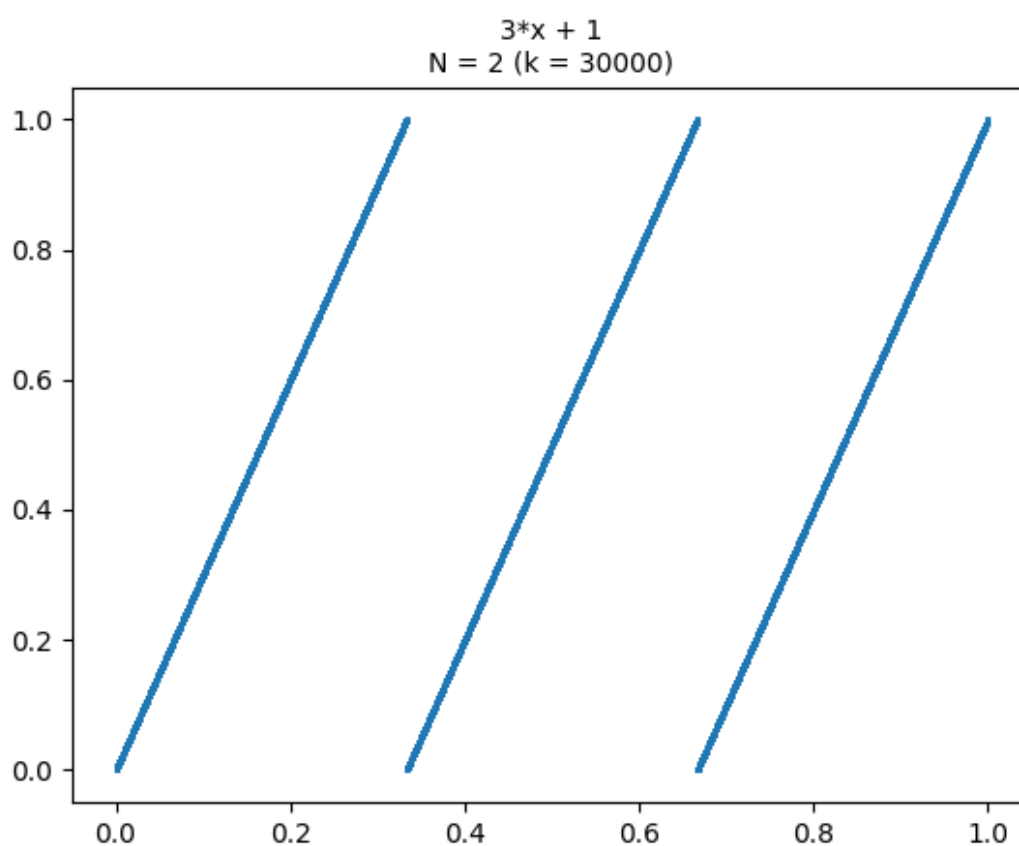


Рисунок 7 – Пример графика функции $f(x) = 3x + 1$ на плоскости

Свернем график функции в цилиндр и тор. Посмотрим как будет выглядеть цилиндр на рисунке 8 и затем вокруг тора на рисунке 9.

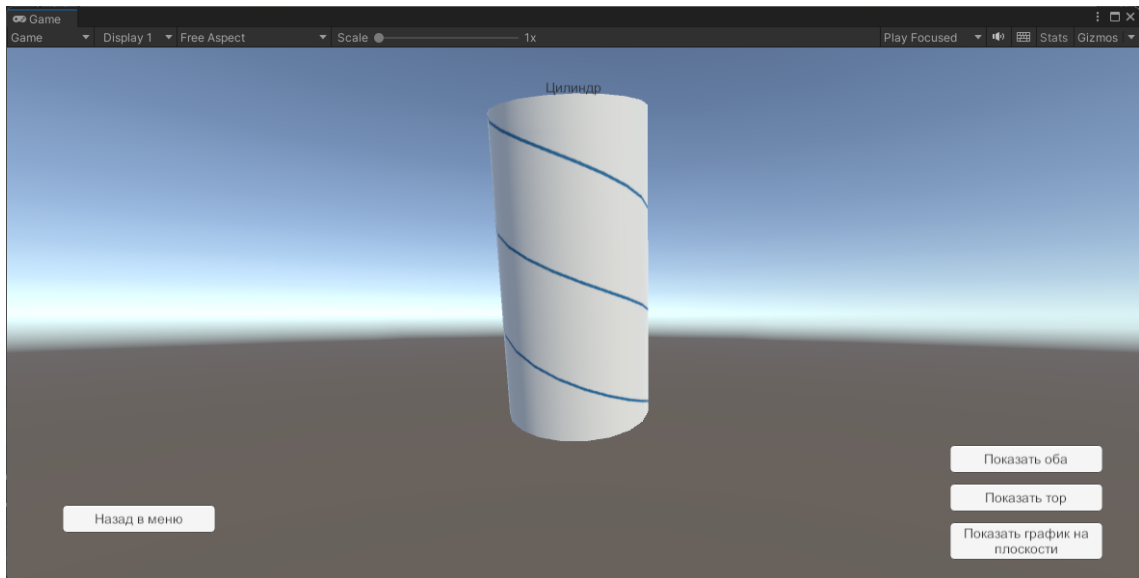


Рисунок 8 – Пример графика функции $f(x) = 3x + 1$ обернутый вокруг цилиндра

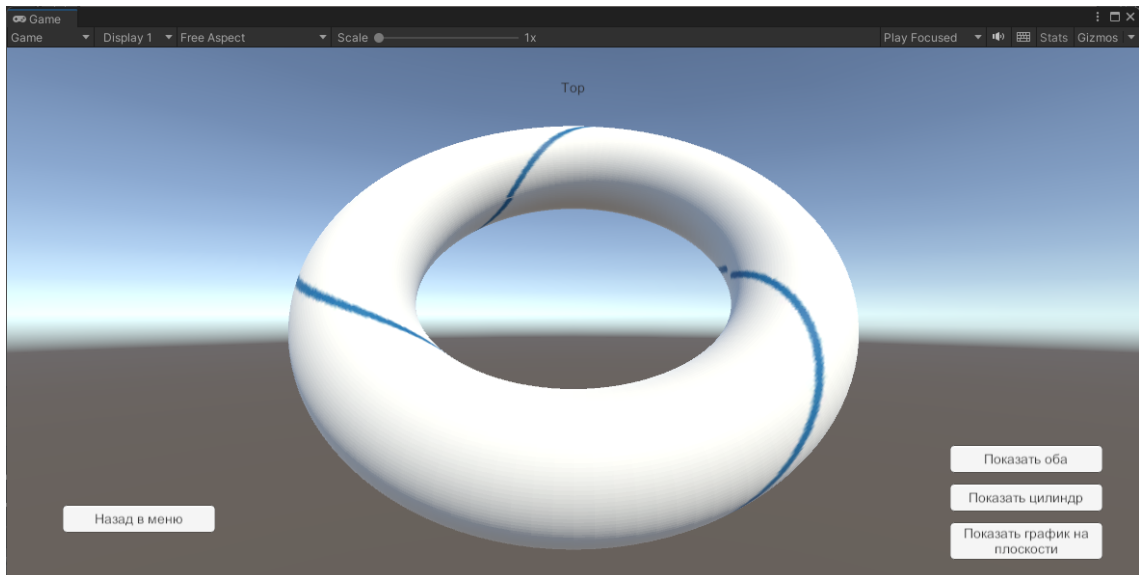


Рисунок 9 – Пример графика функции $f(x) = 3x + 1$ обернутый вокруг тора

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Автоматы по своей сути являются причинными функциями. Причинность одно из важнейших условий описания физических процессов на фундаментальном уровне. Конечные автоматы, функционирующие в дискретном времени суть модели волновых функций. Графики могут наглядно проиллюстрировать волновые функции.

Для анализа автоматной функции полезно построить ее график в единичном квадрате евклидовой плоскости. Если «свернуть» единичный квадрат

в цилиндр, то линейный график превратится в соленоид. Если отождествить единичный квадрат с поверхностью тора, то линейный график превратится в обмотку тора, которой в свою очередь можно сопоставить комплекснозначную функцию и проинтерпретировать как волновую функцию (волну де Бройля).

В ходе выполнения выпускной квалификационной работы проанализированы автоматные функции с помощью графиков в единичном квадрате евклидовой плоскости. В практической части работы разработана программа для построения графиков автоматных функций на поверхности цилиндра и тора.

Основные источники информации:

1. Anashin, V. Applied algebraic dynamics / V. Anashin, A. Khrennikov // Gruyter expositions in mathematics. — 2009. — Vol. 49. — 533 pp.
2. Anashin, V. Quantization causes waves: Smooth finitely computable functions are affine. *P-Adic Num Ultramet Anal Appl* 7, 169-227 (2015).
3. Григорчук, Р. И. Автоматы, динамические системы и группы / Р. И. Григорчук, В. В. Некрашевич, В. М. Суцанский // Тр. МИАН. — 2000. — Т. 231, № 12. — С. 134–214.
4. Яблонский, С. В. Введение в дискретную математику / С. В. Яблонский. — М: Наука, 1986. — 384 с.
5. Allouche, J. - P. Automatic sequences. Theory, applications, generalizations / J. - P. Allouche, J. Shallit. — Cambridge: Cambridge University Press, 2003. — 583 pp.
6. Dragovich, B. *p*-adic mathematical physics / B. Dragovich, A. Y. Khrennikov, S. V. Kozyrev, I. V. Volovich // *p-Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications*. — 2009. — Vol. 1. — Pp. 1–17.
7. Лунц, А. Г. Конечные *p*-адические автоматы / А. Г. Лунц // Доклады Академии наук СССР. — 1963. — Т. 150, № 4. — С. 755–758.
8. Тяпаев, Л. Б. Построение и анализ геометрических образов конечных детерминированных автоматов // Теоретические проблемы информатики и её приложений. — 1997. — Т. 2, № 1. — С. 146–151.
9. Тяпаев, Л. Б. Описание геометрических образов некоторых классов математических автоматов // Теоретические проблемы информатики и её приложений. — 1998. — Т. 2, № 2. — С. 139–148.